稳态大系统中关联平衡法的改进*

钱富才　万百五

(西安交通大学系统工程研究所, 西安 710049)

摘要　对于子系统的性能指标按一定顺序耦合的稳态大系统, 本文采用两级递阶优化控制算法。利用上下级之间的纵向信息交换对子系统之间的关联进行解耦, 利用子系统之间的横向信息传递对目标函数进行解耦, 这种方法是对关联平衡法的改进, 从而, 解决了一类不可分的稳态优化问题, 仿真效果好。

关键词　大系统　稳态优化　递阶控制

Improving on Interaction Balance Method in Steady State Large Scale Systems

Qian Fucai　Wan Baiwu

(Institute of Systems Engineering, Xian Jiaotong University, Xian 710049)

Abstract　This paper adopts two level hierarchical optimization control algorithm for steady state large scale systems that performance indices exist interaction as order. Through information exchanging between above and inferior level, the interaction of subsystems is solved. Through information sending among subsystems, the interaction of performance indices is solved. The approach improve interaction balance method. Thus, we find the answer to a class of non-separable steady state optimization problems

Keywords　large scale systems; steady optimization; hierchical contol

1　前言

考虑由相互关联的 N 个子系统构成的复杂大系统, 第 i 个子系统的数学表达式为:

$$\begin{cases} y_i = f_i(c_i, u_i) \\ g_i(c_i, u_i, y_i) \leq 0 \\ u_i = H_i y \end{cases}$$

式中 c_i、u_i、y_i 分别为第 i 个子系统的控制输入、关联输入和输出、f_i 是第 i 个子系统的真实模型。令: $c = [c_1, c_2, \cdots, c_N]^T$; $u = [u_1, u_2, \cdots, u_N]^T$; $y = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^T$, 控制目标为求 $\hat{c}$ 使下式成立, $\hat{c} = \mathrm{Arg\,min}\,\Psi(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$ 其中 $Q_i = Q_i(c_i, u_i, y_i)$ 为第 i 个子系统的性能指标, 总的性能指标为 $Q = \Psi(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$, 因此, 一般地稳态优化问题的提法为求

$$\begin{aligned} & \hat{c} = \mathrm{Arg\,min}\,\Psi(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N) \\ \text{s.t.}\quad & y = f(c, u) \\ & g(c, u, y) \leq 0 \\ & u = Hy \end{aligned}$$

关联矩阵 $H = [H_1, H_2, \cdots, H_N]$ 由 0, 1 组成。已有文献仅对整体性能指标 $Q = \Psi(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$ 具有可加形

* 本文于 1997 年 1 月 13 日收到

式(当然关于每个子系统可分)的稳态大系统进行了详尽讨论,这类问题的求解已经有了比较成熟的关联平衡法(IBM),参看[1]。然而,许多实际问题的整体性能指标并非为各个系统性能指标的简单和,可能存在非线性耦合,如$Q=Q_1Q_2Q_3+Q_1Q_2+Q_2Q_3+Q_3^2$对此,IBM 无能为力,Singh 和 Titli 采用引入伪变量的方法解决了一类不可分问题,伪变量迭代校正的收敛性问题与稳定性问题必将使算法更加复杂。本文的基本思想为:通过上下级之间的纵向信息交换对子系统之间的关联进行解耦,利用子系统之间的横向信息传递对目标函数进行解耦,这种两级算法是对关联平衡法的改进,从而,解决了一类关联平衡法所不能解决的稳态优化问题。

本文做如下假设:

假设(Ⅰ) 整体性能指标$Q=\Phi(Q_1,Q_2,\cdots,Q_N)$经重新组合具有如下形式:

$$Q=\sum_{i=1}^{N}Q_i' \tag{1}$$

设$(i_1,i_2,\cdots,i_N)$为$(1,2,\cdots,N)$的一个排列,(1)式中$Q_1'=Q_{i_1}(c_{i_1},u_{i_1},y_{i_1})$即$Q_1'$仅与第$i_1$个子系统有关,而与其它子系统无关,对子系统重新编号,把这个子系统定义为第一个子系统,性能指标为Q_1'。一般地,

$$Q_k'=Q_{i_k}(c_{i_k},u_{i_k},y_{i_k},Q_1',Q_2',\cdots,Q_{k-1}')\qquad k=2,3,\cdots,N \tag{2}$$

