

文章编号: 1000-6788(2009)09-0099-09

离散时间有限缓冲空间 $GI/Geom/1/N$ 工作休假排队 系统稳态概率算法及性能分析

余妙妙^{1,2}, 唐应辉¹

(1. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066; 2. 四川理工学院 理学院, 自贡 643000)

摘要 综合使用离散补充变量方法和嵌入 Markov 链技术研究了离散时间有限缓冲空间工作休假 $GI/Geom/1/N$ 排队系统. 首先运用离散补充变量方法给出一个重要等式, 从而获得系统在稳态情形下任意时刻队长分布和顾客到达前夕队长分布的迭代关系. 然后, 再利用嵌入 Markov 链技术通过求解不变概率测度方程获得顾客到达前夕队长分布的数值解. 而后将顾客到达前夕队长分布代入迭代公式求得稳态情形下任意时刻的队长分布. 最后给出几个特殊情形下的数值计算实例, 并讨论了系统参数对几个主要性能指标的影响.

关键词 离散时间排队系统; 有限缓冲空间; 工作休假; 离散补充变量方法; 嵌入 Markov 链方法

中图分类号 O226

文献标志码 A

Steady-state probability algorithm and performance analysis of the finite buffer discrete-time $GI/Geom/1/N$ queueing system with working vacations

YU Miao-miao^{1,2}, TANG Ying-hui¹

(1. School of Mathematics & Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China; 2. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract Applying the method for discrete supplementary variable and embedded Markov chain technique, we investigate a finite buffer discrete-time $GI/Geom/1/N$ queueing system with working vacations. First, by employing the discrete supplementary variable technique, we give an important equation, and then we obtain the iterative relationship between the steady-state queue length distribution at prearrival and arbitrary epochs. Second, using the embedded Markov chain technique and solving the invariant probability measure equation, we get the numerical solutions for queue length distribution at prearrival. Furthermore, using the queue length distribution at prearrival and iterative formula, the steady-state queue length distribution at arbitrary epochs are obtained. At last, we present a numerical example under a special case and study the influence of the system parameters on several performance characteristics.

Keywords discrete-time queueing system; finite buffer; working vacation; discrete supplementary variable technique; method for embedded Markov chain

收稿日期: 2008-05-27

资助项目: 国家自然科学基金 (70871084); 教育部高校博士点专项研究基金 (200806360001); 四川省教育厅自然科学基金 (08ZC028)

作者简介: 余妙妙 (1979-), 男, 讲师, 博士研究生; 唐应辉 (1963-), 男, 教授, 博士, 博士生导师.

1 引言

在过去的几十年里, 休假排队理论作为分析计算机系统、通信网络性能的一种有效数学工具已经得到了广泛而深入的研究, 并且形成了自身独特的理论框架, 其理论核心为随机分解. 关于休假排队模型的详细论述可以参见 Doshi^[1] 的综述, Takagi^[2], 田乃硕^[3] 和唐应辉^[4] 等的专著.

在各种各样的经典休假排队模型中, 我们一般均假设服务员在假期中完全停止对顾客服务, 而在系统外休息或从事辅助工作. 最近, Servi 和 Finn^[5] 在研究光纤通信网中的波分复用 (WDM) 技术时在其所建立的数学模型 $M/M/1$ 排队系统中引入了一种半休假策略, 即工作休假策略. 这种休假策略与常见的多重和单重休假策略的最大区别在于服务员休假期间, 服务系统并未完全停止工作而是以较低的速率为顾客提供服务. 此后, 在 Servi 和 Finn 的工作基础上, Wu 和 Takagi^[6] 运用嵌入 Markov 链方法研究了工作休假 $M/G/1$ 排队系统, Baba^[7] 使用矩阵几何解方法分析了工作休假 $GI/M/1$ 排队系统. 前不久, Banik, Gupta 和 Pathak^[8] 又将这种半休假机制推广到有限缓冲空间 $GI/M/1/N$ 排队系统的研究中, 获得了该系统的一系列性能指标. 但值得注意的是上述关于工作休假策略的研究均局限在连续时间排队模型上, 而对于另一类十分重要的排队模型即离散时间排队模型的研究涉及较少, 迄今在所见文献中只有 Li 和 Tian^[9] 利用矩阵几何解方法研究了无限缓冲空间且工作休假可中断的 $GI/Geom/1$ 离散时间排队系统. 为使所建立的离散时间排队模型与实际情形更加吻合, 受文献 [8] 的启发, 本文综合运用离散补充变量方法和嵌入 Markov 链分析技术讨论了一个带有工作休假机制的有限缓冲空间 $GI/Geom/1/N$ 离散时间排队模型, 并给出了稳态下系统任意时刻队长分布的具体计算方法. 与以往研究离散时间排队系统的一些文献^[10-11] 相比较, 在大多数情况下它们考虑的只是系统在某些特殊时刻的队长分布 (如顾客到达前夕或离开瞬间), 而运用本文所提供的方法不仅可以获得这些特殊时刻队长分布的数值解, 还可以在此基础上进一步通过文中所提供的迭代公式获得系统在稳态情形下任意时刻的队长分布, 这一指标对于精确评价系统的各种性能有着积极而重要的意义.

