时序残差 GM (1, 1) 模型°

李希灿[1]　李　丽[2]

[1](山东水利专科学校, 山东 泰安 271000)
[2](山东省滨州市节水办, 山东 滨州 256612)

摘要　顾及时序残差对灰色 $x^{(0)}$ -GM (1, 1) 模型精度的影响, 提出时序残差 $\epsilon_t^{(0)}$ -GM (1, 1) 模型, 并利用时序残差 $\epsilon_t^{(0)}$ -GM (1, 1) 模型和 $x^{(0)}$ -GM (1, 1) 模型联合进行精度检验和预测, 能较好地提高模型精度和预测精度, 实例说明是有效的。

关键词　$x^{(0)}$ -GM (1, 1)　$\epsilon_t^{(0)}$ -GM (1, 1)　时序残差　序列

GM (1, 1) Model of Time Sequence Error

Li Xican[1]　Li Li[2]

[1](Shandong Hydraulic Engineering Institute, Tai'an 271000)
[2](Shandong Binzhou City Water-saving Office, Binzhou 256612)

Abstract　$\epsilon_t^{(0)}$ -GM (1, 1) model of time sequence error has been put forward according to the influence of $x^{(0)}$ -GM (1, 1) model precision by time sequence error, $\epsilon_t^{(0)}$ -GM (1, 1) and $x^{(0)}$ -GM (1, 1) models are used to test model precision and forecast. An example is employed to show that the precision of model and prediction could be raised effectively.

Keywords　$x^{(0)}$ -GM (1, 1); $\epsilon_t^{(0)}$ -GM (1, 1); time sequence error; sequence

1　引言

在灰色预测中, 较为常用的是 GM (1, 1) 模型。模型精度高低是决定模型是否可靠的重要依据, 也直接影响着预测值的精度。对于已知的数据序列 $x^{(0)}$, 建立 GM (1, 1) 模型, 模型误差一般是不可避免的, 尤其是原始数据序列波动较大时, 或建模条件不是很好时, 模型精度就较低。对于给定的数据序列建模, 就模型形式而言 GM (1, 1) 模型是一个连续函数, 模型参数 $\hat{a} = (a, u)^T$ 决定模型结构, 自变量 k 决定系统输出。显然, 影响模型精度的因素应包括两个方面。一是模型参数 $\hat{a}$, 而 $\hat{a}$ 对于已知的数据序列为定值, 当 $\Delta t = \text{const} = 1$ 时, GM (1, 1) 模型就已确定。为了提高模型精度, 文献[1, 2]提出了残差 GM (1, 1) 模型, GM (1, 1) 加权模型, GM (1, 1) 模型群等, 显然这些模型均是对 x 序列进行修正, 这种处理不妨称之为"X - 过滤", 如图 1 (a)。另一方面是输入变量 k, 在 GM (1, 1) 模型 $\hat{a}$ 确定时, 如果假设 k 是灰数 $\otimes k$, 那么就可以想办法找到白化值 $\tilde{\otimes}(k)$, 使 GM (1, 1) 模型拟合精度提高。基于这种思想的处理称为"k- 过滤", 如图 1 (b)。

图 1 中物理含义是, 假设 GM (1, 1) 模型是一个供水调度系统, 图 1 (a) 就如来水 $x^{(0)}$ 经系统调度后, 发现不能满足供水需求, 必须再经过其它方式"补济"调节才能满足需水; 而图 1 (b) 是通过调节供水时间从而满足用水需要。基于这种"k- 过滤"思想, 针对非本征性系统, 波动较大的时间数据序列, 本文提出时序残差 GM (1, 1) 模型。

2　数学模型

° 本文于 1997 年月 3 日 24 收到

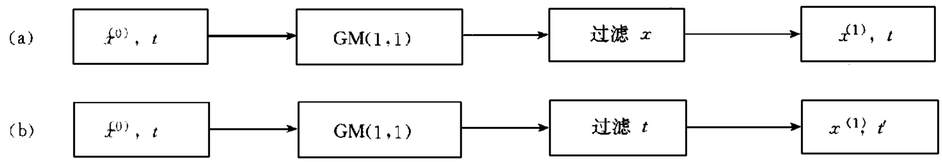

图 1

2.1 建立 $x^{(0)}$-GM (1, 1) 模型

设时间数据序列 $x^{(0)}$

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \{x(t) \mid t = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\} \end{aligned} \tag{1}$$

