矩阵方程 $AX + XB + F$ 对称解的递推算法

于 蕾，张凯院
(西北工业大学 应用数学系，陕西 西安 710072)

摘要：提出一种求矩阵方程 $AX + XB = F$ 对称解的递推算法，该算法不仅能够用于对称解存在性的判断问题，而且能够用于对称解的计算问题. 选取特殊的初始矩阵时，该算法能够求出矩阵方程的极小范数对称解，以及对给定的对称矩阵进行最佳逼近的对称解.

关键词：矩阵方程；对称解；最佳逼近解
中图分类号：O151.21　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1007－855X(2005)05－0120－05

Recursive Algorithm of a Linear Matrix Equation $AX + XB = F$ over Symmetric Solutions

YU Lei, ZHANG Kai-yuan
(Dept . of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi an 710072, China)

Abstract: An recursive algorithm to solve the linear matrix equation $AX + XB = F$ over symmetric solutions is put forward in this paper. The algorithm is used not only to determine the solvability of the equation over symmetric solutions, but also to calculate symmetric solutions. The symmetric solutions can be obtained with the algorithm and its least－norm symmetric solution can be given by choosing a special initial matrix. Finally, its optimal approximation solution to a given matrix can be derived.

Key words: matrix equation; symmetric solution; optimal approximation solution

0 引 言

$R^{n\times n}$，$SR^{n\times n}$ 别表示 n 阶实矩阵和实对称矩阵的集合，$\|A\|$ 表示矩阵 A 的 **Frobenius** 范数，$R(A)$ 表示矩阵 A 的值域，$A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积。

矩阵方程 $AX + XB = F$ 的可解性问题已得到了很好的解决[1-3]，但许多工程技术的实际问题(如力学、物理、控制论等)往往要求 X 是对称的，因而考虑其对称解有较大的实际意义，但目前仍未见有人讨论，本节借鉴文献[4]的思想方法，讨论以下问题：

问题 Ⅰ　给定 $A, B, F, R^{n\times n}$，矩阵方程 $AX + XB = F$ 有对称解时，求 $X \in SR^{n\times n}$.

问题 Ⅱ　S_E 令表示问题 Ⅰ 的解集合，求 $X^* X \in S_E$，使得 $\|X^*\| = \min\limits_{X\in S_E}\|X\|$.

问题 Ⅲ　设 $X_0 \in \mathbf{SR}^{n\times n}$，求 $\tilde{X} \in S_E$，使得 $\|\tilde{X} - X_0\| = \min\limits_{X\in S_E}\|X - X_0\|$.

1 求解问题 Ⅰ 的递推算法

基于文献[4]的思想方法，构造求解问题 Ⅰ 的递推算法如下

第一步：任意选取初始矩阵 $X_1 \in \mathbf{SR}^{n\times n}$，计算

$$R_1 = F - AX_1 - X_1B, M_1 = A^TR_1 + R_1B^T, N_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_1^T), k := 1$$

第二步：令

收稿日期：2004－12－23. **基金项目：**国家自然科学基金资助项目(项目编号：2003CG0101).
第一作者简介：于蕾(1980～)，女，在读硕士研究生. 主要研究方向：数值代数. **E－mail：**yuleijk@126.com

$$X_{k+1} = X_k + \frac{\| R_k \|^2}{\| N_k \|^2} N_k \tag{1}$$

第三步:计算

$$R_{k+1} = F - AX_{k+1} - X_{k+1}B, M_{k+1} = A^T R_{k+1} + R_{k+1} B^T \tag{2}$$

$$N_{k+1} = \frac{1}{2}(M_{k+1} + M_{k+1}^T) - \frac{tr(M_{k+1}N_k)}{\| N_k \|^2} N_k \tag{3}$$

若 $R_{k+1} = 0$,或者 $R_{k+1} \neq 0$ 但,$R_{k+1} = 0$ 停止. 否则,令 $k:=k+1$,转向第二步。

显然 ,$N_k \in SR^{n\times n}, X_x \in SR^{n\times n} (k = 1,2,\cdots)$

下面讨论该算法的基本性质,并证明计算过程在有限步之后停止.

定义　设 $P, Q \in SR^{m\times n}$ 若 $tr(P^T Q) = 0$,则称 P 与 Q 正交.

引理1[5]　设 $P \in R^{m\times n}, Q \in R^{n\times m}$,则 $tr(P^T) = tr(P), tr(PQ) = tr(QP)$.