2 模型描述与符号说明

考虑离散时间晚到达延迟进入 (LAS-DA) $GI/Geom/1/N$ 排队系统, 即顾客到达只能发生在 (m^-, m) 时间段内, 而顾客服务完离去只能发生在 (m, m^+) 时间段内 (如图 1 所示), 每个顾客的服务时间至少为一个单位时间. 相邻顾客的到达间隔时间 A 服从一般离散分布, 其分布律为 $P\{A = n\} = a_n, n = 1, 2, \dots$, 且 $E[A] = 1/a$, 并记该分布的概率母函数为 $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, (a_0 = 0, |z| \leq 1)$. 进入系统的顾客按照 FCFS 规则接受服务, 假定在忙期中顾客的服务时间 S_b 服从参数为 μ 的几何分布, 即 $P\{S_b = n\} = \mu(1 - \mu)^{n-1}, 0 < \mu < 1, n = 1, 2, \dots$. 当系统变空, 即正规忙期结束后服务员立即进入随机长度为 V 的工作假期, V 服从参数为 γ 的几何分布, 即 $P\{V = n\} = \gamma(1 - \gamma)^{n-1}, 0 < \gamma < 1, n = 1, 2, \dots$. 与通常的休假策略不同, 服务员在工作假期并未完全停止工作, 而是以较低的服务速率 $\eta (\eta < \mu)$ 为顾客服务. 工作假期期间顾客的服务时间 S_v 服从参数为 η 的几何分布, 即 $P\{S_v = n\} = \eta(1 - \eta)^{n-1}, 0 < \eta < 1, n = 1, 2, \dots$. 当某次工作假期结束时, 服务员发现系统非空, 则他立即停止休假返回系统并将服务速率从 η 提高至 μ , 开始他的正规忙期, 此时正在接受低速率服务的顾客重新开始接受服务; 否则, 服务员将进行另一次独立同分布的工作休假.

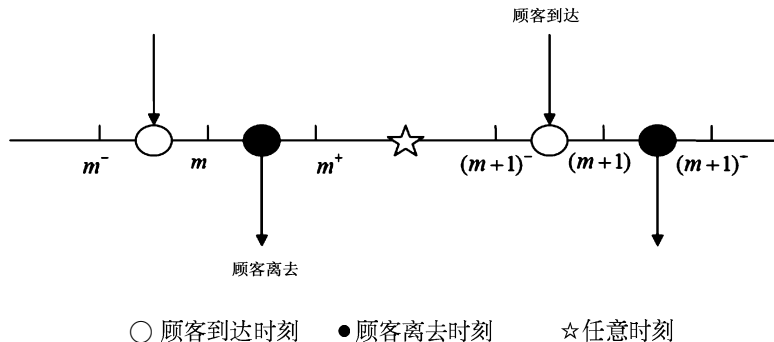


图 1 晚到达延迟通过系统的几个特殊时刻

系统在时刻 $m^- (m = 1, 2, \dots)$ 的状态可以由如下三个随机变量加以描述

$$N(m^-) : m^- \text{ 时刻系统中的顾客数}; \quad U(m^-) : m^- \text{ 时刻顾客的剩余到达时间};$$

$$Y(m^-) = \begin{cases} 0, & m^- \text{ 时刻服务员处于工作休假中} \\ 1, & m^- \text{ 时刻服务员处于正规忙期中.} \end{cases}$$

易知 $\{N(m^-), U(m^-), Y(m^-)\}$ 构成了一个高维的离散时间 Markov 过程, 系统在时刻 m^- 的全部状态概率定义如下:

$$P_{n,0}(m^-, u) = P\{N(m^-) = n, U(m^-) = u, Y(m^-) = 0\}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad u \geq 0$$

$$P_{n,1}(m^-, u) = P\{N(m^-) = n, U(m^-) = u, Y(m^-) = 1\}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad u \geq 0$$

在全文的分析过程中我们还会使用到如下一些符号:

$$P_{n,0}(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{n,0}(m^-, u), \quad u \geq 0; \quad P_{n,1}(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{n,1}(m^-, u), \quad u \geq 0$$

$P_{n,0} = \lim_{m \rightarrow \infty} P\{N(m^-) = n, Y(m^-) = 0\}$ = 稳态情形下服务员工作休假中任意时刻的队长分布, $0 \leq n \leq N$;

$P_{n,1} = \lim_{m \rightarrow \infty} P\{N(m^-) = n, Y(m^-) = 1\}$ = 稳态情形下服务员正规忙期中任意时刻的队长分布, $1 \leq n \leq N$;

$$G_{n,0}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} P_{n,0}(u) z^u, \quad |z| \leq 1, \quad 0 \leq n \leq N$$

$$G_{n,1}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} P_{n,1}(u) z^u, \quad |z| \leq 1, \quad 1 \leq n \leq N$$

$$\eta' = 1 - \eta; \quad \mu' = 1 - \mu; \quad \gamma' = 1 - \gamma$$

3 系统状态转移方程与一个重要等式

考虑系统在时间点 m^- 和 $(m+1)^-$ 处的状态转移情况, 令 $m \rightarrow \infty$, 经过简单的概率分析容易建立起各状态概率之间的一组差分方程

$$P_{0,0}(u-1) = P_{0,0}(u) + P_{1,1}(u)\mu + P_{1,0}(u)\eta \quad (1)$$

$$P_{1,0}(u-1) = P_{1,0}(u)\eta'\gamma' + P_{2,0}(u)\eta\gamma' + P_{1,0}(0)a_u\eta\gamma' + P_{0,0}(0)a_u\gamma' \quad (2)$$

$$P_{k,0}(u-1) = P_{k,0}(u)\eta'\gamma' + P_{k+1,0}(u)\eta\gamma' + P_{k,0}(0)a_u\eta\gamma' + P_{k-1,0}(0)a_u\eta'\gamma', \quad 2 \leq k \leq N-2 \quad (3)$$