也就是说子系统重新编号后,第k个子系统的性能指标Q_k'除了与本系统有关外,还与前面的$k-1$个子系统有关而与后面的无关。如$Q=Q_1Q_2Q_3+Q_1Q_2+Q_2Q_3+Q_3^2$取$Q_1'=Q_3^2,Q_2'=Q_2Q_3,Q_3'=Q_1Q_2Q_3+Q_1Q_2$,重新编号后的第 1, 2, 3 个子系统分别对应于原来的第 3, 2, 1 个子系统。(2)式要求子系统的性能指标重新组合后按一定顺序耦合反映了某些按顺序加工的工业过程第k个子系统的性能指标与它前面的$k-1$个子系统的优劣有密切关系。为方便,假定$Q=\sum_{i=1}^{N}Q_i$已满足上述要求,即

$$Q_1=Q_1(c_1,u_1,y_1),\ Q_i=Q_i(c_i,u_i,y_i,Q_1,Q_2,\cdots,Q_{i-1})\qquad i=2,3,\cdots,N$$

假设Ⅱ:$y=f(c,u)$,$g(c,u,y)$关于各变量连续可微且为凸函数

假设Ⅲ:$Q_i=Q_i(c_i,u_i,y_i,Q_1,Q_2,\cdots,Q_{i-1})$当$Q_1,Q_2,\cdots,Q_{i-1}$固定时$Q_i$为凸函数。

因此,本文讨论的问题为求

$$\hat{c}=\mathrm{Arg\,min}\sum_{i=1}^{N}Q_i \tag{1a}$$

$$\text{s.t.}\qquad y=f(c,u) \tag{1b}$$

$$g(c,u,y)\le 0 \tag{1c}$$

$$u=Hy \tag{1d}$$

2 算法的描述

问题(1)的 Lagrange 函数为:

$$L(c,u,y,\rho,\gamma,\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\left[Q_i+\rho_i^T(y_i-f_i(c_i,u_i))+\gamma_i^Tg_i+\lambda_i^T\left(u_i-\sum_{i=1}^{N}H_{ij}y_i\right)\right]$$

其中ρ,γ,λ分别为(1b),(1c),(1d)对应的乘子向量。令:

$$L_1(c_1,u_1,y_1,\rho_1,\gamma_1;\lambda)=Q_1(c_1,u_1,y_1)+\rho_1^T(y_1-f_1(c_1,u_1))+\gamma_1^Tg_1+\lambda_1^T\left(u_1-\sum_{j=1}^{N}H_{j1}\lambda_j^Ty_1\right)$$

$$L_i(c_i,u_i,y_i,Q_1,Q_2,\cdots,Q_{i-1},\rho_i,\gamma_i;\lambda)=Q_i(c_i,u_i,y_i,Q_1,Q_2,\cdots,Q_{i-1})+$$
$$\rho_i^T(y_i-f_i(c_i,u_i))+\gamma_i^Tg_i+\lambda_i^T\left(u_i-\sum_{j=1}^{N}H_{ji}\lambda_j^Ty_i\right)\qquad i=2,3,\cdots,N$$

则:$L=L_1+\sum_{i=2}^{N}L_i$,显然,$L_i(i=2,3,\cdots,N)$对固定的λ除了与第i个子系统有关外还与前面的$i-1$个子系统有关,因此,这里的$L_i(i=2,3,\cdots,N)$与 IBM 中的L_i完全不同。为使第i个子系统与其它子系统解耦,采用如下优化策略。

对于固定的协调变量 λ, 局部决策单元按顺序求解下列问题:

LP_1: 求 $(\hat{c}_1, \hat{u}_1, \hat{y}_1, \hat{\rho}_1, \hat{\gamma}_1) = \mathrm{Argmin} L_1(c_1, u_1, y_1, \rho_1, \gamma_1, \lambda)$ 令: $\hat{Q}_1 = Q_1(\hat{c}_1, \hat{u}_1, \hat{y}_1)$, 把 $\hat{Q}_1$ 代入 $L_2(c_2, u_2, y_2, \rho_2, \gamma_2, Q_1; \lambda)$ 中, 那么, L_2 就与第 1 个子系统解耦。因此

