文章编号:1000-6788(2007)07-0064-05

尾部相关性对投资组合 VaR 的影响分析

梁冯珍,钟　君,史道济
(天津大学理学院数学系,天津 300072)

摘要: 通过随机模拟,研究两种不同的风险度量(VaR 和方差)与相关性之间的关系. 当用方差度量风险时,资产收益率之间的线性相关性越小,资产组合的风险就越小. 当用 VaR 度量风险时,收益率间的尾部相关性对 VaR 也有显著影响. 如果资产收益率之间的线性相关性较小,而尾部相关性较大,则风险可能较大.

关键词: 投资组合;线性相关系数;尾部相关系数;Copula;VaR
中图分类号: F830.9　　**文献标志码**: A

Analysing the Impact of Tail Dependence on Portfolio VaR

LIANG Feng-zhen, ZHONG Jun, SHI Dao-ji
(Institute of Science, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract: Two different risk measure methods (VaR and Variance) and the relationship between them and dependence are studied by simulation method in this paper. when using Variance method to measure risk, the smaller linear correlation of return on assets is, the smaller the risk of portfolio is. However, when using ! VaR method to measure risk, The tail dependence of return has significant impact on VaR. If the linear correlation of return on assets is small, but the tail dependence of them is large, the risk of portfolio might be large.

Key words: portfolio;linear correlation coefficient; coefficient of tail dependence; Copula; VaR

1 引言

在风险管理中,相关性的研究占有相当重要的地位. 相关性分析是金融量化分析中的一个重要问题,资产定价、组合选择、风险度量等都涉及相关性分析[1]. 传统的相关性度量,如线性相关系数,在椭球型分布族内,它是较好的相关性度量. 但在非椭球型分布族内,就不是一个好的相关性度量,存在许多缺陷[2,3],它不能度量非线性相关的程度,尤其是极值事件之间的相关性. 文献[4,5]都说明,尾部相关性是描述数据极值相关现象的重要工具,而度量尾部相关性的常用概念是尾部相关系数.

本文通过模拟方法,研究尾部相关性对投资组合风险度量 VaR 的影响.

全文结构如下:第 2 节介绍一些基本知识,包括尾部相关系数的概念及其估计方法,度量风险的两种常用方法. 第 3 节通过随机模拟,研究尾部相关系数对 VaR 的影响. 最后得出结论:当用 VaR 度量风险的时候,各资产收益率之间的线性相关系数小,不一定意味着投资的风险就小,它还取决于尾部相关系数的大小,如果尾部相关系数较大,则风险可能较大.

2 基本知识

设连续型随机向量(X, Y)的联合分布函数为 $F(x, y)$,边缘分布分别为 $F_1(x)$, $F_2(y)$,则称

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1^-} \lambda_U(u) = \lim_{u \to 1^-} \Pr(X \geq F_1^{-1}(u) \mid Y \geq F_2^{-1}(u))$$

为上尾相关系数. 如果 $\lambda_U > (=) 0$,则称(X, Y)上尾相关(独立). 称

收稿日期:2006-05-19
资助项目:国家自然科学基金(70601020,70573077)

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \lambda_L(u) = \lim_{u \to 0^+} \Pr(X \le F_1^{-1}(u) \mid Y \le F_2^{-1}(u)).$$

为下尾相关系数.如果 $\lambda_L > (=) 0$,则称(X, Y)下尾相关(独立).

如果用 C 表示连续型随机变量(X, Y)的 Copula[6],则

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad \lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u, u)}{u}.$$

对于一些常见的 Copula,可计算它们的尾部相关系数,结论如下:

1) 二元正态 Copula

$$C_{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - \rho^2)^{1/2}} \exp\left\{ - \frac{1}{2(1 - \rho^2)} (s^2 - 2\rho st + t^2) \right\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

其中 ρ 为线性相关系数,Φ 为标准正态分布函数.尾部相关系数为 $\lambda_U = \lambda_L = 0$.