$$P_{N-1,0}(u-1) = P_{N-1,0}(u)\eta'\gamma' + P_{N,0}(u)\eta\gamma' + P_{N-1,0}(0)a_u\eta\gamma' + P_{N-2,0}(0)a_u\eta'\gamma' + P_{N,0}(0)a_u\eta\gamma' \quad (4)$$

$$P_{N,0}(u-1) = P_{N,0}(u)\eta'\gamma' + P_{N-1,0}(0)a_u\eta'\gamma' + P_{N,0}(0)a_u\eta'\gamma' \quad (5)$$

$$P_{1,1}(u-1) = P_{1,1}(u)\mu' + P_{0,0}(0)a_u\gamma + P_{2,1}(u)\mu + P_{1,1}(0)\mu a_u + P_{1,0}(u)\eta'\gamma + P_{1,0}(0)\eta\gamma a_u$$

$$+ P_{2,0}(u)\eta\gamma \quad (6)$$

$$P_{k,1}(u-1) = P_{k,1}(u)\mu' + P_{k-1,0}(0)a_u\gamma\eta' + P_{k,0}(u)\gamma\eta' + P_{k+1,1}(u)\mu + P_{k,1}(0)\mu a_u + P_{k-1,1}(0)\mu' a_u$$

$$+ P_{k,0}(0)\eta\gamma a_u + P_{k+1,0}(u)\eta\gamma, \quad 2 \leq k \leq N-2 \quad (7)$$

$$P_{N-1,1}(u-1) = P_{N-1,1}(u)\mu' + P_{N-2,0}(0)a_u\eta'\gamma + P_{N-1,0}(u)\eta'\gamma + P_{N,1}(u)\mu + P_{N,1}(0)\mu a_u$$

$$+ P_{N-1,1}(0)\mu a_u + P_{N-2,1}(0)\mu' a_u + P_{N-1,0}(0)\eta\gamma a_u + P_{N,0}(0)\eta\gamma a_u + P_{N,0}(u)\eta\gamma \quad (8)$$

$$P_{N,1}(u-1) = P_{N,1}(u)\mu' + P_{N-1,0}(0)a_u\gamma\eta' + P_{N,0}(0)a_u\gamma\eta' + P_{N,0}(u)\gamma\eta' + P_{N-1,1}(0)a_u\mu'$$

$$+ P_{N,1}(0)a_u\mu' \quad (9)$$

对 (1)–(9) 式左右两端同时作 Z 变换后有:

$$(z-1)G_{0,0}(z) = \mu G_{1,1}(z) + \eta\gamma'G_{1,0}(z) + \eta\gamma G_{1,0}(z) - P_{0,0}(0) - \mu P_{1,1}(0) - \eta\gamma'P_{1,0}(0) - \eta\gamma P_{1,0}(0) \quad (10)$$

$$(z-\eta'\gamma')G_{1,0}(z) = \eta\gamma'G_{2,0}(z) + \eta\gamma'P_{1,0}(0)A(z) + \gamma'P_{0,0}(0)A(z) - \eta'\gamma'P_{1,0}(0) - \eta\gamma'P_{2,0}(0) \quad (11)$$

$$(z-\eta'\gamma')G_{k,0}(z) = \eta\gamma'G_{k+1,0}(z) + \eta\gamma'A(z)P_{k,0}(0) + \eta'\gamma'A(z)P_{k-1,0}(0) - \eta'\gamma'P_{k,0}(0) - \eta\gamma'P_{k+1,0}(0), \quad 2 \leq k \leq N-2 \quad (12)$$

$$(z-\eta'\gamma')G_{N-1,0}(z) = \eta\gamma'G_{N,0}(z) + \eta\gamma'A(z)P_{N-1,0}(0) + \eta\gamma'A(z)P_{N,0}(0) + \eta'\gamma'A(z)P_{N-2,0}(0) - \eta'\gamma'P_{N-1,0}(0) - \eta\gamma'P_{N,0}(0) \quad (13)$$

$$(z-\eta'\gamma')G_{N,0}(z) = \eta'\gamma'A(z)P_{N-1,0}(0) + \eta'\gamma'A(z)P_{N,0}(0) - \eta'\gamma'P_{N,0}(0) \quad (14)$$

$$(z-\mu')G_{1,1}(z) = \mu G_{2,1}(z) + \eta'\gamma G_{1,0}(z) + \eta\gamma G_{2,0}(z) + \gamma A(z)P_{0,0}(0) + \mu A(z)P_{1,1}(0) + \eta\gamma A(z)P_{1,0}(0) - \mu'P_{1,1}(0) - \mu P_{2,1}(0) - \eta'\gamma P_{1,0}(0) - \eta\gamma P_{2,0}(0) \quad (15)$$

$$(z-\mu')G_{k,1}(z) = \eta'\gamma G_{k,0}(z) + \mu G_{k+1,1}(z) + \eta\gamma G_{k+1,0}(z) + \eta'\gamma A(z)P_{k-1,0}(0) + \mu A(z)P_{k,1}(0) + \mu' A(z)P_{k-1,1}(0) + \eta\gamma A(z)P_{k,0}(0) - \mu'P_{k,1}(0) - \mu P_{k+1,1}(0) - \eta'\gamma P_{k,0}(0) - \eta\gamma P_{k+1,0}(0), \quad 2 \leq k \leq N-2 \quad (16)$$