性质1　对于递推算法中的矩阵 R_i, M_i 和 N_i,有

$$tr(R_{i+1}^T R_j) = tr(R_i^T R_j) - \frac{\| R_i \|^2}{\| N_i \|^2} tr(N_i M_j)$$

证明　由(1)~(3)式和引理1可得

$$tr(R_{i+1}^T R_j) = tr[(F - AX_{i+1} - X_{i+1}B)^T R_j]$$

$$tr\{[F - A(X_i + \frac{\| R_i \|^2}{\| N_i \|^2} N_i) - (X_i + \frac{\| R_i \|^2}{\| N_i \|^2} N_i)B]^T R_j\}$$

$$= tr(R_i^T R_j) - \frac{\| R_i \|^2}{\| N_i \|^2} tr(N_i^T A^T R_j + B^T N_{Ti} R_j)$$

$$= tr(R_i^T R_j) - \frac{\| R_i \|^2}{\| N_i \|^2} tr[N_i^T (A^T R_j + R_j B^T)] = tr(R_i^T R_j) - \frac{\| R_i \|^2}{\| N_i \|^2} tr(N_i M_j)$$

性质2　设 $k \geq 2$,对于递推算法中的矩阵 R_i 和 N_i,有

$$tr(R_i^T R_j) = 0, tr(N_i^T N_j) = 0 \quad (i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,k) \tag{4}$$

证明　采用归纳法证明. 对于 $k=2$,由性质1可得

$$tr(R_2^T R_1) = \| R_1 \|^2 - \frac{\| R_1 \|^2}{\| N_1 \|^2} tr(N_1 \frac{M_1 + M_1^T}{2}) = \| R_1 \|^2 - \frac{\| R_1 \|^2}{\| N_1 \|^2} tr(N_1^T N_1) = 0$$

$$tr(N_2^T N_1) = tr[(\frac{M_2 + M_2^T}{2} - \frac{tr(M_2 N_1)}{\| N_1 \|^2} N_1)^T N_1]$$

$$= tr(\frac{M_2 + M_2^T}{2} N_1) - \frac{tr(M_2 N_1)}{\| N_1 \|^2} tr(N_1^T N_1) = tr(\frac{M_2 + N_1 + (M_2 N_1)^T}{2}) - tr(M_2 N_1) = 0$$

假定 $k = s(s > 2)$ 时(4)式成立,则当 $k = s+1$ 时,由(3)式及性质1可得

$$tr(R_{s+1}^T R_s) = tr(R_s^T R_s) - \frac{\| R_s \|^2}{\| N_s \|^2} tr(N_s M_s) = \| R_s \|^2 - \frac{\| R_s \|^2}{\| N_s \|^2} tr(N_s^T \frac{M_s^T M_s^T}{2})$$

$$= \| R_s \|^2 - \frac{\| R_s \|^2}{\| N_s \|^2} tr[(N_s^T N_s) + \frac{tr(M_s N_{s-1})}{\| N_{s-1} \|^2} (N_s^T N_{s-1})] = \| R_s \|^2 - \frac{\| R_s \|^2}{\| N_s \|^2} tr(N_s^T N_s) = 0$$

$$tr(N_{s+1}^T N_s) = tr[\frac{(M_{s+1} + M_{s+1}^T}{2} - \frac{tr(M_{s+1} N_s)}{\| N_s \|^2} N_s)^T N_s]$$

$$= tr(\frac{M_{s+1} + M_{s+1}^T}{2} N_s) - \frac{tr(M_{s+1} N_s)}{\| N_s \|^2} tr(N_s^T N_s) = tr[\frac{M_{s+1} N_s + (M_{s+1} N_s)^T}{2} - tr(M_{s+1} N_s) = 0$$

$$tr(R_{s+1}^T R_1) = tr(R_s^T R_1) - \frac{\| R_s \|^2}{\| N_s \|^2} tr(N_s M_1) = -\frac{\| R_s \|^2}{\| N_s \|^2} tr(N_s \frac{M_1 + M_1^T}{2}) = 0$$