2) 二元 t Copula

$$C_t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - \rho^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1 - \rho^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} \mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

其中 ρ 为线性相关系数,t_ν 是自由度为 ν 的 t 分布函数.尾部相关系数为 $\lambda_L = \lambda_U = 2 t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$;

3) Clayton Copula

$$C_{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \theta \in (0, \infty).$$

尾部相关系数为 $\lambda_U = 0$,$\lambda_L = 2^{-1/\theta}$.

如果$(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$是来自上述分布 $F(x, y)$ 的独立同分布的随机向量,对应的 Copula 为 C,经验 Copula 为 C_n,即

$$C_n(u, v) = F_n(F_{1n}^{-1}(u), F_{2n}^{-1}(v))$$

其中 F_n, F_{1n}, F_{2n} 分别表示分布函数 F, F_1, F_2 的经验分布函数.则上尾相关系数 λ_U 的估计[7]为

$$\lambda_{U,n}(k) = \frac{n}{k} C_n\left(\left[1 - \frac{k}{n}, 1 \right] \times \left[1 - \frac{k}{n}, 1 \right] \right)$$

其中 $C_n((a, b] \times (c, d]) \triangleq C_n(b, d) - C_n(b, c) - C_n(a, d) + C_n(a, c)$.

下尾相关系数的估计[7]为

$$\lambda_{L,n}(k) = \frac{n}{k} C_n\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n} \right)$$

其中当 $n \to \infty$ 时,$k = k(n) \to \infty$ 且 $k/n \to 0$.

任何一种投资都会存在风险,为了将风险降到最低,需要建立度量风险的方法.马可维茨[8]建立了均值方差模型,分别用平均收益率和收益率的方差来衡量投资的预期收益率水平和不确定性(风险).为方便,仅考虑两种资产的组合.设某投资者将一笔资金对资产 A,B 按照 $k_1 : k_2 (k_1 + k_2 = 1)$ 的比例进行投资,得到一个资产组合 $Z = k_1 X + k_2 Y$,记为 P.如果到期时资产 A、B 的收益率分别为 X, Y,则投资组合 P 的平均收益率和方差分别为

$$E(Z) = k_1 E(X) + k_2 E(Y),$$
$$\sigma_Z^2 = k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + 2 k_1 k_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho, \tag{1}$$

其中 σ_1^2,σ_2^2 分别是资产 A 和 B 的收益率的方差,ρ 是收益率 X 和 Y 之间的线性相关系数.如果用方差来度量资产组合的风险,则根据(1)式,选择相关性较小的资产进行投资可以减小组合风险.

但由于方差表示的是收益率的波动性,而这种波动性有正向的波动也有负向的波动,当考虑风险的时候,通常只关心可能发生的损失,若还用方差来表示就不太恰当;且投资组合理论中的相关性只是线性相关性的度量,当收益率之间除线性相关性外,还存在其他关联性时,方差并没有反映非线性相关的影响.基于上述原因,结合近年来金融理论和统计方法的最新发展,采用 VaR 方法来度量投资组合的风险.

VaR 是一种用标准统计技术来评估金融风险的方法.从统计上看,VaR 就是投资组合在持有期内发生

损失 Z 的分布 F_Z 的 α 分位数,即

$$\Pr(Z > \mathrm{VaR}) = 1 - \alpha,$$

这就是说,未来损失值超过 VaR 的概率只有 $1 - \alpha$.

计算 VaR 的典型方法主要有三种[9],历史模拟法,分析方法和 Monte Carlo 模拟方法.

从(1)式可以看出,对于任意的投资组合分布,用方差度量的风险关于线性相关系数都是单调递增的,那么用 VaR 度量的风险与线性相关系数是否也存在单调递增关系呢?