$$(z-\mu')G_{N-1,1}(z) = \eta'\gamma G_{N-1,0}(z) + \mu G_{N,1}(z) + \eta\gamma G_{N,0}(z) + \eta'\gamma A(z)P_{N-2,0}(0) + \mu A(z)P_{N,1}(0) + \mu' A(z)P_{N-2,1}(0) + \mu A(z)P_{N-1,1}(0) + \eta\gamma A(z)P_{N-1,0}(0) + \eta\gamma A(z)P_{N,0}(0) - \mu'P_{N-1,1}(0) - \mu P_{N,1}(0) - \eta'\gamma P_{N-1,0}(0) - \eta\gamma P_{N,0}(0) \quad (17)$$

$$(z-\mu')G_{N,1}(z) = \eta'\gamma G_{N,0}(z) + \eta'\gamma A(z)P_{N-1,0}(0) + \eta'\gamma A(z)P_{N,0}(0) + \mu' A(z)P_{N-1,1}(0) + \mu' A(z)P_{N,1}(0) - \mu'P_{N,1}(0) - \eta'\gamma P_{N,0}(0) \quad (18)$$

将 (10)–(18) 式相加得

$$\left(\sum_{i=0}^N G_{i,0}(z) + \sum_{i=1}^N G_{i,1}(z) \right) = \frac{A(z)-1}{z-1} \left(\sum_{i=0}^N P_{i,0}(0) + \sum_{i=1}^N P_{i,1}(0) \right) \quad (19)$$

当 $z \rightarrow 1$ 时, 由 (19) 式我们可得到如下一个重要的等式

$$\left(\sum_{i=0}^N P_{i,0} + \sum_{i=1}^N P_{i,1} \right) = \frac{1}{a} \left(\sum_{i=0}^N P_{i,0}(0) + \sum_{i=1}^N P_{i,1}(0) \right) \quad (20)$$

进一步结合归一化条件有

$$\left(\sum_{i=0}^N P_{i,0}(0) + \sum_{i=1}^N P_{i,1}(0) \right) = a \quad (21)$$

(21) 式在后面推导稳态情形下任意时刻和顾客到达前夕队长分布两者间关系时起着关键作用.

4 系统稳态概率计算方法

首先令 $P_{n,0}^- (0 \leq n \leq N)$ 表示稳态下某顾客到达前夕服务员处于工作休假状态且系统中有 n 个顾客的概率, 再令 $P_{n,1}^- (1 \leq n \leq N)$ 表示稳态下某顾客到达前夕服务员处于正规忙期且系统中有 n 个顾客的概率. 由 Bayes 公式并结合上节中所得到的重要等式 (21) 有

$$P_{i,0}^- = \frac{P_{i,1}(0)}{\sum_{i=0}^N P_{i,0}(0) + \sum_{i=1}^N P_{i,1}(0)} = \frac{1}{a} P_{i,0}(0) \quad (22)$$

$$P_{i,1}^- = \frac{P_{i,1}(0)}{\sum_{i=0}^N P_{i,0}(0) + \sum_{i=1}^N P_{i,1}(0)} = \frac{1}{a} P_{i,1}(0) \quad (23)$$

将上述刻划 $P_{i,0}^-$ 和 $P_{i,0}$ 以及 $P_{i,1}^-$ 和 $P_{i,1}$ 关系的两个等式代入上节 (10)–(18) 式, 并置 $z = 1$, 同时注意到 $G_{i,0}(1) = P_{i,0}$, $G_{i,1}(1) = P_{i,1}$, 则有如下一系列等式成立

$$P_{N,0} = \frac{\eta'\gamma'a}{1 - \eta'\gamma'} P_{N-1,0}^- \quad (24)$$

$$P_{N-1,0} = \frac{1}{1 - \eta'\gamma'} \left[\eta'\gamma' P_{N,0} + a(\eta\gamma' - \eta'\gamma') P_{N-1,0}^- + a\eta'\gamma' P_{N-2,0}^- \right] \quad (25)$$

$$P_{k,0} = \frac{1}{1 - \eta'\gamma'} \left[\eta'\gamma' P_{k+1,0} + a\eta'\gamma' P_{k-1,0}^- + a(\eta\gamma' - \eta'\gamma') P_{k,0}^- - a\eta\gamma' P_{k+1,0}^- \right], \quad 2 \leq k \leq N-2 \quad (26)$$

$$P_{1,0} = \frac{1}{1 - \eta'\gamma'} \left[\eta'\gamma' P_{2,0} + a\gamma' P_{0,0}^- + a(\eta\gamma' - \eta'\gamma') P_{1,0}^- - a\eta\gamma' P_{2,0}^- \right] \quad (27)$$

$$P_{N,1} = \frac{1}{\mu} \left[\eta'\gamma' P_{N,0} + a\eta'\gamma' P_{N-1,0}^- + a\mu' P_{N-1,1}^- \right] \quad (28)$$

$$P_{N-1,1} = \frac{1}{\mu} \left[\eta'\gamma' P_{N-1,0} + \mu P_{N,1} + \eta\gamma' P_{N,0} + a\eta'\gamma' P_{N-2,0}^- + a(\eta\gamma - \eta'\gamma) P_{N-1,0}^- + a\mu' P_{N-2,1}^- + a(\mu - \mu') P_{N-1,1}^- \right] \quad (29)$$

$$P_{k,1} = \frac{1}{\mu} \left[\eta'\gamma' P_{k,0} + \mu P_{k+1,1} + \eta\gamma' P_{k+1,0} + a\eta'\gamma' P_{k-1,0}^- + a(\eta\gamma - \eta'\gamma) P_{k,0}^- - a\eta\gamma' P_{k+1,0}^- + a\mu' P_{k-1,1}^- + a(\mu - \mu') P_{k,1}^- - a\mu P_{k+1,1}^- \right], \quad 2 \leq k \leq N-2 \quad (30)$$

$$P_{1,1} = \frac{1}{\mu} \left[\mu P_{2,1} + \eta'\gamma' P_{1,0} + \eta\gamma' P_{2,0} + a\gamma' P_{0,0}^- + a(\eta\gamma - \eta'\gamma) P_{1,0}^- - a\eta\gamma' P_{2,0}^- + a(\mu - \mu') P_{1,1}^- - a\mu P_{2,1}^- \right] \quad (31)$$