对 $x^{(0)}$ 作一次累加生成(1-AGO), 即令

$$x^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{t} x^{(0)}(k)$$

即

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \{x^{(1)}(t) \mid t = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)\} \\ &= \{x^{(0)}(1), \sum_{k=1}^{2} x^{(0)}(k), \cdots, \sum_{k=1}^{n} x^{(0)}(k)\} \end{aligned} \tag{2}$$

设微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u \tag{3}$$

式中

$$\hat{a} = (a, u)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \tag{4}$$

$$Y_N = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \cdots, x^{(0)}(n)]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} Z(2) & 1 \\ Z(3) & 1 \\ & \vdots \\ Z(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad Z(k) = -\frac{1}{2}[x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)]$$

求出 $\hat{a}$ 后解(3)式得

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}\right) e^{-a(t-1)} + \frac{u}{a} \tag{5}$$

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1) \tag{6}$$

$$e(t) = \frac{x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)}{x^{(0)}(t)} \% \tag{7}$$

其中, $t = 1, 2, \cdots, n$

(5)式是根据原始数据序列建立起来的, 不妨称为 $x^{(0)}$-GM (1, 1) 模型。(6), (7)式用于模型(5)式精度检验计算。

2.2 建立 $\epsilon_t^{(0)}$-GM (1, 1) 模型

利用(5)～(7)式计算, $x^{(0)}$-GM (1, 1) 模型通常存在一定的误差。其原因有两方面: 一是模型本身精度不高; 二是与时序 t 按等时距处理有关。(5)式是一个连续函数形式, 且是时序 t 的函数, 因此给定任一时刻总能计算 $\hat{x}^{(1)}(t)$。如果假设利用(5), (6)式计算 $\hat{x}^{(0)}$ 不存在误差, 即要求

$$\hat{x}^{(0)} = x^{(0)} \tag{8}$$

显然, 只有认为时序 t 存在残差 ϵ_t, 才能满足这一假设。令

$$t_\epsilon = t + \epsilon_t \tag{9}$$

$$\hat{x}^{(0)} = x^{(0)} \Rightarrow \hat{x}^{(1)}(t_\epsilon) = x^{(1)}(t)$$

$$\hat{x}^{(1)}(t_\epsilon) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}\right) e^{-a(t_\epsilon - 1)} + \frac{u}{a} \tag{10}$$

利用(2), (10)式计算 t_ϵ

$$t_\epsilon = 1 + \frac{1}{a} \ln \frac{x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}}{x^{(1)}(t) - \frac{u}{a}} \tag{11}$$

$$\epsilon_t = t_\epsilon - t \tag{12}$$

由(11), (12)式得时序残差序列 $\epsilon_t^{(0)}$

$$\begin{aligned} \epsilon_t^{(0)} &= \{\epsilon_t^{(0)}(k) \mid k = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \{\epsilon_t^{(0)}(1), \epsilon_t^{(0)}(2), \cdots, \epsilon_t^{(0)}(n)\} \end{aligned} \tag{13}$$

利用 GM (1, 1) 建模方法, 建立时序残差序列 $\epsilon_t^{(0)}$ 的 GM (1, 1) 模型, 不妨称之为 $\epsilon_t^{(0)}$-GM (1, 1) 模型。即

$$\hat{\epsilon}_t^{(1)}(k) = \left(\epsilon_t^{(0)}(1) - \frac{u_t}{a_t}\right) e^{-a_t(k-1)} + \frac{u_t}{a_t} \tag{14}$$

$$\hat{\epsilon}_t^{(0)}(k) = \hat{\epsilon}_t^{(1)}(k) - \hat{\epsilon}_t^{(1)}(k-1) \tag{15}$$

一般情况下, GM (1, 1) 模型注重序列 $x^{(0)}$ 原点的精度, 利用(14), (15)式建立 $\epsilon_t^{(0)}$-GM (1, 1) 模型时, 并不必要用全部的 $\epsilon_t^{(0)}$ 序列, 而是用包含 $x^{(0)}$ 原点的时序残差序列 $\epsilon_t^{\prime(0)}$ 建模。

通过(11), (12)式求得的时序残差序列 $\epsilon_t^{(0)}$, 可能不适合直接建立 GM (1, 1) 模型。这里有两种情况: 第一种情况: $\epsilon_t^{(0)}$ 序列不是非负的; 第二种情况: 既使 $\epsilon_t^{(0)}$ 是非负的, 但其一次累加后的值可能不呈现递增的情况, 即不是微分方程模型可以表达的。具体处理方法请参见文献[7]。