从数学的角度来说,投资组合的 VaR 由 Z 的分布函数

$$F_Z(z) = \iint_{k_1 x + k_2 y \leq z} \mathrm{d}\, C(F_1(x), F_2(y))$$

来确定. 由此可见,VaR 与 Copula 和边缘分布函数都有关系. 在非正态分布的情况下,很难直接计算分布 F_Z 的分位数,因而几乎无法建立 VaR 与线性相关系数的解析表达式. 当计算较高置信水平下的 VaR 时,主要使用尾部数据,所以在考虑相关性时,除了研究线性相关性对组合风险的影响以外,还应特别关注尾部相关性对组合风险的影响. 为了说明 VaR 的变化都是由尾部相关性的不同而引起的,必须排除边缘分布对 VaR 带来的影响. 为此,在第 3 节中,假定边缘分布函数相同,用随机模拟方法来研究 VaR 与线性相关系数及尾部相关系数之间的关系.

3 模拟研究

现在用模拟方法构造两个不同资产的组合,研究线性相关性及尾部相关性对投资组合风险的影响. 因为通常只关心损失,所以这里只研究数据下尾的尾部相关性对组合风险的影响.

首先假定收益率数据服从正态分布,相应的 Copula 为正态 Copula,比较两种不同的正态分布(仅有线性相关系数 ρ 的差别)的影响.

设收益率数据 (X_i, Y_i) 服从正态分布 $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_i)$ $(i = 1, 2)$,则投资组合 P 的收益率 Z_i 服从正态分布,即

$$Z_i = k_1 X_i + k_2 Y_i \sim N(k_1\mu_1 + k_2\mu_2, k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + 2k_1k_2\sigma_1\sigma_2\rho_i),\ i = 1, 2.$$

根据 VaR 的定义,在置信水平 α 下,投资组合 P 的风险为

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Z_i) = \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + 2k_1k_2\sigma_1\sigma_2\rho_i} + k_1\mu_1 + k_2\mu_2, \tag{2}$$

这里 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 是标准正态分布的 α 分位数.

当 $\rho_1 > \rho_2$ 时,有

$$\mathrm{VaR}_\alpha(k_1X_1 + k_2Y_1) > \mathrm{VaR}_\alpha(k_1X_2 + k_2Y_2). \tag{3}$$

由此可见,在假定收益率服从正态分布的条件下,用 VaR 度量的风险与线性相关系数之间的变化关系,与传统的利用方差 σ^2 度量的风险和线性相关系数之间的变化关系是一致的,即相关系数越小,风险就越小.

其次,由于实际金融数据不服从正态分布,具有厚尾性. 为能更好地描述金融数据的这种厚尾特性,我们将边缘分布的估计分为三部分,用广义 Pareto 分布估计数据的上尾和下尾[10],用经验分布估计分布的中心,得边缘分布为:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 1 - [1 - \tilde{F}(u_R)]\left[1 + \xi_R \dfrac{x - u_R}{\sigma_R}\right]^{-1/\xi_R}, & x > u_R, \\ \tilde{F}(x), & u_L \leq x \leq u_R, \\ \tilde{F}(u_L)\left[1 - \xi_L \dfrac{x - u_L}{\sigma_L}\right]^{-1/\xi_L}, & x < u_L. \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\tilde{F}(.)$ 是经验分布,u_R 和 u_L 分别是适当选取的上尾阈值和下尾阈值,$\sigma_R(\sigma_L)$ 和 $\xi_R(\xi_L)$ 是广义 Pareto 分布的尺度参数和形状参数.

设随机变量 X_1, X_2 具有相同的分布函数 $F_1(x)$,Y_1, Y_2 具有相同的分布函数 $F_2(y)$,并且 $F_1(x)$,$F_2(y)$ 均为(4)中 $\hat{F}(x)$ 的形式. 构造两个不同的资产组合,收益率分别为 $Z_1 = k_1X_1 + k_2Y_1$,$Z_2 = k_1X_2 +$

$k_2 Y_2$，且满足关系式

$$\rho_1 > \rho_2, \lambda_1 < \lambda_2. \tag{5}$$

这里 ρ_i 表示 X_i 与 Y_i 的线性相关系数，λ_i 表示 X_i 与 Y_i 的下尾相关系数（$i = 1,2$），考察投资组合的风险 VaR 的大小是否还具有(3)式的关系？

为了使得模拟结果更接近实际情况，这里从实际数据出发，确定边缘分布. 选取上证综合指数和深证成分指数日收盘指数对数收益率数据.