最后, $P_{0,0}$ 可以通过归一化条件由如下等式计算而获得

$$P_{0,0} = 1 - \sum_{n=0}^N P_{n,0} - \sum_{n=1}^N P_{n,1} \quad (32)$$

从以上 (24)–(32) 式可知, 只要求得顾客到达前夕的队长分布 $P_{n,0}^- (0 \leq n \leq N)$ 和 $P_{n,1}^- (1 \leq n \leq N)$ 便可以通过迭代得到系统的稳态概率 $P_{n,0} (0 \leq n \leq N)$ 和 $P_{n,1} (1 \leq n \leq N)$.

下面我们就利用嵌入 Markov 链技术来求解稳态下顾客到达前夕的队长分布. 令 L_n 表示第 n 个顾客到达前夕系统中的顾客数, J_n 表示第 n 个顾客到达前夕服务员所处的状态, 则 $\{(L_n, J_n), n \geq 1\}$ 是一个 Markov 链, 有状态空间

$$\Omega = \{(0, 0)\} \cup \{(i, j), 1 \leq i \leq N, j = 0, 1\}$$

其转移概率矩阵可写成如下分块形式

$$R = \begin{pmatrix} B_{0,0} & A_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,0} & A_1 & A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,0} & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{3,0} & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ B_{N-1,0} & A_{N-1} & A_{N-2} & A_{N-3} & A_{N-4} & \cdots & A_0 \\ B_{N-1,0} & A_{N-1} & A_{N-2} & A_{N-3} & A_{N-4} & \cdots & A_0 \end{pmatrix}$$

其中

$$B_{0,0} = 1 - \beta_0^0 - \theta_0^0, \quad A_{0,1} = (\beta_0^0, \theta_0^0)$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \beta_k & \theta_k \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad B_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=0}^k (\beta_i + \theta_i) \\ 1 - \sum_{i=0}^k \alpha_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq N-1$$

各分块矩阵中元素的具体表达形式如下:

$$\alpha_0 = A(\mu'), \quad \alpha_k = \sum_{j=k}^{\infty} a_j C_j^k \mu^k (\mu')^{j-k}, \quad k \geq 1$$

$$\beta_0^0 = A(\gamma'\eta')/\eta', \quad \beta_0 = A(\gamma'\eta'), \quad \beta_k = \sum_{j=k}^{\infty} a_j (\gamma')^j C_j^k \eta^k (\eta')^{j-k}, \quad k \geq 1$$

$$\theta_0^0 = \theta_0/\eta', \quad \theta_0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{i=0}^{j-1} \gamma (\gamma')^i (\eta')^{i+1} (\mu')^{j-1-i}$$

$$\theta_k = a_k \sum_{i=0}^{k-1} \gamma (\gamma')^i \eta^{i+1} \mu^{k-i-1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \left(\sum_{i=0}^{j-2} (\gamma')^i \gamma \sum_{l=0}^k C_{i+1}^l \eta^l (\eta')^{i+1-l} C_{j-i-1}^{k-l} \mu^{k-l} (\mu')^{j-i-1-k+l} + (\gamma')^{j-1} \gamma C_j^k \eta^k (\eta')^{j-k} \right), \quad k \geq 1$$

注 1 当 $n < m$ 时, $C_n^m = 0$.

顾客到达前夕的稳态概率分布 $P_{n,0}^- (0 \leq n \leq N)$ 和 $P_{n,1}^- (1 \leq n \leq N)$ 可以通过求解不变概率测度方程 $P^- = P^-R$ 获得, 这里 $P^- = \{P_{0,0}^-, P_{1,0}^-, P_{1,1}^-, P_{2,0}^-, P_{2,1}^-, \dots, P_{N,0}^-, P_{N,1}^-\}$.

5 系统性能分析

5.1 顾客损失概率与系统有效到达率

由于系统容量有限, 一旦 N 个位置已被顾客全部占用, 新到的顾客就只能自动离开服务系统不再回来. 记顾客的损失概率为 P_{loss} , 由前面分析易知

$$P_{loss} = P_{N,0}^- + P_{N,1}^- \quad (33)$$

因此单位时间平均进入系统的顾客数为

$$\bar{a} = a(1 - P_{loss}) \quad (34)$$

\bar{a} 又称为系统的有效到达率.

5.2 顾客在队列中的等待时间分析

令 $W_q(z)$ 表示工作休假 $GI/Geom/1/N$ 排队系统中被系统接收的顾客在队列中等待时间的概率母函数.

