文章编号:1000-6788(2006)02-0102-06

数值界不确定性关联大系统分散鲁棒 H_2/H_∞ 状态反馈控制

谢永芳,桂卫华,蒋朝辉
(中南大学信息科学与工程学院,湖南 长沙 410083)

摘要: 针对一类状态矩阵、控制输入矩阵及关联矩阵存在数值界不确定性关联大系统,研究其分散鲁棒 H_2/H_∞ 状态反馈控制问题. 基于有界实引理提出了存在分散鲁棒 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的参数化定理和两种 LMI 设计方法:直接 LMI 方法和迭代 LMI,并用实例说明了这 2 种方法的有效性. 理论和实验结果表明,所获得的控制器具有块对角结构,闭环大系统稳定且能优化闭环传递函数的 H_2/H_∞ 性能指标.

关键词: 数值界不确定性;分散 H_2/H_∞ 控制;状态反馈;线性矩阵不等式(LMI)
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Decentralized Robust H_2/H_∞ State Feedback Control for Value Bounded Uncertain Large-scale Interconnected Systems

XIE Yong-fang, GUI Wei-hua, JIANG Zhao-hui
(College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The problem of robust decentralized H_2/H_∞ state feedback control for large-scale interconnected systems with value bounded uncertainties existing in the state, control input and interconnected matrices is investigated. Based on the bounded real lemma, the parametrization theorem for a decentralized robust H_2/H_∞ state feedback controller is addressed and two LMI methods are proposed to solve the problem: the direct LMI approach and iterative LMI (ILMI) approach. At last an example is given to demonstrate the effectiveness of two LMI methods. The theory and simulation shows that the controller obtained has the block diagonal structure, enables the closed-loop large-scale interconnected system asymptotically stable and offers an optimized H_2/H_∞ perform index.

Key words: value bounded uncertainty; decentralized H_2/H_∞ control; state feedback; linear matrix inequality (LMI)

1 引言

目前 LMI 方法已成为鲁棒控制分析与设计的重要方法,LMIs 本质上反映的是约束关系,可以灵活地将闭环系统的各种约束关系和性能指标用矩阵不等式描述,适合于 H_2/H_∞ 多目标控制问题[1]. 用 LMI 方法研究 H_2/H_∞ 控制问题已取得一些进展,但其控制大多是在集中条件下实现的[1~5],而分散 H_2/H_∞ 控制的研究主要集中在标称系统,较少考虑系统模型的不确定性[6,7],而系统模型中常含有不确定性,按照标称参数设计的控制器可能达不到预期的性能. 在实际系统中,不确定项往往具有数值界表达形式,这种形式不需要满足匹配条件,更具一般性,而将 LMI 方法[8]用于数值界不确定性关联大系统分散 H_2/H_∞ 的情形却鲜见报道. 为此,作者应用 LMI 方法研究一类状态矩阵、控制输入矩阵及关联矩阵中含有数值界不确定性的大系统分散鲁棒 H_2/H_∞ 状态反馈控制器设计问题,利用有界实引理,将控制器的设计归结为一个双线性矩阵不等式求解问题,提出直接 LMI 和迭代 LMI 两种方法求解分散鲁棒 H_2/H_∞ 状态反馈控制器,使闭环大系统鲁棒稳定,并且优化闭环系统的 H_2/H_∞ 性能指标.

收稿日期:2005-02-03
资助项目:国家自然科学基金(60474003)
作者简介:谢永芳(1972 -),男,河南郸城人,博士,副教授,主要研究方向为分散控制,鲁棒控制,E-mail:yfxie@mail.csu.edu.cn

2　问题描述及引理

考虑一类由 N 个子系统组成的状态阵、控制阵及关联矩阵中具有数值界不确定性的关联大系统,其子系统的方程为

$$\dot{x}_i(t) = (A_{ii} + \Delta A_{ii})x_i(t) + B_{1i}\omega_i(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i})u_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N}(A_{ij} + \Delta A_{ij})x_j(t), \tag{1a}$$