LP_2: 求 $(\hat{c}_2, \hat{u}_2, \hat{y}_2, \hat{\rho}_2, \hat{\gamma}_2) = \mathrm{Argmin} gL_2(c_2, u_2, y_2, \rho_2, \gamma_2, \hat{Q}_1; \lambda)$ 令: $\hat{Q}_2 = Q_2(\hat{c}_2, \hat{u}_2, \hat{y}_2)$ 把 $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ 代入 $L_3(c_3, u_3, y_3, \rho_3, \gamma_3, Q_1, Q_2; \lambda)$, 那么, L_3 就与前面两个子系统解耦, 于是可独立求解, 一般地

LP_i: 求 $(\hat{c}_i, \hat{u}_i, \hat{y}_i, \hat{\rho}_i, \hat{\gamma}_i) = \mathrm{Argmin} gL_i(c_i, u_i, y_i, \rho_i, \gamma_i, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \cdots, \hat{Q}_{i-1}; \lambda)$ $(i = 2, 3, \cdots, N)$ 下级按上述方法求解完成之后, 把结果送给协调器, 协调器按 IBM 中校正 λ 的公式对 λ 重新固定, 直至关联达到平衡。假设(Ⅱ)和假设(Ⅲ)保证了所有 LP_i 的解存在唯一, 上述方法与 IBM 的区别在于横向各局部决策单元要依次传递优化信息, 并不独立, 该方法的实质就是利用上下级之间的纵向信息交换对子系统之间的关联进行解耦, 利用子系统之间的横向信息传递对目标函数进行解耦。

算法

step 1　协调器按下式校正 λ

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha(u - Hy) \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{3}$$

step 2 下级按顺序求解 $LP_i (i = 1, 2, \cdots, N)$

3　收敛性证明

为方便, 令: $w_i = (c_i, u_i, y_i, \rho_i, \gamma_i)\ (i = 1, 2, \cdots, N)$, 由上节的讨论知在 $\hat{w}_i$ 处

$$\left.\frac{\partial L_1}{\partial c_1}\right|_{\hat{w}_1} = \left.\frac{\partial L_1}{\partial u_1}\right|_{\hat{w}_1} = \left.\frac{\partial L_1}{\partial y_1}\right|_{\hat{w}_1} = \left.\frac{\partial L_1}{\partial \rho_1}\right|_{\hat{w}_1} = 0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \gamma_1} = g_1(\hat{w})_1 \le 0$$

$$\hat{\gamma}_1 g_1(\hat{w}_1) = 0$$

一般地在 $(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_i)$ 处

$$\left.\frac{\partial L_i}{\partial c_i}\right|_{(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_i)} = \left.\frac{\partial L_i}{\partial u_i}\right|_{(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_i)} = \left.\frac{\partial L_i}{\partial y_i}\right|_{(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_i)} = \left.\frac{\partial L_i}{\partial \rho_i}\right|_{(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_i)} = 0 \tag{4a}$$

$$\left.\frac{\partial L_i}{\partial \gamma_i}\right|_{\hat{w}_i} = g_i(\hat{w}) \le 0 \tag{4b}$$

$$\hat{\gamma}_i g_i(\hat{w}_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{4c}$$

上述结论与 IBM 的区别在于第 i 个方程组成立的前提是前 $i-1$ 个方程组必须成立, 而 IBM 没有这一要求。用 w 表示所有下级变量集合, L_w 表示 $\frac{\partial L}{\partial w}$, 那么当方程组(4)的最后一个成立时, 前面的都已经成立, 因此, 在 $\hat{w} = \hat{w}_1, \hat{w}_2, \cdots, \hat{w}_N)$ 处, $L_w(\hat{w}) = 0$, 两边关于 λ 求导有: $L_{w\lambda} + L_{ww}\frac{dw}{d\lambda} = 0$

由假设(Ⅱ)和假设(Ⅲ)知: L_{ww} 在 $\hat{w}$ 处为正定矩阵, 因此, $\frac{dw}{d\lambda} = -L_{ww}^{-1} L_{w\lambda}$

把协调器中的校正公式转为化连续时间 t 的变量时, 可得如下微分方程:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \alpha \frac{\partial L}{\partial \lambda} \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{5}$$

以下证明与 Singh 的方法类似, 令: $v(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^T \frac{\partial L}{\partial \lambda}$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(5)} = \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^T \left(L_{\lambda\lambda} + L_{\lambda w}\frac{dw}{d\lambda}\right) = -\alpha\left(L_{w\lambda}\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^T L_{ww}^{-1}\left(L_{w\lambda}\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) < 0$$