由于到达发生在诸如 (m^-, m) 这样的时间段内, 而在时间段 (m^+, m) 内正在进行的服务或工作休假可能结束, 因此利用全概率公式, 经过并不复杂的概率分析可得

$$\begin{aligned} W_q(z) = & \frac{1}{1 - P_{loss}} \left\{ P_{0,0}^- + P_{1,0}^- \gamma' \eta + \sum_{n=1}^{N-1} P_{n,1}^- \left[\mu' \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^n + \mu \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^{n-1} \right] + \right. \\ & \sum_{n=1}^{N-1} P_{n,0}^- \gamma \left[\eta' \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^n + \eta \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^{n-1} \right] + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} P_{n,0}^- \gamma' \eta' \left[\frac{(\gamma')^{n-1} \eta^n z^n}{(1 - \gamma' \eta' z)^n} + \frac{\gamma \eta' z}{1 - \gamma' \eta' z} \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^n + \right. \\ & \left. \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\gamma')^{n-(i+2)} \gamma (\eta z)^{n-(i+1)}}{(1 - \gamma' \eta' z)^{n-i}} \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^{i+1} \right] + \\ & \sum_{n=2}^{N-1} P_{n,0}^- \gamma' \eta \left[\frac{(\gamma')^{n-2} \eta^{n-1} z^{n-1}}{(1 - \gamma' \eta' z)^{n-1}} + \frac{\gamma \eta' z}{1 - \gamma' \eta' z} \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^{n-1} + \right. \\ & \left. \left. \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(\gamma')^{n-(i+3)} \gamma (\eta z)^{n-(i+2)}}{(1 - \gamma' \eta' z)^{n-(i+1)}} \left(\frac{\mu z}{1 - \mu' z} \right)^{i+1} \right] \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

由上式易得顾客在系统中等待时间的数学期望为

$$\begin{aligned}
 E[W_q] = & \frac{1}{1 - P_{loss}} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} P_{n,1}^- \left(\frac{n - \mu}{\mu} \right) + \sum_{n=1}^{N-1} P_{n,0}^- \gamma \left(\frac{n - \eta}{\mu} \right) + \right. \\
 & \sum_{n=1}^{N-1} P_{n,0}^- \gamma' \eta' \left[\frac{n (\gamma')^{n-1} \eta^n}{(1 - \gamma' \eta')^{n+1}} + \frac{\gamma \eta'}{(1 - \gamma' \eta')^2} + \frac{n \gamma \eta'}{\mu (1 - \gamma' \eta')} + \right. \\
 & \left. \left. \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\gamma')^{n-i-2} \eta^{n-i-1} \gamma (n - i - 1 + \gamma' \eta')}{(1 - \gamma' \eta')^{n-i+1}} + \frac{(\gamma')^{n-i-2} \eta^{n-i-1} \gamma (i + 1)}{(1 - \gamma' \eta')^{n-i} \mu} \right] + \right. \\
 & \sum_{n=2}^{N-1} P_{n,0}^- \gamma' \eta' \left[\frac{(n - 1) (\gamma')^{n-2} \eta^{n-1}}{(1 - \gamma' \eta')^n} + \frac{\gamma \eta'}{(1 - \gamma' \eta')^2} + \frac{(n - 1) \gamma \eta'}{\mu (1 - \gamma' \eta')} + \right. \\
 & \left. \left. \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(\gamma')^{n-i-3} \eta^{n-i-2} \gamma (n - i - 2 + \gamma' \eta')}{(1 - \gamma' \eta')^{n-i}} + \frac{(\gamma')^{n-i-3} \eta^{n-i-2} \gamma (i + 1)}{(1 - \gamma' \eta')^{n-i-1} \mu} \right] \right\} \quad (36)
 \end{aligned}$$

5.3 系统队长

事实上在 (24)–(32) 式中我们已经给出了稳态情形下系统任意时刻的队长分布, 以 L_s 表示稳态下系统的平均队长, 则有

$$L_s = \sum_{n=1}^N n P_{n,1} + \sum_{n=0}^N n P_{n,0} \quad (37)$$

6 数值实例

如果假设顾客的到达间隔时间始终为 5 个单位时隙, 即顾客到达间隔时间服从定长分布 $P\{A = 5\} = 1$, 进一步再假设系统容量 $N = 12$. 通过 Matlab 编程分析我们可以计算出不同参数情形下系统队长的稳态概率分布以及丰富的系统性能指标的数值结果. 选取其中一部分较有代表性的结果以图表形式给出.

把当前系统参数 γ 和 η 分别取定为 0.0660 和 0.1056 时图 2 (a) 给出了顾客受阻概率 P_{loss} 随正规忙期中服务参数 μ 的变化曲线. 可以看出当 μ 在 0.1975 与 0.2500 间变化时顾客受阻概率有大幅降低. 当把系统参数 μ 和 η 分别取定为 0.1980 和 0.1056 时图 2 (b) 给出了顾客受阻概率 P_{loss} 随休假参数 γ 的变化曲线. 比较图 2 (a) 和图 2 (b) 不难发现参数 μ 对顾客受阻概率的影响较参数 γ 要显著得多.

当把系统参数 γ 和 η 分别取定为 0.0660 和 0.1056 时图 3 (a) 给出了系统队长 L_s 随正规忙期中服务参数 μ 的变化曲线. 可以看出当 μ 在 0.1975 与 0.3500 间变化时系统队长减小较为迅速, 而后系统队长趋于稳定其值约为 2. 当把系统参数 μ 和 η 分别取定为 0.1980 和 0.1056 时图 3 (b) 给出了系统队长 L_s 随休假参数 γ 的变化曲线. 比较图 3 (a) 和图 3 (b) 不难发现参数 μ 对系统队长的影响较参数 γ 要显著得多.