对于 $j = 2,3,\cdots,s-1$,有

$$tr(\boldsymbol{R}_{s+1}^T\boldsymbol{R}_j) = tr(\boldsymbol{R}_s^T\boldsymbol{R}_j) - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}tr(\boldsymbol{N}_s\boldsymbol{M}_j) = -\frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}tr(\boldsymbol{N}_s\frac{\boldsymbol{M}_j+\boldsymbol{M}_j^T}{2})$$

$$= -\frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}tr[\boldsymbol{N}_s(\boldsymbol{N}_j + \frac{tr(\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{N}_{j-1})}{\|\boldsymbol{N}_{j-1}\|^2}\boldsymbol{N}_{j-1} = -\frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}tr[(\boldsymbol{N}_s^T\boldsymbol{N}_j) + \frac{tr(\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{N}_{j-1})}{\|\boldsymbol{N}_{j-1}\|^2}(\boldsymbol{N}_s^T\boldsymbol{N}_{j-1}) = 0$$

对于于 $j = 2,3,\cdots,s-1$,有

$$tr(\boldsymbol{N}_{s+1}^T\boldsymbol{N}_j) = tr(\frac{\boldsymbol{M}_{s+1}+\boldsymbol{M}_{s+1}^T}{2}\boldsymbol{N}_j) - \frac{tr(\boldsymbol{M}_{s+1}\boldsymbol{N}_s}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2})tr(\boldsymbol{N}_s^T\boldsymbol{N}_j) = tr(\boldsymbol{M}_{s+1}\boldsymbol{N}_j) = tr(\boldsymbol{N}_j\boldsymbol{M}_{s+1})$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{N}_j\|^2}{\|\boldsymbol{R}_j\|^2}tr[(\boldsymbol{R}_j^T\boldsymbol{R}_{s+1}) - (\boldsymbol{R}_{j+1}^T\boldsymbol{R}_{s+1})] = \frac{\|\boldsymbol{N}_j\|^2}{\|\boldsymbol{R}_j\|^2}tr[(\boldsymbol{R}_{s+1}^T\boldsymbol{R}_j) - (\boldsymbol{R}_{s+1}^T\boldsymbol{R}_{j+1})] = 0$$

根据矩阵迹的性质可得

$$tr(\boldsymbol{R}_j^T\boldsymbol{R}_{s+1}) = tr(\boldsymbol{R}_{s+1}^T\boldsymbol{R}_j) = 0, tr(\boldsymbol{N}_j^T\boldsymbol{N}_{s+1}) = tr(\boldsymbol{N}_{s+1}^T\boldsymbol{N}_j) = 0\ (j = 1,2,\cdots,s)$$

因此,(4) 式对 $k = s+1$ 成立. 由归纳法原理知,(4) 式成立.

性质 3 假定 $\boldsymbol{X}$ 是问题 Ⅰ 的任意一个解,则

$$tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_k)\boldsymbol{N}_k] = \|\boldsymbol{R}_k\|^2 \quad (k = 1,2,\cdots) \tag{5}$$

证明 采用归纳法证明. 易见 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_k(k = 1,2,\cdots)$ 均为对称矩阵. 对于 $k = 1$,由引理 1 可得

$$tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{N}_1] = tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\frac{\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_1^T}{2}] = tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{M}_1] = tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{B}^T)]$$

$$= tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R}_1 + (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{B}^T] = tr\{[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)]^T\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_1[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{B}]^T\}$$

$$= tr[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1) + (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{B}]^T\boldsymbol{R}_1\} = tr[(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{R}_1] = tr(\boldsymbol{R}_1^T\boldsymbol{R}_1) = \|\boldsymbol{R}_1\|^2$$

即 $tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{N}_1] = \|\boldsymbol{R}_1\|^2$. 假定 $k = s(s>2)$ 时(5) 式成立,$k = s+1$ 则当时,由(1) ~ (3) 式及引理 1 可得

$$tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{N}_s] = tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_s - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}\boldsymbol{N}_s)\boldsymbol{N}_s] = \|\boldsymbol{R}_s\|^2 - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}tr(\boldsymbol{N}_s^T\boldsymbol{N}_s) = 0$$

$$tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{N}_{s+1}] = tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\frac{\boldsymbol{M}_{s+1}+\boldsymbol{M}_{s+1}^T}{2} - (\frac{tr(\boldsymbol{M}_{s+1}\boldsymbol{N}_s)}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}\boldsymbol{N}_s)]$$

$$= tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{M}_{s+1}] - \frac{tr(\boldsymbol{M}_{s+1}\boldsymbol{N}_s)]}{\|\boldsymbol{N}_s\|^2}tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{N}_s] = tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{M}_{s+1}]$$

$$= tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R}_{s+1}+\boldsymbol{R}_{s+1}\boldsymbol{B}^T)] = tr[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{R}_{s+1} + (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{R}_{s+1}\boldsymbol{B}^T]$$

$$= tr\{[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})]^T\boldsymbol{R}_{s+1} + \boldsymbol{R}_{s+1}[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1}\boldsymbol{B}]^T\} = tr[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1}) + (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_{s+1})\boldsymbol{B}]^T\boldsymbol{R}_{s+1}\}$$

$$= tr\{[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{s+1} - \boldsymbol{X}_{s+1}\boldsymbol{B}]^T\boldsymbol{R}_{s+1}\} = tr(\boldsymbol{R}_{s+1}^T\boldsymbol{R}_{s+1}) = \|\boldsymbol{R}_{s+1}\|2$$

由归纳法原理知(5) 式成立.