$$z_{1i}(t) = C_{1i}x_i(t) + D_{11i}\omega_i(t) + D_{12i}u_i(t), \tag{1b}$$

$$z_{2i}(t) = C_{2i}x_i(t) + D_{22i}u_i(t), \tag{1c}$$

$$y_i(t) = x_i(t), \tag{1d}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, N$, $x_i(t) \in R^{n_i}$, $\omega_i(t) \in R^{r_i}$, $u_i(t) \in R^{m_i}$, $z_{1i}(t) \in R^{l_{1i}}$, $z_{2i}(t) \in R^{l_{2i}}$, $y_i(t) \in R^{n_i}$ 分别为第 i 个子系统的状态、扰动输入、控制输入、与 H_∞ 范数和 H_2 范数有关的被控输出及可测量输出向量;矩阵 $A_{ii}, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, D_{11i}, D_{12i}, C_{2i}, D_{22i}$ 为具有相应维数的常数矩阵; A_{ij} 为第 j 个子系统与第 i 个子系统的关联矩阵;矩阵 ΔA_{ii}、ΔB_{2i} 和 ΔA_{ij} 分别为状态矩阵、控制输入矩阵和关联矩阵的不确定性,它们有如下数值界

$$|\Delta A_{ij}| \prec R_{ij}, \ |\Delta B_{2i}| \prec S_i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N, \tag{2}$$

其中 R_{ij} 和 S_i 为具有非负元素的实常数矩阵,并分别与 ΔA_{ij} 和 ΔB_{2i} 同维. $|E| \prec \bar{E}$ 的含义是: $|e_{ij}| \leq \bar{e}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, N$, e_{ij} 和 $\bar{e}_{ij}$ 分别为矩阵 E 和 $\bar{E}$ 的第 (i, j) 个对应元素.

整个关联大系统可描述为

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1\omega + (B_2 + \Delta B_2)u, \tag{3a}$$

$$z_1 = C_1x + D_{11}\omega + D_{12}u, \tag{3b}$$

$$z_2 = C_2x + D_{22}u, \tag{3c}$$

$$y = x, \tag{3d}$$

其中

$$A = \lfloor A_{ij} \rfloor_{N\times N}, B_1 = \mathrm{block\_diag}\{B_{11}, \cdots, B_{1N}\},$$
$$B_2 = \mathrm{block\_diag}\{B_{21}, \cdots, B_{2N}\}, C_1 = \mathrm{block\_diag}\{C_{11}, \cdots, C_{1N}\},$$
$$D_{11} = \mathrm{block\_diag}\{D_{11i}, \cdots, D_{11N}\}, D_{12} = \mathrm{block\_diag}\{D_{12i}, \cdots, D_{12N}\},$$
$$C_2 = \mathrm{block\_diag}\{C_{21}, \cdots, C_{2N}\}, D_{22} = \mathrm{block\_diag}\{D_{22i}, \cdots, D_{22N}\},$$
$$\Delta A = \lfloor \Delta A_{ij} \rfloor_{N\times N}, \Delta B_2 = \mathrm{block\_diag}\{\Delta B_{21}, \cdots, \Delta B_{2N}\},$$
$$x = \mathrm{col}\{x_1, \cdots, x_N\}, \omega = \mathrm{col}\{\omega_1, \cdots, \omega_N\}, u = \mathrm{col}\{u_1, \cdots, u_N\},$$
$$z_1 = \mathrm{col}\{z_{1i}, \cdots, z_{1N}\}, z_2 = \mathrm{col}\{z_{2i}, \cdots, z_{2N}\}, y = \mathrm{col}\{y_1, \cdots, y_N\}.$$

假设系统的状态完全可测,基于状态反馈分散 H_2/H_∞ 控制规律可描述为

$$u = K_d y = K_d x, \tag{4}$$

其中

$$K_d = \mathrm{block\_diag}\{K_1, \cdots, K_i, \cdots, K_N\} \in \Phi. \tag{5}$$

Φ 为能在子系统水平上给出局部状态反馈控制的块对角矩阵的集合, $K_i \in R^{m_i \times n_i}$, $(i = 1, 2, \cdots, N)$.