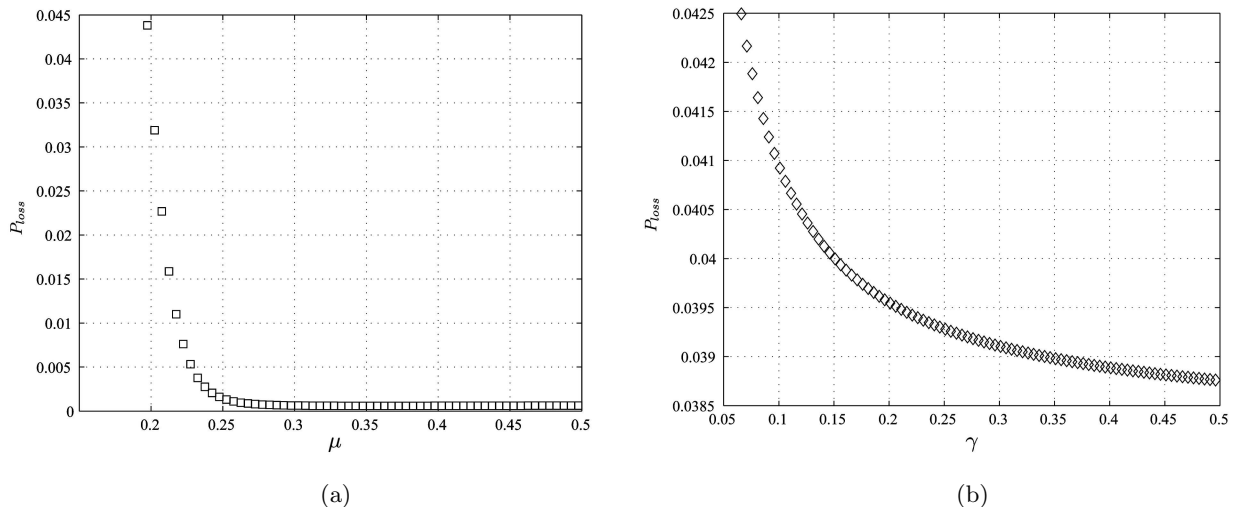


图 2 参数 μ, γ 对 $D/Geom/1/12$ 工作休假排队系统顾客阻塞概率的影响

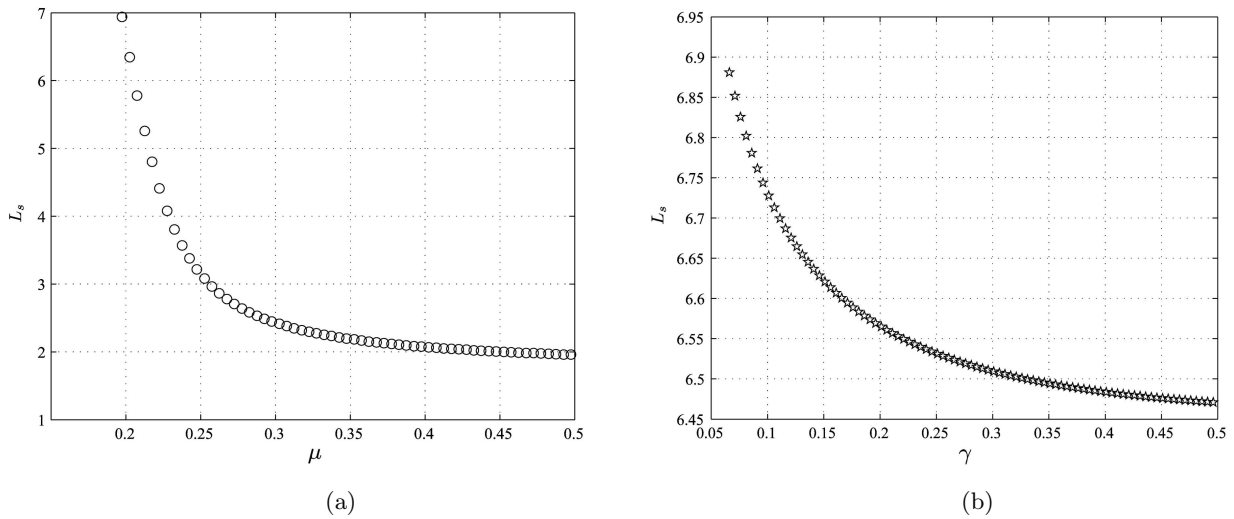


图 3 参数 μ, γ 对 $D/Geom/1/12$ 工作休假排队系统队长的影响

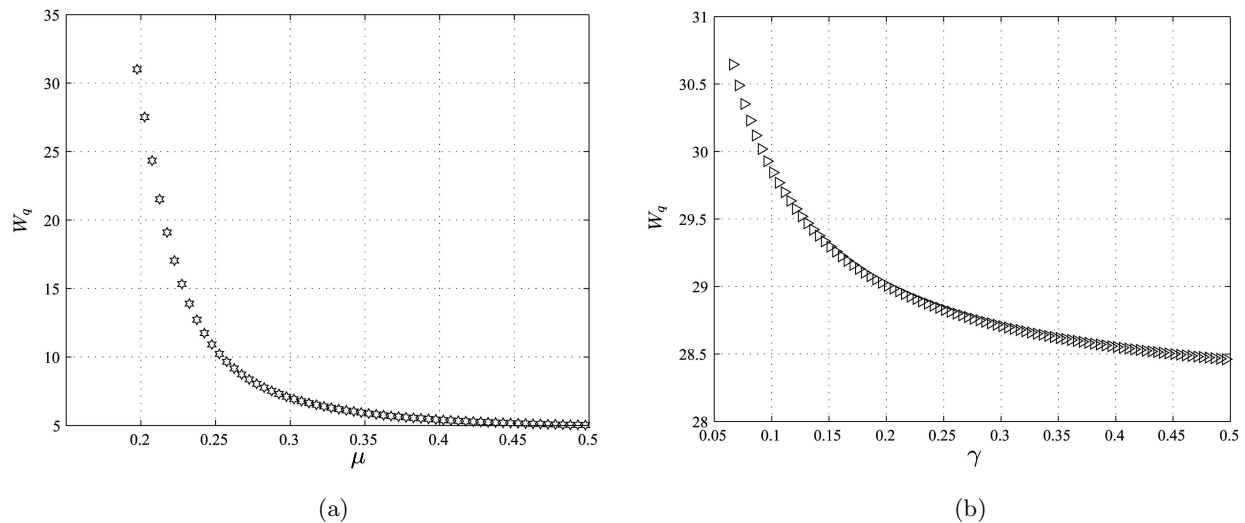


图 4 参数 μ, γ 对 $D/Geom/1/12$ 工作休假排队系统顾客等待时间的影响

当把系统参数 γ 和 η 分别取定为 0.0660 和 0.1056 时图 4(a) 给出了顾客等待时间随正规忙期中服务参数 μ 的变化曲线. 可以看出当 μ 在 0.1975 与 0.3500 间变化时顾客等待时间有较大程度的缩短, 而后顾客在队列中的等待时间趋于稳定其值约为 5. 当把系统参数 μ 和 η 分别取定为 0.1980 和 0.1056 时图 4(b) 给出了顾客等待时间随休假参数 γ 的变化曲线. 比较图 4(a) 和图 4(b) 不难发现参数 μ 对顾客等待时间的影响较参数 γ 要显著得多.

对 $D/Geom/1/12$ 工作休假排队系统在取定系统参数后 ($\mu=0.1980, \eta=0.1056, \gamma=0.0660$), 利用本文所提供的计算方法可以分别求得稳态情形下任意时刻队长分布和顾客到达前夕队长分布 (见表 1).

7 结论

工作休假排队系统有着较强的工程应用背景, 尤其为光纤通讯中的高速路由器性能分析及评价提供了一种有效的数学模型. 本文对离散时间有限缓冲空间 $GI/Geom/1/N$ 排队系统进行了定量分析, 得到了一系列性能指标, 并通过一种简洁有效的算法求出了稳态情形下顾客到达前夕的队长分布和任意时刻的队长分布. 这两种不同时刻队长分布概率的获得对系统性能评价的准确性和真实性起着积极而重要的作用.

表 1 $D/Geom/1/12$ 排队系统稳态情形下顾客到达前夕队长分布和任意时刻队长分布

n	$P_{n,0}^-$	$P_{n,1}^-$	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$
0	0.0252	—	0.0130	—
1	0.0158	0.0369	0.0190	0.0234
2	0.0088	0.0586	0.0113	0.0508
3	0.0050	0.0717	0.0063	0.0669
4	0.0028	0.0800	0.0036	0.0769
5	0.0016	0.0856	0.0020	0.0835
6	0.0009	0.0899	0.0011	0.0883
7	0.0005	0.0933	0.0006	0.0920
8	0.0003	0.0963	0.0004	0.0951
9	0.0002	0.0991	0.0002	0.0980
10	0.0001	0.0996	0.0001	0.1003
11	0.0001	0.0855	0.0001	0.0978
12	0.0000	0.0425	0.0001	0.0692
sum	0.0611	0.9389	0.0577	0.9432

参考文献

- [1] Doshi B T. Queueing systems with vacations — A survey[J]. Queueing System, 1986, 1(1): 29–66.
