文章编号:1000-6788(2006)03-0075-08

信息集成算子加权向量的对称性研究

张洪美[1] ,徐泽水[1,2]

(1. 解放军理工大学理学院,江苏 南京 211101; 2. 清华大学经济管理学院, 北京 100084)

摘要: 对信息集成算子加权向量的对称性进行了研究. 提出了升序加权算术平均(AOWAA)算子和语言AOWAA算子,分别给出了降序加权算术平均(DOWAA)算子和升序加权算术平均(AOWAA)算子、降序加权几何平均(DOWGA)算子和升序加权几何平均(AOWGA)算子、以及语言DOWAA算子和语言AOWAA算子的一个等价条件,并证明了在加权向量是对称的情况下:1)利用DOWAA算子对若干个互补判断矩阵进行集成所得到的群判断矩阵仍为互补判断矩阵;2)利用DOWGA算子对若干个互反判断矩阵进行集成所得到的群判断矩阵仍为互反判断矩阵;3)利用语言DOWAA算子对若干个语言互补判断矩阵进行集成所得到的群判断矩阵仍为语言互补判断矩阵. 最后探讨了一些常用加权向量的对称性问题.

关键词: 信息集成算子; 权重; 对称性; 判断矩阵

中图分类号: C934 **文献标识码**: A

Study on the Symmetry Properties of Weighting Vectors of Information Aggregation Operators

ZHANG Hong-mei, XU Ze-shui

(1. Institute of Sciences, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China; 2. School of Economics and Management, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In this paper, we investigate the symmetry properties of weighting vectors of information aggregation operators, and present an ascending ordered weighted arithmetic averaging (AOWAA) operator and a linguistic AOWAA operator. We give, respectively, an equivalence condition of the descending ordered weighted arithmetic averaging (DOWAA) operator and ascending ordered weighted arithmetic averaging (AOWAA) operator, descending ordered weighted geometric (DOWGA) operator and ascending ordered weighted geometric (AOWGA) operator, linguistic DOWAA operator and linguistic AOWAA operator. Based on the symmetrical weighting vectors, we show that 1) If all the individual complementary judgment matrices are aggregated by using the DOWAA operator, then their aggregated judgment matrices are also complementary; 2) If all the individual reciprocal judgment matrices are aggregated by using the DOWGA operator, then their aggregated judgment matrices are also reciprocal; 3) If all the individual linguistic complementary judgment matrices are aggregated by using the linguistic DOWAA operator, then their aggregated judgment matrices are also linguistic complementary. Finally, we discuss the symmetry properties of some common weighting vectors of information aggregation operators.

Key words: ordered weighted averaging operator; weight; symmetry; judgment matrices

1 引言

数据信息集成算子是现代信息科学和决策科学中的一个重要研究内容. 目前,有关数据信息集成算子的研究已引起人们的关注[1~4]. 美国著名学者Ronald R. Yager教授提出了一种集成数据信息的降序加权算术平均(DOWAA)算子[5],其特点是:对一组数据按从大到小的顺序重新排序后加权集成. 文[6]对集成数据信息的降序加权几何平均(DOWGA)算子和升序加权几何平均(AOWGA)算子进行了研究. 由于在一些决策过程中,往往会出现个别决策者受个人感情等主观因素的影响,对某些对象作出过高或过低的评价,

收稿日期:2005-05-18

资助项目:国家自然科学基金(70571087);中国博士后科学基金(2003034366)

作者简介:张洪美(1980 -),女,硕士生,研究方向:信息融合;徐泽水(1968 -),男,教授,博士后,研究方向:信息融合,决策分析.

因而会导致不合理的决策结果,文[7]中对 DOWAA 算子权重向量确定方法进行了概括,并且提出了基于正态分布的权重向量确定方法,该法具有许多很好的性质,如:赋予较大和较小的数据值较小的权重,而对靠近中间的数据值则赋予较大的权重,这样会尽可能地消除不公正因素(过高或过低的数据值)的影响,并增加中间值的作用. 文[8,9]则利用模糊量化算子[10]确定 DOWAA 算子和 DOWGA 算子的加权向量,并研究了基于该加权向量的 DOWAA 算子对若干互补判断矩阵进行集成所得的群判断矩阵是否仍具有互补性、以及基于该加权向量的 DOWGA 算子对若干互反判断矩阵进行集成所得的群判断矩阵是否仍具有互反性的问题. 本文对信息集成算子加权向量的对称性进行研究,提出了升序加权算术平均(AOWAA)算子和语言 AOWAA 算子,分别给出了 DOWAA 算子和 AOWAA 算子、DOWGA 算子和 AOWGA 算子、以及语言 DOWAA 算子和语言 AOWAA 算子的一个等价条件,并考虑基于对称性加权向量的信息集成算子在群决策中的应用. 最后探讨一些常用加权向量的对称性问题.