为确保分散控制器的存在,一般假设由式(1)组成的大系统(3)在控制律式(4)及结构约束式(5)下,没有不稳定的分散固定模,并用 $T^d_{z_1\omega}(s)$ 和 $T^d_{z_2\omega}(s)$ 表示从 ω 到 z_1、z_2 的闭环传递函数,则

$$T^d_{z_1\omega}(s) = (C_1 + D_{12}K_d)(sI - A - \Delta A - B_2K_d - \Delta B_2K_d)^{-1}B_1 + D_{11}, \tag{6a}$$

$$T^d_{z_2\omega}(s) = (C_2 + D_{22}K_d)(sI - A - \Delta A - B_2K_d - \Delta B_2K_d)^{-1}B_1. \tag{6b}$$

分散 H_2/H_∞ 状态反馈控制问题,就是对于由式(1)组成的大系统(3),采用(4)式描述的控制律,在(5)式的结构约束下,寻找一个容许的控制器 K_d,使得

(a) 闭环系统渐近稳定,

(b) $\|T^d_{z_1\omega}(s)\|_\infty < \gamma$,

(c) $T^d_{z_2\omega}(s)$的 H_2 范数最小,即$\min\limits_{K_d} \| T^d_{z_2\omega}(s) \|_2$,

其中,γ是预先给定的正常数,不失一般性,本文假设 $\gamma = 1$.

下面给出文中用到的几个重要引理:

引理 1 设 $A, B \in R^{n\times n}$, $A \geq B$,则有 $C^T AC \geq C^T BC$, $\forall C \in R^{n\times k}$成立.

引理 2 设 X 和 Y 是具有适当维数的向量或矩阵,则对任意正数 $\alpha > 0$,有

$$X^T Y + Y^T X \leq \alpha X^T X + \alpha^{-1} Y^T Y$$

成立.

引理 3 若 $n\times m$ 阶矩阵 ΔA 满足$|\Delta A| \prec D$,则有

$$\Omega(D) \geq \Delta A \Delta A^T, \Gamma(D) \geq \Delta A^T \Delta A$$

其中

$$\Omega(D) = \begin{cases} \|DD^T\| I, & \|DD^T\| I < n * \mathrm{diag}(DD^T) \\ n * \mathrm{diag}(DD^T), & \text{其它} \end{cases},$$

$$\Gamma(D) = \begin{cases} \|D^T D\| I, & \|D^T D\| I < m * \mathrm{diag}(D^T D) \\ m * \mathrm{diag}(D^T D), & \text{其它} \end{cases},$$

这里,$\mathrm{diag}(R) = \mathrm{diag}(r_{11}, r_{22}, \cdots, r_{nn})$, $R = (r_{ij})$为 n 阶对称实阵.

注 文中矩阵范数 $\|M\|$定义为 M 的最大奇异值,矢量范数 $\|\alpha\|$为 α的 2 范数, I 根据不同情形表示维数可能不同的单位矩阵.

3 分散鲁棒 H_2/H_∞控制器设计

3.1 分散 H_2/H_∞控制器的参数化

定理 1 对于由式(1)组成的数值界不确定大系统(3),若存在正数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 及正定对称矩阵 X、Y 和矩阵 K_d 满足

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & B_1 & X(C_1 + D_{12}K_d)^T & X & (K_d X)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T & 0 & 0 \\ (C_1 + D_{12}K_d)X & D_{11} & -I & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -\alpha I & 0 \\ K_d X & 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} Y & C_2 X + D_{22}K_d X \\ (C_2 X + D_{22}K_d X)^T & X \end{bmatrix} > 0, \tag{8}$$

$$K_d \in \mathrm{block\_diag}\{K_1, \cdots, K_i, \cdots, K_N\} \tag{9}$$

时,系统存在分散 H_2/H_∞状态反馈控制器,若式(7)~(9)的解为(X_d^*, Y_d^*, K_d^*),则 K_d^* 就为一分散 H_2/H_∞状态反馈控制器,产生的闭环传递函数的 H_2 范数上界为 $\sqrt{\mathrm{Trace}(Y_d^*)}$,其中

$$\bar{A} = AX + XA^T + B_2 K_d X + XK_d^T B_2^T + \alpha\Omega(R) + \beta\Omega(S),$$

$$\Omega(R) = \Omega(\lfloor R_{ij}\rfloor_{N\times N}), i, j = 1, \cdots, N, \Omega(S) = \mathrm{block\_diag}\{\Omega(S_1), \cdots, \Omega(S_N)\}.$$