若时序残差 $\epsilon_t^{(0)}$ 中存在负的残差, 本文提出适当加一常数 b 把 $\epsilon_t^{(0)}$ 序列变为非负的 $\epsilon_{t_1}^{(0)}$, 然后利用(14), (15)式求 $\hat{\epsilon}_{t_1}^{(0)}$, 再将 $\hat{\epsilon}_{t_1}^{(0)}$ 还原为 $\hat{\epsilon}_t^{(0)}$, 即

$$\begin{aligned} &f_1: \epsilon_t^{(0)} \to \epsilon_{t_1}^{(0)}\{\epsilon_{t_1}^{(0)} = \epsilon_t^{(0)} + b\} \\ &f_2: \epsilon_{t_1}^{(0)} \to \epsilon_{t_1}^{(0)}\text{-GM}(1,1) \to \hat{\epsilon}_{t_1}^{(0)} \\ &f_3: \hat{\epsilon}_{t_1}^{(0)} \to \hat{\epsilon}_t^{(0)}\{\hat{\epsilon}_t^{(0)} = \hat{\epsilon}_{t_1}^{(0)} - b\} \end{aligned} \tag{16}$$

2.3　利用 $\hat{\epsilon}_t^{(0)}$ 求 $\hat{x}_\epsilon^{(0)}$ 并检验模型精度

设

$$\hat{t}_\epsilon(t) = t + \hat{\epsilon}_t^{(0)} \tag{17}$$

将 $\hat{t}_\epsilon(t)$ 代入(5)式

$$\hat{x}_\epsilon^{(1)}(\hat{t}_\epsilon(t)) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}\right) e^{-a(\hat{t}_\epsilon(t) - 1)} + \frac{u}{a} \tag{18}$$

仿(6), (7) 式得还原及检验精度公式

$$\hat{x}_\epsilon^{(0)}(t) = \hat{x}_\epsilon^{(1)}(\hat{t}_\epsilon(t)) - \hat{x}_\epsilon^{(1)}(\hat{t}_\epsilon(t-1)) \tag{19}$$

$$e(t) = \frac{x^{(0)}(t) - \hat{x}_\epsilon^{(0)}(t)}{x^{(0)}(t)} \% \tag{20}$$

2.4　预测计算

利用(14), (15)式, 首先求出 $n+i\,(i \geq 1)$ 时刻的残差 $\hat{\epsilon}_t^{(0)}(n+i)$, 由(17)式知

$$\hat{t}_\epsilon(n+i) = n + i + \hat{\epsilon}_t^{(0)}(n+i) \tag{21}$$

利用(18), (19)式求预测值, 即

$$\hat{x}_\epsilon^{(1)}[\hat{t}_\epsilon(n+i)] = \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}\right] e^{-a[\hat{t}_\epsilon(n+i) - 1]} + \frac{u}{a} \tag{22}$$

$$\hat{x}_\epsilon^{(0)}(n+i) = \hat{x}_\epsilon^{(1)}[\hat{t}_\epsilon(n+i)] - \hat{x}_\epsilon^{(1)}[\hat{t}_\epsilon(n+i-1)] \tag{23}$$

本文提出的时序残差 GM (1, 1) 模型是针对非本征性系统的, 但原则上可用于本征性系统, 此时“时序

残差’就没有物理意义, 计算结果仍具有实用价值。

3 实例计算

某水库一个时期的分时段调度水量如表 1。

表 1 $x^{(0)}$序列表

时序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
水量	5	20	40	25	40	45	35	21	14	18	15.5	17	15

首先利用表 1 资料, 用式(2)～(5)建立 $x^{(0)}$-GM (1, 1)模型, 即

$$\hat{x}^{(1)}(t) = -567.9990831e^{-0.0648587(t-1)} + 572.9990831$$

利用(6), (7)式进行精度检验, 计算结果列于表 2。

表 2 检验精度计算表

序 号	$\hat{x}^{(0)}(k)$	$x^{(0)}(k)$	$\Delta Q(k)$	$e(k)$%
2	35.6704	20	-15.6704	-78.35
3	33.4303	40	6.5697	16.42
4	31.3308	25	-6.3308	-25.32
5	29.3632	40	10.6368	26.59
6	27.5192	45	17.4808	38.84
7	25.7910	35	9.2090	26.31
8	24.1714	21	-3.1714	-15.10
9	22.6534	14	-8.6534	-61.31
10	21.2307	18	-3.2307	-17.94
11	19.8974	15.5	-4.3974	-28.37
12	18.6479	17	-1.6479	-9.69
13	17.4768	15	-2.4768	-16.51