- [2] Takagi H. Queueing Analysis — A Foundation of Performance Evaluation, Vol.1 Vacation and Priority Systems[M]. Amsterdam: North-Holland, 1991.
- [3] 田乃硕. 休假随机服务系统 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
Tian N S. Stochastic Service System with Vacations[M]. Beijing: Peking University Press, 2001.
- [4] 唐应辉, 唐小我. 排队论——基础与分析技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
Tang Y H, Tang X W. Queueing Theory — Foundations and Analysis Technique[M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [5] Servi L D, Finn S G. $M/M/1$ queue with working vacations ($M/M/1/WV$)[J]. Performance Evaluation, 2002, 50(1): 41–52.
- [6] Wu D A, Takagi H. $M/G/1$ queue with multiple working vacations[J]. Performance Evaluation, 2006, 63(7): 654–681.
- [7] Baba Y. Analysis of a $GI/M/1$ queue with multiple working vacations[J]. Operation Research Letters, 2005, 33(2): 201–209.
- [8] Banik A D, Gupta U C, Pathak S S. On the $GI/M/1/N$ queue with multiple working vacations — analytic analysis and computation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2007, 31(9): 1701–1710.
- [9] Li J H, Tian N S. The discrete-time $GI/Geom/1$ queue with working vacations and vacation interruption [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 185 (1): 1–10.
- [10] Hunter J J. Mathematical Techniques of Applied Probability, Vol. II, Discrete Time Models: Techniques and Applications[M]. New York: Academic Press, 1983.
- [11] 孟玉珂. 排队论基础及应用 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1988.
Meng Y K. Foundation of Queueing Theory and Its Applications[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1988.