定理 1 若问题 Ⅰ 相容,则对任意初始 $\boldsymbol{X}_1 \in \boldsymbol{SR}^{n\times n}$ 矩阵,问题 Ⅰ 的解均可在有限步计算之后得到.

证明 如果 $\boldsymbol{R}_i \neq 0$,由性质 3 知相应的 $\boldsymbol{N}_i \neq 0(i = 1,2,\cdots,n^2)$,按照递推算法得到 $\boldsymbol{X}_{n^2+1}$ 和 $\boldsymbol{R}_{n^2+1}$,结合性质 2 知 $tr(\boldsymbol{R}_{n^2+1}^T\boldsymbol{R}_i = 0)$,$tr(\boldsymbol{R}_j^T\boldsymbol{R}_j) = 0(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,n^2)$ $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_{n^2}$ 是矩阵空间 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 中的一组正交基,这就意味着 $\boldsymbol{R}_{n^2+1} = 0$,从而是 $\boldsymbol{X}_{n^2+1}$ 问题 Ⅰ 的解. 因此问题 Ⅰ 相容时,其解最多在 n^2 步计算之后得到.

定理 2 问题 Ⅰ 不相容的充要条件是存在正整数 k,使得

$\boldsymbol{R}_k \neq 0$, 而 $\boldsymbol{N}_k = 0$

证明 若存在正整数 k,使得 $\boldsymbol{R}_k \neq 0$,而 $\boldsymbol{N}_k = 0$,由性质 3 知相应的 $\boldsymbol{N}i \neq 0$. 按照递推算法得 $\boldsymbol{X}_{n^2+1}$ 和 $\boldsymbol{N}_{n^2+1}$,结合性质 2 有 $tr(\boldsymbol{N}_{n^2+1}^T\boldsymbol{N}_s) = 0$,$tr(\boldsymbol{N}_s^T\boldsymbol{N}_t) = 0(s \neq t; s,t = 1,2,\cdots,n^2)$ 故 $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\cdots,\boldsymbol{N}_{n^2}$ 是矩阵空间 $\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 中的一组正交基,这就意味着 $\boldsymbol{N}_{n^2+1} = 0$,由性质 3 知 $\boldsymbol{R}_{n^2+1} = 0$,从而 $\boldsymbol{X}_{n^2+1}$ 就是问题 Ⅰ 的解,就与问题 Ⅰ 不相容矛盾. 因此,必存在正整数 k,使得由递推算法得到的 $\boldsymbol{R}_k \neq 0$,而 $\boldsymbol{N}_k = 0$.

2 问题 Ⅱ 的解

引理 2[5] 若方程组 $\boldsymbol{My} = \boldsymbol{b}$ 相容,则有解 $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M}^T)$,且 $\boldsymbol{y}_0$ 是其极小范数解.

定理 3　若问题 Ⅰ 相容,取初始矩阵 $X_1 = A^T B^T + H^T B^T + BH + HA(H \in R^{n\times n})$,则按照递推算法可在有限步计算后得到问题 Ⅱ 的解.

证明　由递推算法和定理 1 知,若取 $X_1 = A^T B^T + H^T B^T + BH + HA(H \in R^{n\times n})$(任意),则在有限步计算之后得到 $AX + XB = F$ 的对称解 X^*,由数学归纳法可以证明 X^* 具有形式 $X^* = A^T Y^T + Y^T B^T + BY + YA(Y \in R^{n\times n})$. 下面证明 X^* 是问题 Ⅱ 的解. 考虑矩阵方程