因此, (5)渐近稳定, 其稳态点为 $L_\lambda = 0$ 即 $u = Hy$, 这说明在最优点处关联达到平衡, 协调器算法收敛。

4　实例

子系统 1 $\begin{cases} y_1 = 1.4375c_{11} - 0.1875c_{12} + 1.75u_{11} - 0.6872 \\ c_{11} + u_{11} - 1.006 \le 0 \end{cases}$

性能指标 $Q_1 = (u_{11} - 1)^2 + c_{11}^2 + (c_{12} - 2)^2$

子系统 2 $\begin{cases} y_{21} = c_{21} - c_{22} + u_{21} - 3u_{22} \\ y_{22} = 2c_{22} - c_{23} - u_{21} + u_{22} \end{cases}$

性能指标 $Q_2 = 2(c_{21} - 2)^2 + c_{22}^2 + 4u_{21}^2 + u_{22}^2 + 3c_{23}^2$

子系统 3 $\begin{cases} y_3 = 1.25c_3 - 3.75u_3 - 0.125 \\ -c_3 - u_3 - 0.5 \le 0 \end{cases}$

性能指标 $Q_3 = (c_3 + 1)^2 + (u_3 - 1)^2$

关联为: $u_{11} = y_{21}$ $u_{21} = y_1$ $u_{22} = y_3$ $u_3 = y_{22}$

整体性能指标 $Q = Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3^2$

取 $Q_1' = Q_3^2$, $Q_2' = Q_2Q_3$, $Q_3' = Q_1Q_2Q_3 + Q_1Q_2$ 则: $Q = Q_1' + Q_2' + Q_3'$

关联约束对应的 Lagrange 函数为:

$$L = Q_1' + Q_2' + Q_3' + \lambda_1(u_1 - y_2) + \lambda_{21}(u_{21} - y_1) + \lambda_{22}(u_{22} - y_3) + \lambda_3(u_3 - y_{22})$$

协调器按(3)校正 λ, 下级按次序求解下面 3 个子问题

子问题 1:

$$\min[Q_3^2 + \lambda_3u_3 - \lambda_{22}y_3]$$

s t 子系统 3

假设解为 $(\hat{c}_3, \hat{u}_3, \hat{y}_3)$ 代入 Q_3 得 $\hat{Q}_3 = Q_3(\hat{c}_3, \hat{u}_3, \hat{y}_3)$ 把 $\hat{Q}_3$ 代入 Q_2' 可对目标函数解耦

子问题 2:

$$\min[Q_3\hat{Q}_3 + \lambda_{21}u_{21} + \lambda_{22}u_{22} - \lambda_1y_{21} - \lambda_3y_{22}]$$

s t 子系统 2

子问题 3:

$$\min[Q_1\hat{Q}_2\hat{Q}_3 + Q_1\hat{Q}_2 + \lambda_1u_1 - \lambda_{21}y_1]$$

s t 子系统 1

把各子系统优化的结果送给协调器, 取步长 $\alpha = 0.43$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{21} = 0$, $\lambda_{22} = 3$, $\lambda_3 = 1$ 经 32 次迭代, 关联误差的绝对值和 error 小于 0.001, 仿真结果如表 1:

表 1

$c_{11} = -0.195786$	$c_{12} = 2.025537$	$u_1 = 0.761652$	$y_1 = -0.015539$
$c_{21} = 1.721606$	$c_{22} = -0.254917$	$c_{23} = 0.135284$	$u_{21} = -0.015649$
$u_{22} = 0.399646$	$y_{21} = 0.761936$	$y_{22} = -0.229824$	$c_3 = -0.270877$
$u_3 = -0.230119$	error= 0.000984	$q = 5.199016$	

4 结束语

虽然 IBM 不能解决整体性能指标为 $Q = f_1(Q_1) + f_2(Q_1, Q_2) + \cdots + f_N(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$ (其中每个 f_i 可以是任意形式的非线性函数) 的不可分问题, 但用本文的方法通过横向信息传递就可解决这类问题, 算法结构简单, 收敛性条件与 IBM 完全相同, 至于一般的不可分问题如何转化为目标函数具有本文的形式还有待进一步研究。

参 考 文 献

1 Singh M G, Titli A. Systems: Decomposition, optimization and control, Pergamon press, 1978