考虑到我国股市从 1996 年 12 月 26 日开始实行涨跌停板制度，所以选取上证综指和深证成指从 1996 年 12 月 26 日到 2005 年 10 月 31 日的日对数收益率数据，分别作为边缘分布 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$ 的观测数据. 样本容量均为 2129. 用平均剩余寿命图[10]确定上证综指的阈值为 $u_R = 0.0244$，$u_L = -0.0225$，利用(4)式估计边缘分布 $F_1(x)$，参数估计结果如表 1 所示，其中第一行是参数估计值，第二行是相应的标准误. 选取深证成指的阈值为 $u_R = 0.0260$，$u_L = -0.0237$，通过估计得到边缘分布 $F_2(y)$ 的参数如表 2 所示.

表 1　上证综指边缘分布 $F_1(x)$ 的参数估计

	σ_L	ξ_L	σ_R	ξ_R
参数值	0.00731159	0.42474366	0.008049703	0.339752401
标准误	0.001225708	0.151350355	0.001325097	0.144539706

表 2　深证成指边缘分布 $F_2(y)$ 的参数估计

	σ_L	ξ_L	σ_R	ξ_R
参数值	0.01167302	0.30051179	0.01407048	0.24873665
标准误	0.001894508	0.135592505	0.002176827	0.123787315

取(X_1, Y_1)的 Copula 为 t Copula，其中参数 $\rho = 0.8$，$\nu = 3$. 取(X_2, Y_2)的 Copula 为参数 $\theta = 3$ 的 Clayton Copula. 则(X_1, Y_1)的下尾相关系数 $\lambda_1 = 0.5414697$，(X_2, Y_2)的下尾相关系数 $\lambda_2 = 0.7937005$. 由于联合分布的复杂性，计算理论线性相关系数特别困难，而通过大量模拟得到的估计值将收敛于真实值，我们用线性相关系数的模拟估计值代替其真实值来验证(5)中的条件.

经过模拟，在表 3 中给出了两个日对数收益率的尾部相关系数和线性相关系数 1000 次模拟的平均值，其中 λ 表示下尾相关系数的理论值，$\hat{\lambda}$ 表示下尾相关系数的模拟估计值，$\hat{\rho}$ 表示线性相关系数的模拟估计值，易验证这里构造出的组合满足关系式(5). 在表 4 中，针对不同投资比例组成的组合，计算了在置信水平 α 下，组合的 VaR_α 值，其中 α 分别取 0.95，0.975，0.99，0.995，0.9999. σ^2 是各种投资组合的组合收益率的方差.

表 3　组合成分的相关性估计(1000 次模拟平均值)

组合	λ	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$
$k_1 X_1 + k_2 Y_1$	0.5414697	0.5505148	0.7744009
$k_1 X_2 + k_2 Y_2$	0.7937005	0.7948275	0.6802694

结合表 3 和表 4，我们发现，不管在那种权重情况下，不管各成分资产之间的尾部相关系数如何，只要线性相关系数小，组合收益率的方差就小，即用 σ^2 度量的风险就小. 但是当我们关注投资可能发生的具体损失大小，用 VaR 来度量投资风险的时候，结论就产生了变化. 从表 4 中可以看出，不管投资组合的权重是多少，虽然组合 $k_1 X_1 + k_2 Y_1$ 中(X_1, Y_1)的线性相关系数比组合 $k_1 X_2 + k_2 Y_2$ 中(X_2, Y_2)的线性相关系数大，但在较高的置信水平 α 下，都有

$$\mathrm{VaR}_\alpha(k_1 X_1 + k_2 Y_1) < \mathrm{VaR}_\alpha(k_1 X_2 + k_2 Y_2).$$

这与假定 Copula 为正态 Copula 时得到的结论恰好相反.