2 基本公式

为了方便起见,下面先给出一些基本概念:

定义 1[3] 设函数 $WAA: R^n \to R$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是一组给定的数据,若

$$WAA_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j a_j, \tag{1}$$

其中 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 是数据组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的权重向量, $w_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, R 为实数集. 则称函数 WAA 为加权算术平均算子.

定义 2[11] 设函数 $WGA: R^{+n} \to R^{+}$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是一组给定的数据,若

$$WGA_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} a_j^{w_j}, \tag{2}$$

其中 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 是数据组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的权重向量, $w_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, R^{+} 为正实数集. 则称函数 WGA 为加权几何平均算子.

定义 3[5] 设函数 $DOWAA: R^n \to R$,若

$$DOWAA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j, \tag{3}$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 $DOWAA$ 相关联的加权向量, $\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$,且 b_j 是一组数据 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 中第 j 大的元素. 则称函数 $DOWAA$ 为降序加权算术平均算子,其特点是:对数据 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 按从大到小的顺序重新排序后加权集成,且元素 a_i 与 ω_i 没有任何联系, ω_i 只与集成过程中的第 i 个位置有关.

定义 4[6,12] 设函数 $DOWGA: R^{+n} \to R^{+}$,若

$$DOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{\omega_j}, \tag{4}$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 $DOWGA$ 相关联的加权向量, $\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$,且 c_j 是一组数据 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 中第 j 大的元素. 则称函数 $DOWGA$ 为降序加权几何平均(DOWGA)算子.

定义 5[6] 设函数 $AOWGA: R^{+n} \to R^{+}$,若

$$AOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{\omega_j}, \tag{5}$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 $AOWGA$ 相关联的加权向量, $\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$,且 c_j 是一组数据

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$中第 j 小的元素. 则称函数 $AOWGA$ 为升序加权几何平均(AOWGA)算子.

文[13]对数据信息为语言变量的决策问题进行了研究,定义了语言评估标度 $S = \{s_\alpha \mid \alpha = -L, \cdots, L\}$, S 中的术语个数一般为奇数, s_α 表示语言变量,特别地, s_{-L} 和 s_L 分别表示决策者实际使用的语言变量的下限和上限. S 满足下列条件:

1) 若 $\alpha > \beta$,则 $s_\alpha > s_\beta$;

2) 存在负算子 $\mathrm{neg}(s_\alpha) = s_{-\alpha}$.

例如, S 可取

$$S = \{s_{-4} = \text{极差}, s_{-3} = \text{很差}, s_{-2} = \text{差}, s_{-1} = \text{稍差}, s_0 = \text{一般}, s_1 = \text{稍好}, s_2 = \text{好}, s_3 = \text{很好}, s_4 = \text{极好}\}$$

为了便于计算和避免丢失决策信息,文[13]在原有标度的基础上定义一个拓展标度 $\bar{S} = \{s_\alpha \mid \alpha \in [-q, q]\}$,其中 $q(q > L)$是一个充分大的自然数,若 $\alpha \in [-L, \cdots, L]$,则称 s_α 为本原术语;若 $\alpha \notin \{-L, \cdots, L\}$,则称 s_α 为拓展术语,拓展后的标度仍满足条件 1)和 2).

设 $s_\alpha, s_\beta \in \bar{S}$, $y, y_1, y_2 \in [0,1]$,则语言评估标度的运算法则为[13]

1) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha+\beta}$;

2) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha$;

3) $y s_\alpha = s_{y\alpha}$;

4) $y(s_\alpha \oplus s_\beta) = y s_\alpha \oplus y s_\beta$.

定义 6[13]　设函数 $LWAA: \bar{S}^n \to \bar{S}$,若

$$LWAA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = w_1 s_{\alpha_1} \oplus w_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\alpha_n}, \tag{6}$$

其中 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$,是语言数据组$(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n})$的权重向量, $s_{\alpha_j} \in \bar{S}$, $w_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. 则称函数 $LWAA$ 为语言加权算术平均算子.

定义 7[13]　设函数 $LDOWAA: \bar{S}^n \to S$,若

$$LDOWAA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n}, \tag{7}$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 $LDOWAA$ 相关联的加权向量, $\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$,且 s_{β_j} 是语言数据组$(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n})$中第 j 大的元素. 则称函数 $LDOWAA$ 为语言 LDOWAA 算子.