$$AX + XB = F, B^T X + XA^T = F^T \tag{6}$$

若问题 Ⅰ 有解 $Z \in SR^{n\times n}$,则 $Z^T = Z, AZ + ZB = F$,并且 $B^T Z + ZA^T = F^T$,因此,方程(6) 有解 Z. 反之,若方程(6) 有解 $Z \in R^{n\times n}$,即 $AZ + ZB = F, B^T Z + ZA^T = F^T$,令 $Z_0 = (Z + Z^T)/2, Z \in SR^{n\times n}$,且 $AZ_0 + Z_0 B = F$,因此 Z_0,是问题 Ⅰ 的解. 综上所述,问题 Ⅰ 有解的充要条件是方程(6) 有解,且问题 Ⅰ 的解必是方程(6) 的解. 记方程(6) 的解集合为 $S_E^{'}$,则 $S_E \subset S_E^{'}$. 为证明 X^* 是问题 Ⅰ 的极小范数对称解(即问题 Ⅱ 的解),只需证明是方程(6) 的极小范数解

记 $\overline{\mathrm{vec}}(X) = x, \overline{\mathrm{vec}}(Y^T) = y_1, \overline{\mathrm{vec}}(X^*) = x^*, \overline{\mathrm{vec}}(Y^T) = y_1, \overline{\mathrm{vec}}(Y) = y_2, \overline{\mathrm{vec}}(F^T) = f_1, \overline{\mathrm{vec}}(F^T) = f_2$,则方程(6) 等价于.

$$\begin{bmatrix} A \otimes I + I \otimes B^T \\ B^T \otimes I + I \otimes A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

注意到

$$\begin{aligned} x^* &= \overline{\mathrm{vec}}(A^T Y^T + Y^T B^T + BY + YA) = (A^T \otimes I + I \otimes B) y_1 + (B \otimes I + I \otimes A^T) y_2 \\ &= \begin{bmatrix} A \otimes I + I \otimes B^T \\ B^T \otimes I + I \otimes A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in R\left(\begin{bmatrix} A \otimes I + I \otimes B^T \\ B^T \otimes I + I \otimes A \end{bmatrix}^T \right) \end{aligned}$$

由引理 2 知 x^* 是方程(7) 的极小 2 − 范数解,因为算子 $\overline{\mathrm{vec}}$ 是同构的,所以 x^* 是方程(6) 的极小 F − 范数解,从而是问题 Ⅰ 的极小 F − 范数对称解,即问题 Ⅱ 的解.

由上述定理知,应用本节构造的递推算法,对任意 $x_1 \in SR^{n\times n}$ 初始矩阵,若存在正整数 k,使得 $R_k \neq O$,而 $N_k = O$,则问题 Ⅰ 不相容,即矩阵方程 $AX + XB = F$ 无对称解;若问题 Ⅰ 相容,则对任意初始矩阵 $X_1 \in SR^{n\times n}$,均可在有限步计算之后得到问题 Ⅰ 的解 $X_\in SR^{n\times n}$,特别地,取 $X_1 = A^T H^T + H^T B^T + BH + HA(H \in R^{n\times n})$,可求得问题 Ⅱ 的解 X^*.

3 问题 Ⅲ 的解

问题 Ⅰ 相容时,S_E 非空. 若 $X \in S_E \subset SR^{n\times n}$,对给定矩阵 $X_0 \in SR^{n\times n}$,有

$$\| X - X_0 \|^2 = \left\| \left(X - \frac{X_0 + X_0^T}{2}\right) - \frac{X_0 - X_0^T}{2} \right\|^2 = \left\| X - \frac{X_0 + X_0^T}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{X_0 - X_0^T}{2} \right\|^2$$

令 $\hat{X} = X - X_0, \hat{F} = F - AX_0 - X_0 B$ 有 $AX + XB = F \Leftrightarrow A\hat{X} + \hat{X}B = \hat{F}$,于是求解问题 Ⅲ 就等价于求解矩阵方程 $A\hat{X} + \hat{X}B = \hat{F}$. 当 $A\hat{X} + \hat{X}B = \hat{F}$ 存在对称解时,用本节构造的递推算法,取 $\hat{X} = A^T H^T + H^T B^T + BH + HA(H \in R^{n\times n})$,由第 1、2 节的讨论可求其极小范数对称解 $\hat{X}^*$,于是得到问题 Ⅲ 的解 $\tilde{X} = \hat{X}^* + X_0$

4 数值算例

例 1　用本文构造的递推算法求矩阵方程 $AX + XB = F$ 的对称解、极小范数对称解及矩阵 X_0 的最佳逼近矩阵,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -9 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}, B = A^T, F = \begin{pmatrix} 20 & 24 & -20 & 53 \\ 24 & 30 & 7 & 26 \\ -20 & 7 & -36 & 9 \\ 53 & 26 & 9 & 62 \end{pmatrix}$$