表 4 VaR 估计值(1000 次模拟平均值)

组合	$VaR_{0.95}$	$VaR_{0.975}$	$VaR_{0.99}$	$VaR_{0.995}$	$VaR_{0.999}$	σ^2
$X_1/5+4Y_1/5$	0.02200	0.03005	0.04489	0.05764	0.08247	0.0002455
$X_2/5+4Y_2/5$	0.02224	0.03043	0.04591	0.05898	0.08509	0.0002379
$2X_1/5+3Y_1/5$	0.02139	0.02906	0.04269	0.05477	0.08066	0.0002278
$2X_2/5+3Y_2/5$	0.02187	0.02984	0.04428	0.05747	0.08436	0.0002166
$X_1/2+Y_1/2$	0.02118	0.02866	0.04191	0.05397	0.08032	0.0002223
$X_2/2+Y_2/2$	0.02169	0.02953	0.04354	0.05686	0.08411	0.0002108
$3X_1/5+2Y_1/5$	0.02111	0.02836	0.04125	0.05352	0.08026	0.0002191
$3X_2/5+2Y_2/5$	0.02150	0.02921	0.04286	0.05629	0.08394	0.0002082
$4X_1/5+Y_1/5$	0.02115	0.02798	0.04060	0.05372	0.08109	0.0002195
$4X_2/5+Y_2/5$	0.02118	0.02858	0.04163	0.05535	0.08375	0.0002125

4 结论

从模拟结果可以看出,在 X_1 与 X_2 同分布,Y_1 与 Y_2 同分布的条件下,虽然组合 $k_1X_1+k_2Y_1$ 中(X_1,Y_1)的线性相关系数比组合 $k_1X_2+k_2Y_2$ 中(X_2,Y_2)的线性相关系数大,但由于组合 $k_1X_1+k_2Y_1$ 中(X_1,Y_1)的尾部相关系数远小于组合 $k_1X_2+k_2Y_2$ 中(X_2,Y_2)的尾部相关系数,最终导致在较高的置信水平 α 下,用 VaR 度量的组合 $k_1X_1+k_2Y_1$ 的风险反而小于组合 $k_1X_2+k_2Y_2$ 的风险. 这说明,在使用 VaR 度量投资风险的时候,线性相关性小并不一定能保证投资组合的风险就小,还必须考虑尾部相关性的大小对组合风险的影响,只有这样才能更准确的预测投资风险.

值得注意的是:这里只是通过模拟研究说明,在使用 VaR 度量风险时,并不是资产间的线性相关性小组合的风险就一定小. 但并没有像用方差度量风险那样给出一个一般性的相关性与风险大小关系的结论,原因主要在于计算组合的理论 VaR 值特别困难. 但可以进一步研究在一些特殊情况下,VaR 与相关性大小之间的关系. 作者将在这方面不断尝试,寻求较好的结果.

参考文献:

[1] Alexander C O. Volatility and Correlations: Methods, Models and Applications[M]. Risk Management and Analysis: Measuring and Modeling Financial Risk(C. O. Alexander, Ed.), Wiley, 2003.

[2] Embrechts P, McNeil A, Straumann D. Corelation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls[C]//M. A. H. Dempster. Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, 176 - 223.

[3] 史道济. 相关系数与相关性[J]. 统计科学与实践, 2002, 4: 22 - 24.
Shi Daoji. Correlation coefficient and dependence[J]. Statistics Science and Practice, 2002, 4: 22 - 24.

[4] Malevergne Y, Sornette D. Tail dependence of factor models[EB/OL], Preprint, University of Nice, France, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0202356, 2002.

[5] An T, Kharoubi. Dependence structure and risk measure[J]. Journal of Business, 2003, 76(3): 411 - 438.

[6] Nelsen R B. An Introduction to Copulas[M]. Springer Verlag, 1999.

[7] Frahm G, Junker M, Schmidt R. Estimating the tail dependence coefficient[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37: 80 - 100.

[8] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77 - 91.

[9] Manganelli S, Engle R F. Value at Risk Models in Finance[R]. Working Paper N0. 75, August, 2001.

[10] Coles S G. An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values[M], Springer, 2001.