3　主要结果

基于 DOWAA 算子和语言 DOWAA 算子,下面分别给出一种升序加权算术平均(AOWAA)算子和语言 AOWAA 算子:

定义 8　设函数 $AOWAA: R^n \to R$,若

$$AOWAA_\omega(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j', \tag{8}$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 $AOWAA$ 相关联的加权向量, $\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$,且 b_j' 是一组数据$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$中第 j 小的元素. 则称函数 $AOWAA$ 为升序加权算术平均算子.

定义 9　设函数 $LAOWAA: \bar{S}^n \to S$,若

$$LAOWAA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = \omega_1 s_{\beta_1'} \oplus \omega_2 s_{\beta_2'} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n'}, \tag{9}$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 $LAOWAA$ 相关联的加权向量, $\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$,且 $s_{\beta_j'}$ 是语言数

据组 $(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n})$ 中第 j 小的元素. 则称函数 $LAOWAA$ 为语言 AOWAA 算子.

定义 10 设加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$, 若对任意 j, 有 $\omega_j = \omega_{n-1-j}$, 则称该加权向量 ω 是对称性的.

定理 1 对任意的对称加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$, DOWAA 算子和 AOWAA 算子是等价的, 即

$$DOWAA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = AOWAA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{10}$$

证明 由于加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是对称的, 即对任意 j, 有 $\omega_j = \omega_{n+1-j}$, 因此, 有:

1) 若 n 是偶数, 则

$$\begin{aligned} DOWAA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (\omega_j b_j + \omega_{n+1-j} b_{n+1-j}) = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (\omega_j b_{n+1-j} + \omega_{n+1-j} b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{n+1-j} = AOWAA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

2) 若 n 是奇数, 则

$$\begin{aligned} DOWAA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (\omega_j b_j + \omega_{n+1-j} b_{n+1-j}) + w_{\frac{n+1}{2}} b_{\frac{n+1}{2}} \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (\omega_j b_{n+1-j} + \omega_{n+1-j} b_j) + w_{\frac{n+1}{2}} b_{\frac{n+1}{2}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{n+1-j} = AOWAA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

因此, 对任意的对称加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$, (10) 式均成立.

定理 2 对任意的对称加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$, DOWGA 算子和 AOWGA 算子是等价的, 即

$$DOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = AOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{11}$$

证明 由于加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是对称的, 即对任意 j, 有 $\omega_j = \omega_{n+1-j}$, 因此, 有:

1) 若 n 是偶数, 则

$$\begin{aligned} DOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \prod_{j=1}^{n} c_j^{\omega_j} = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} (c_j^{\omega_j} c_{n+1-j}^{\omega_{n+1-j}}) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} (c_{n+1-j}^{\omega_j} c_j^{\omega_{n+1-j}}) \\ &= \prod_{j=1}^{n} c_{n+1-j}^{\omega_j} = AOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

2) 若 n 是奇数, 则

$$\begin{aligned} DOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n) &= \prod_{j=1}^{n} c_j^{\omega_j} = \left(\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (c_j^{\omega_j} c_{n+1-j}^{\omega_{n+1-j}}) \right) c_{(n+1)/2}^{w_{(n+1)/2}} = \left(\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (c_{n+1-j}^{\omega_j} c_j^{\omega_{n+1-j}}) \right) c_{(n+1)/2}^{w_{(n+1)/2}} \\ &= \prod_{j=1}^{n} c_{n+1-j}^{\omega_j} = AOWGA_{\omega}(a_1, a_2, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

因此, 对任意的对称加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$, (11) 式均成立.

类似定理 1, 可证下列结论:

定理 3 对任意的对称加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$, 语言 DOWAA 算子和语言 AOWAA 算子是等价的, 即

$$LDOWAA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = LAOWAA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}). \tag{12}$$

下面考虑基于对称加权向量的信息集成算子在几种群决策问题中的应用:

定理 4 对于某一群决策问题, 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为方案集, $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 为决策者集. 假设决策者 e_k 利用互补标度[14] 对方案进行两两比较, 并构造互补判断矩阵 $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, 其

中，$a_{ij}^{(k)}$ 表示决策者 e_k 认为方案 x_i 优于方案 x_j 的偏好度，$a_{ij}^{(k)} \geq 0$，$a_{ij}^{(k)} + a_{ji}^{(k)} = 1$，$a_{ii}^{(k)} = 0.5$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$. 则利用基于对称加权向量的 DOWAA 算子集成所得到的群决策矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 仍为互补判断矩阵.