证明 由 Schur 补[8]可知,式(7)等价于

$$T(X, K_d, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \bar{A} + \alpha^{-1}XX + \beta^{-1}XK_d^T K_d X & B_1 & X(C_1 + D_{12}K_d)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ (C_1 + D_{12}K_d)X & D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0.$$

利用式(7)~(9)的解构造如下矩阵

$$M = \Delta AX + X\Delta A^T + \Delta B_2 K_d X + XK_d^T \Delta B_2^T,$$

$$N = \alpha\Omega(R) + \alpha^{-1}XX + \beta\Omega(S) + \beta^{-1}XK_d^T K_d X,$$

由引理 1、引理 2 及引理 3 可得

$$\Delta A X + X\Delta A^T \le \alpha\Delta A\Delta A^T + \alpha^{-1} XX \le \alpha\Omega(R) + \alpha^{-1} XX,$$
$$\Delta B_2 K_d X + XK_d^T\Delta B_2^T \le \beta\Delta B_2\Delta B_2^T + \beta^{-1} XK_d^T K_d X \le \beta\Omega(R) + \beta^{-1} XK_d^T K_d X,$$

故可知矩阵

$$J = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \le 0.$$

定义矩阵

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & B_1 & X(C_1 + D_{12} K_d)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ (C_1 + D_{12} K_d) X & D_{11} & -I \end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中

$$\Theta_{11} = (A + \Delta A) X + X(A + \Delta A)^T + (B_2 + \Delta B_2) K_d X + XK_d^T(B_2 + \Delta B_2)^T,$$

则

$$\Theta = T(X, K_d, \alpha, \beta) + J.$$

由 $T(X, K_d, \alpha, \beta) < 0$ 和 $J \le 0$ 可知

$$\Theta < 0 \tag{11}$$

成立,由有界实引理[9]可知闭环系统渐近稳定, $\| T_{z_1\omega}^d(s) \|_\infty < 1$ 成立.

由 $\| T_{z_2\omega}(s) \|_2^2 = \mathrm{Trace}(C_{c12} M C_{c12}^T)$,其中 $C_{c12} = C_2 + D_{22} K_d$, M 是 Lyapunov 方程

$$A_{c1} M + M A_{c1}^T + B_{c1} B_{c1}^T = 0$$

的半正定解[10](这里 $A_{c1} = A + \Delta A + B_2 K_d + \Delta B_2 K_d$, $B_{c1} = B_1$)和 $f(x) = Ax + xA + BB^T$ 是关于 x 的减函数可知,对任何使 $A_{c1} X + XA_{c1}^T + B_{c1} B_{c1}^T < 0$ 成立的正定矩阵 $X > 0$ 都有 $\| T_{z_2\omega} \|_2^2 < \mathrm{Trace}(C_{c12} X C_{c12}^T)$ 成立. 也就是说,只要存在正定矩阵 X 和 Y 满足

$$A_{c1} X + XA_{c1}^T + B_{c1} B_{c1}^T < 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} Y & C_{c12} X \\ XC_{c12}^T & X \end{bmatrix} > 0, \tag{13}$$

则 $\sqrt{\mathrm{Trace}(Y)}$ 就是 H_2 范数的一个上界. 由 Schur 补可知,如果式(7)成立,则有式(12)成立,而式(13)就是式(8),因此定理 1 的结论成立. 证毕.

3.2 直接 LMI 方法

定理 1 用参数化的形式给出了分散 H_2/H_∞ 状态反馈控制器存在的条件,这些条件中因含有矩阵 X 和 K_d 的乘积项,不满足 LMI 的凸性要求,故分散 H_2/H_∞ 状态反馈控制问题是非凸的,但通过变量替换 $L = K_d X$,并重写式(7)～(9),可恢复其凸性,并得到分散 H_2/H_∞ 状态反馈控制器存在的直接 LMI 参数化定理.