可见 $x^{(0)}$-GM (1, 1)模型精度较低。

由(11), (12)式求时序残差序列, 见表 3。

表 3 时序残差序列表

时序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\hat{t}_\epsilon$	1	1.553	2.721	3.499	4.832	6.484	7.903	8.822	9.466	10.336	11.127	12.044	12.901
$\epsilon^{(0)}$	0	-0.447	-0.279	-0.501	-0.168	+0.484	0.903	0.822	0.466	0.336	0.127	0.044	-0.099

取 $\epsilon^{(0)}$中后 5 个残差作为 $\epsilon_1^{(0)}$序列, 即

$$\epsilon_1^{(0)} = \{0.466,\ 0.336,\ 0.127,\ 0.044,\ -0.099\}$$

因 $\epsilon_1^{(0)}$中存在负数, 作不是非负处理, 即将残差序列 $\epsilon_1^{(0)}$由式(16)变为非负序列, 取 $b=1$, 则

$$\epsilon_2^{(0)} = \{\epsilon_1^{(0)} + b\}$$

$$= \{1.466,\ 1.336,\ 1.127,\ 1.044,\ 0.901\}$$

建立 $\epsilon_2^{(0)}$-GM (1, 1)模型, 由式(14)～(16)计算得:

$$\hat{\epsilon}_2^{(1)}(k) = -11.04656413e^{-0.1271186(k-1)} + 12.51256413$$

$$\hat{\epsilon}_2^{(0)} = \{1.466,\ 1.3186,\ 1.1612,\ 1.0226,\ 0.9005\}$$

$$\hat{\epsilon}_1^{(0)} = \{\hat{\epsilon}_2^{(0)} - b\}$$

$$= \{0.466,\ 0.3186,\ 0.1612,\ 0.0226,\ -0.0995\}$$

$$\hat{t}_{\epsilon}(t) = t + \hat{\epsilon}_{t_1}^{(0)}$$
$$= \{9.466,\ 10.3186,\ 11.1612,\ 12.0226,\ 12.9005\}$$

由(18)～(20)式计算 $\hat{x}_{\epsilon}^{(0)}$, 并计算 $\hat{x}_{\epsilon}^{(0)}$ 相对 $x^{(0)}$ 的误差, 结果见表 4。

表 4　检验精度计算表

序　号	$\hat{x}_{\epsilon}^{(0)}$	$x^{(0)}$	$x^{(0)} - \hat{x}_{\epsilon}^{(0)}$	$e(k)$%
10	17.64	18	0.36	2.00
11	16.50	15.5	-1.0	-6.45
12	16.0	17	+1.0	+5.88
13	15.38	15	-0.38	-2.53

由表 2 与表 4 对比可见, 时序残差 GM (1, 1) 模型具有较高的精度。

4　结语

本文从影响 GM (1, 1) 模型精度的因素出发, 提出了顾及时序残差对 GM (1, 1) 模型精度影响的时序残差 GM (1, 1) 模型。这符合“灰色系统理论的研究对象信息不完全, 准则具有多重性, 模型非唯一性”的特点。时序残差 GM (1, 1) 模型, 关键在于建立精度较高的 $\epsilon^{(0)}$-GM (1, 1) 模型, 即如何使 $\otimes(t)$ 白化, 本文提出了寻找 $\otimes(t)$ 白化值 $\tilde{\otimes}(t)$ 的一种方法。显然, $\otimes(t)$ 白化方法有待进一步研究。

参 考 文 献

1　邓聚龙. 灰色系统(社会·经济). 武汉: 华中理工大学出版社, 1982
2　傅立. 灰色系统理论及其应用. 北京: 科学技术出版社, 1992
3　邓聚龙. 灰色预测与决策. 武汉: 华中理工大学出版社, 1988
4　邓聚龙. 灰色系统理论教程. 武汉: 华中理工大学出版社, 19890
5　邓聚龙. 灰色系统基本方法. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992
6　邓聚龙. 多维灰色规划. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990
7　邓聚龙. 灰色控制系统. 武汉: 华中理工大学出版社, 1988