证明　设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为 DOWAA 算子的加权向量，利用 DOWAA 算子对互补判断矩阵 $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ 进行集成，得 $A = (a_{ij})_{n \times n}$，其中

$$a_{ij} = DOWAA_{\omega}(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(m)}) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k b_{ij}^{(k)}, i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$b_{ij}^{(k)}$ 是 $(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(m)})$ 中第 k 大的元素. 由于 $b_{ij}^{(k)} + b_{ji}^{(k)} = 1$，所以 $b_{ji}^{(k)}$ 是 $(a_{ji}^{(1)}, a_{ji}^{(2)}, \cdots, a_{ji}^{(m)})$ 中第 k 小的元素. 根据题意，加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$ 是对称的，即对任意 k，有 $\omega_k = \omega_{n+1-k}$，因此

$$\begin{aligned} a_{ij} + a_{ji} &= DOWAA_{\omega}(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(m)}) + DOWAA_{\omega}(a_{ji}^{(1)}, a_{ji}^{(2)}, \cdots, a_{ji}^{(m)}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \omega_k b_{ij}^{(k)} + \sum_{k=1}^{m} \omega_{m-k+1} b_{ji}^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \omega_k b_{ij}^{(k)} + \sum_{k=1}^{m} \omega_k b_{ji}^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \omega_k (b_{ij}^{(k)} + b_{ji}^{(k)}) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k = 1, i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

由于对任意 i, j，有 $a_{ij}^{(k)} \geq 0$，且 $a_{ii}^{(k)} = 0.5$，因此

$$a_{ij} = DOWAA_{\omega}(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(m)}) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k b_{ij}^{(k)} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$a_{ii} = DOWAA_{\omega}(a_{ii}^{(1)}, a_{ii}^{(2)}, \cdots, a_{ii}^{(m)}) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k b_{ii}^{(k)} = 0.5 \sum_{k=1}^{m} \omega_k = 0.5, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

从而群决策矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为互补判断矩阵.

定理 5　对于某一群决策问题，假设决策者 $e_k \in E$ 利用互反标度[13] 对 X 中方案进行两两比较，并构造互反判断矩阵 $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{n \times n}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$，其中，$r_{ij}^{(k)} > 0$，$r_{ij}^{(k)} r_{ji}^{(k)} = 1$，$r_{ii}^{(k)} = 1$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$. 则利用基于对称加权向量的 DOWGA 算子集成所得到的群决策矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 仍为互反判断矩阵.

证明　设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为 DOWGA 算子的加权向量，利用 DOWGA 算子对互反判断矩阵 $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{n \times n}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ 进行集成，得 $R = (r_{ij})_{n \times n}$，其中

$$r_{ij} = DOWGA_{\omega}(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \cdots, r_{ij}^{(m)}) = \prod_{k=1}^{m} (c_{ij}^{(k)})^{\omega_k}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$c_{ij}^{(k)}$ 是 $(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \cdots, r_{ij}^{(m)})$ 中第 k 大的元素. 由于 $c_{ij}^{(k)} c_{ji}^{(k)} = 1$，所以 $c_{ji}^{(k)}$ 是 $(r_{ji}^{(1)}, r_{ji}^{(2)}, \cdots, r_{ji}^{(m)})$ 中第 k 小的元素. 根据题意，加权向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$ 是对称的，即对任意 k，有 $\omega_k = \omega_{n+1-k}$，因此

$$\begin{aligned} r_{ij} r_{ji} &= DOWGA_{\omega}(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \cdots, r_{ij}^{(m)}) \cdot DOWGA_{\omega}(r_{ji}^{(1)}, r_{ji}^{(2)}, \cdots, r_{ji}^{(m)}) \\ &= \prod_{k=1}^{m} (c_{ij}^{(k)})^{\omega_k} \cdot \prod_{k=1}^{m} (c_{ji}^{(k)})^{\omega_{m-k+1}} = \prod_{k=1}^{m} (c_{ij}^{(k)})^{\omega_k} \cdot \prod_{k=1}^{m} (c_{ji}^{(k)})^{\omega_k} \\ &= \prod_{k=1}^{m} (c_{ij}^{(k)} c_{ji}^{(k)})^{\omega_k} = 1, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

由于对任意 i, j，有 $r_{ij}^{(k)} > 0$，且 $r_{ii}^{(k)} = 1$，因此

$$r_{ij} = DOWGA_{\omega}(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \cdots, r_{ij}^{(m)}) = \prod_{k=1}^{m} (c_{ij}^{(k)})^{\omega_k} > 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$r_{ii} = DOWGA_{\omega}(r_{ii}^{(1)}, r_{ii}^{(2)}, \cdots, r_{ii}^{(m)}) = \prod_{k=1}^{m} (c_{ii}^{(k)})^{\omega_k} = 1, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

从而群决策矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 为互反判断矩阵.