定理 2 对于由式(1)组成的数值界不确定大系统(3),若存在正数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 及正定对称矩阵 X_d、Y_d 和矩阵 L_d 满足

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & (C_1 X_d + D_{12} L_d)^T & X_d & L_d^T \\ B_d^T & -I & D_{11}^T & 0 & 0 \\ C_1 X_d + D_{12} L_d & D_{11} & -I & 0 & 0 \\ X_d & 0 & 0 & -\alpha I & 0 \\ L_d & 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} Y_d & C_2 X_d + D_{22} L_d \\ (C_2 X_d + D_{22} L_d)^T & X_d \end{bmatrix} > 0, \tag{15}$$

$$L_d \in \text{block\_diag}\{L_1, \cdots, L_i, \cdots, L_N\}, \tag{16}$$

$$X_d \in \text{block\_diag}\{X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_N\}, \tag{17}$$

时,系统存在分散 H_2/H_∞ 状态反馈控制器,若式(14)～(17)的解为(X_d^*, Y_d^*, L_d^*),则 $K_d^* = L_d^*(X_d^*)^{-1}$就为一分散 H_2/H_∞ 状态反馈控制器,产生的闭环传递函数的 H_2 范数上界为 $\sqrt{\text{Trace}(Y_d^*)}$,其中

$$\mathrm{A} = AX_d + X_dA^{\mathrm{T}} + B_2L_d + L_d^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} + \alpha\Omega(R) + \beta\Omega(S),$$

$$\Omega(R) = \Omega(\lfloor R_{ij} \rfloor_{N\times N}), i, j = 1, \cdots, N, \Omega(S) = \text{block\_diag}\{\Omega(S_1), \cdots, \Omega(S_N)\}.$$

证明 定理 2 是定理 1 的一种特殊形式,在定理 1 中,令 $L = K_dX$,对矩阵 L 和 X 均结构约束为块对角结构(16)和(17),由定理 1 易知定理 2 成立. 证毕.

定理 2 把分散 H_2/H_∞ 状态反馈控制问题归结为求解满足条件(14)～(17)的矩阵 Y_d 的最小迹问题

$$J(T_{z_2\omega}(s)) = \inf\{\text{Trace}(Y_d): X_d, Y_d, L_d \text{ 满足式}(14) \sim (17)\}. \tag{18}$$

(18)是带有 LMIs 约束的凸优化问题,可用 LMI 优化软件包中的 mincx 命令直接求解.

3.3 迭代 LMI(ILMI)方法

直接 LMI 方法把矩阵 L 和 X 都结构约束为块对角结构,排除了 X 与 L 是非块对角结构,但乘积 LX^{-1}为块对角结构的情形,所得结果是相对保守的. 虽然定理 1 的条件中含有矩阵 X 和 K_d 的乘积项 K_dX,不满足凸性要求,但这些条件具有以下两个重要特性.

特性 1 对于给定的 $K_d \in \Phi$,条件式(7)～(9)是关于变量组(X, Y, α, β)的 LMI;

特性 2 对于给定的 $X = X^T > 0$,条件式(7)～(9)是关于变量组(K_d, Y, α, β)的 LMI.

因此,对固定的 $X = X^T > 0$ 或 $K_d \in \Phi$,可用标准的 LMI 函数求解矩阵 Y 最小迹及其对应的变量 K_d 或 X. 据此我们提出了求解分散 H_2/H_∞ 状态反馈优化控制器的迭代算法,即先固定一个参数,求解受 LMI 条件约束的矩阵 Y 最小迹凸优化问题,再固定另一个参数,求解受 LMI 约束的矩阵 Y 最小迹凸优化问题.

Step1 初始化系统矩阵,选择状态反馈阵 K_0, $K_0 \in \mathcal{K}_d$, $\mathcal{K}_d := \{K_d | K_d \in \Phi$,且使$(A + B_2K_d)$渐近稳定$\}$,并设置迭代次数 $i = 0$,及中止条件参数 $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$.

Step2 对固定的 $K_d = K_i$,用 mincx 函数求解满足约束条件式(7)～(9)的矩阵 Y 的最小迹凸优化问题,记 X_i 为求得的 X 变量的最优值.

Step3 对固定的 $X = X_i$,用 mincx 函数求解满足约束条件式(7)～(9)的矩阵 Y 的最小迹 Tr 凸优化问题,记 Tr_i 为求得的 Tr 变量的最优值, K_i 为对应于 Tr_i 的 K_d 变量的值,令迭代次数加 1,即 $i = i + 1$.

Step4 判断终止条件,若 $Tr_{i-1} - Tr_i < \varepsilon Tr_{i-1}$成立,则停止计算, $\sqrt{Tr_i}$为所求的 H_2 范数的上界, K_i 为分散状态反馈增益矩阵;否则转到 Step2 继续执行迭代运算.