终止准则 $\| R_k \| < 1.0e - 10$

1)求对称解. 初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1 \in \boldsymbol{SR}^{n\times n}$ 和有关计算结果如下

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1.27 & 0.27 & 0.21 \\ 1.27 & 2.73 & 0.56 & 0.58 \\ 0.27 & 0.56 & 3.38 & -2.42 \\ 0.21 & 2.58 & -2.42 & -0.58 \end{pmatrix}, \| \boldsymbol{F}_{12} \| = 2.95e-11$$

矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{F}$ 的对称解为 $\boldsymbol{X}_{12}$.

2)求极小范数对称解. 初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}^T B^T + \boldsymbol{BH} + \boldsymbol{HA}$ 和有关计算结果如下

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0.30 & -0.70 & 0.19 \\ 0.30 & 1.37 & -1.31 & 2.62 \\ -0.70 & -1.31 & 1.37 & -2.38 \\ 0.19 & 2.26 & -2.38 & -0.62 \end{pmatrix}, \| \boldsymbol{R}_{13} \| = 1.85e-11$$

矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{F}$ 的极小范数对称解为 $\boldsymbol{X}_{13}$. 取 $\boldsymbol{H}=0$ 则初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1=0$,求得矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{F}$ 的极小范数对称解为 $\boldsymbol{X}_{12}=\boldsymbol{X}_{13}$,且 $\|\boldsymbol{R}_{12}\|=1.87e-11$.

3)矩阵 $\boldsymbol{X}_0$ 的最佳逼近矩阵. 令 $\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0$,$\hat{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{AX}_0-\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{B}$,取初始矩阵 $\hat{\boldsymbol{X}}_1=0$,求方程 $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}+\hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{F}}$ 的极小范数对称解 $\hat{\boldsymbol{X}}^*$,有关计算结果如下

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{X}}^* = \hat{\boldsymbol{X}}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -2.58 & -0.58 & -2.18 \\ -2.58 & -0.71 & -0.29 & 0.36 \\ -0.58 & -0.29 & 4.12 & 1.36 \\ -2.18 & 0.36 & 1.36 & -0.36 \end{pmatrix},$$

$\|\boldsymbol{R}_{12}\|=1.09e-12$ 因此,给定矩阵 $\boldsymbol{X}_0$ 的最佳逼近矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \hat{\boldsymbol{X}}^* + \boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0.42 & -0.58 & -0.18 \\ 0.42 & 0.29 & -2.29 & 3.36 \\ -0.58 & -2.29 & 4.12 & 1.36 \\ -0.18 & 3.36 & -1.64 & -1.36 \end{pmatrix}$$

例2 用文本提出的递推算法讨论矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{F}$ 是否存在对称解.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 30 & 23 & 2 \\ -13 & 24 & -12 \\ 10 & -2 & 28 \end{pmatrix}$$

终止准则 $\|\boldsymbol{R}_k\| < 1.0_e-10$ 取 $\boldsymbol{X}_1=0$,当 $\|\boldsymbol{R}_6\|=4.91_e-11$ 时,$\|\boldsymbol{R}_6\|=164.2$ 时,根据定理2知该矩阵方程无对称解.

5 结 论

提出了一种求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{F}$ 对称解的递推算法,该算法不仅能够用于对称解存在性的判断问题,而且当对称解存在时,也能够用于对称解的计算问题。选取特殊的初始矩阵,该算法还能够得到矩阵方程的极小范数对称解,以及能够对给定的对称矩阵进行最佳逼近的对称解。

参考文献:

[1] Jameson A. Solution of the Equation $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$by Inversion of an $M\times M$ or $N\times N$ Matrix. SIAM J. Appl. Math[J]. 1968,(16):1020~1023.

[2] Eurice de Souza,Bhattacharyya S P. Controllability,Observability and the Solution of $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$. Linear Algebra Appl[J]. 1981,(39):167~188.

[3] John Jones J K, Lew C. Solutions of Liapuonv Matrix Equation $\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1982,AC-27:464~466.

[4] 姚健康. 求解相容的矩阵方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{XB}_1=\boldsymbol{D}_1$,$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{XB}_2=\boldsymbol{D}_2$ 的一种迭代法[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2001, 24(1): 6~10.

[5] 程云鹏,张凯院,徐仲. 矩阵论(第二版)[M]. 西安: 西北工业大学出版社,1999.