4 仿真示例

考虑由两个子系统构成的数值界不确定大系统,其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1.6 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{111} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D_{121} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1.2 & 18 \end{bmatrix}, D_{221} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -8 & 0.8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} -6.8 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{112} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{22} = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}, D_{222} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

不确定矩阵为

$$R_{11} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.02 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 \\ 0.2 & 0.01 \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$R_{22}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.01 & 0.05\end{bmatrix},\ R_{21}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.01\\ 0.04 & 0.05\end{bmatrix},\ S_2=\begin{bmatrix}0.03\\ 0.1\end{bmatrix}.$$

不难验证系统中的不确定项不满足匹配条件,用本文提出的直接 LMI 方法求解,获得的分散反馈增益矩阵 K_d 为

$$K_d=\begin{bmatrix}-34.8061 & 0.3426 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -12.9054 & -16.9751\end{bmatrix}.$$

此时,H_2 性能指标的上界为 9.7517,H_∞ 范数为 0.3788. 用上述 K_d 作为初始反馈矩阵 K_0,用 ILMI 方法迭代,迭代过程取 $\varepsilon=0.005$,经过 11 次迭代,满足中止条件,迭代结束,得到的分散反馈增益矩阵为

$$K_{11}=\begin{bmatrix}-30.1069 & 0.6201 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -21.6156 & -25.5387\end{bmatrix}.$$

此时,H_2 范数的上界为 7.3586,H_∞ 范数为 0.3692 分别低于直接 LMI 方法获得的对应结果. 由此可见,ILMI 算法能获得更优的 H_2/H_∞ 性能指标.

5　结论

针对一类状态矩阵、控制输入矩阵和关联矩阵中存在数值界不确定性关联大系统,研究其分散鲁棒 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的设计方法. 将控制器的解归结为一双线性矩阵不等式,提出了直接 LMI 和迭代 LMI 方法求解分散鲁棒 H_2/H_∞ 状态反馈控制器,使闭环不确定大系统鲁棒稳定,且能优化闭环传递函数的 H_2/H_∞ 性能指标. 实例结果表明,这两种方法的应用效果好,实用性强,采用 ILMI 方法可以获得更优的性能指标.

参考文献:

[1] Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multi-objective output-feedback control via LMI optimization [J]. IEEE Trans Autom Control, 1997, AC-42(7): 896 - 911.

[2] 刘国荣,罗毅平,万百五. 非线性 MIMO 系统 H_2/H_∞ 模糊输出反馈控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1228 - 1231.
Liu G R, Luo Y P, Wan B W. H_2/H_∞ fuzzy output feedback control for nonlinear MIMO systems [J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1228 - 1231.

[3] Chilali M, Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach [J]. IEEE Trans Autom Control, 1996, AC-41(3): 358 - 367.

[4] 郭雷,忻欣,冯纯伯. 基于 LMI 的一类混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器设计 ——连续情形[J]. 自动化学报, 1998, 24(3): 294 - 299.
Guo L, Xin X, Feng C B. The LMI based reduced-order controllers for H_2/H_∞ control problems: Continuous-time case [J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24(3): 294 - 299.

[5] Riyanto T B, Feron E, Uchida K. Mixed H_2/H_∞ output feedback control via LMI part Ⅱ: Design for LTI systems under structured uncertainties [C]. Proc, 1994, ACC: 319 - 322.

[6] 谢永芳,桂卫华,吴敏. 基于线性矩阵不等式的分散 H_2/H_∞ 控制的次优设计[J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 263 - 266.
Xie Y F, Gui W H, Wu M. The suboptimal design of decentralized H_2/H_∞ control based on linear matrix inequality [J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(2): 263 - 266.

[7] Geromel J C, Bernussou J, Peres P L D. Decentralized control through parameter space optimization [J]. Automatica, 1994, 30(10): 1565 - 1578.

[8] Boyd S P, et al. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[9] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307 - 1317.

[10] Doyle J, Zhou K, Glover K, Bodenheimer B. Mixed H_2 and H_∞ performance objectives Ⅱ: Optimal control [J]. IEEE Trans Autom Control, 1994, AC-39: 1575 - 1587.