类似定理 4，可证下列结论：

定理 6　对于某一群决策问题，假设决策者 $e_k \in E$ 利用语言评估标度 S 对 X 中方案进行两两比较，并构造语言互补判断矩阵 $P_k = (p_{ij}^{(k)})_{n \times n}$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$，其中，$s_{-L} \leq p_{ij}^{(k)} \leq s_L$，$p_{ij}^{(k)} \oplus p_{ji}^{(k)} = s_0$，$p_{ii}^{(k)} = s_0$，$i, j$

$=1,2,\cdots,n$. 则利用基于对称加权向量的语言 DOWGA 算子集成所得到的群决策矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 仍为语言互补判断矩阵.

最后,我们讨论一些常见的加权向量满足对称性的条件,并对部分结论进行详细证明:

1) 设 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为加权向量,其中

$$\omega_i=\frac{e^{-\frac{\left(i-\frac{1+n}{2}\right)^2}{2\sigma_n^2}}}{\sum_{j=1}^{n}e^{-\frac{\left(j-\frac{1+n}{2}\right)^2}{2\sigma_n^2}}},\sigma_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1+n}{2}\right)^2},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 ω 是对称的,详细证明可参见文[7].

2) 设 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为加权向量,其中

$$\omega_k=Q\left(\frac{k}{m}\right)-Q\left(\frac{k-1}{m}\right),Q(r)=\begin{cases}0, & 0\le r<a\\ \dfrac{r-a}{b-a}, & a\le r\le b,\quad a,b\in[0,1]\\ 1, & b<r\le 1\end{cases}$$

且 Q 为模糊量化算子[10],则 ω 满足对称性的充要条件是 $a+b=1$. 详细证明可参见文[8].

3) 设 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为加权向量,其中[14]

$$\omega_i=\begin{cases}0, & i<k\\ \dfrac{1}{m}, & k\le i\le k+m,\quad k,m\text{ 为正整数,且 } k+m\le n+1\\ 0, & i\ge k+m\end{cases}$$

则 ω 满足对称性的充分条件是: $2k+m-1=n+1$.

证明(充分性) i) 当 $i<k$ 时,$\omega_k=0$,因为

$$n+1-i=2k+m-i>2k+m-1-k=k+m-1$$

即当 $n+1-i\ge k+m$ 时,$\omega_{n+1-i}=0$,因此,$\omega_i=\omega_{n+1-i}$.

ii) 当 $k\le i\le k+m$ 时,$\omega_i=\frac{1}{m}$,因此

$$n+1-i=2k+m-1-i>2k+m-1-(k+m)=k-1$$

即 $n+1-i\ge k$,又因为

$$n+1-i=2k+m-1-i\le 2k+m-1-k=k+m-1$$

即 $n+1-i<k+m$. 因此,当 $k\le n+1-i<k+m$ 时,有 $\omega_{n+1-i}=\frac{1}{m}$,即 $\omega_i=\omega_{n+1-i}$.

iii) 当 $i\ge k+m$ 时,$\omega_i=0$,因此

$$n+1-i=2k+m-1-i\le 2k+m-1-(k+m)=k-1$$

即当 $n+1-i<k$,有 $\omega_{n+1-i}=0$,因此 $\omega_i=\omega_{n+1-i}$.

(必要性) 因为 $\omega_i=\omega_{n+1-i}$,因此

i) 当 $k=1$ 时

$$\omega_i=\begin{cases}0, & i<1\\ \dfrac{1}{m}, & 1\le i\le 1+m,\quad m\text{ 为正整数,且 } 1+m\le n+1\\ 0, & i\ge 1+m\end{cases}$$

因为 $\omega_1=\frac{1}{m}$,所以 $\omega_n=\omega_1=\frac{1}{m}$,即

$$m=n,2k+m-1=2+m-1=2+n-1=n+1$$

ii) 当 $k\ge 2$ 时,有

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{k-1} = 0, \omega_k = \omega_{k+1} = \cdots = \omega_{k+m-1} = \frac{1}{m},$$
$$\omega_{k+m} = \omega_{k+m+1} = \cdots = \omega_n = 0.$$

因为 $\omega_i = \omega_{n+1-i}$,所以 $k-1 = n-(k+m-1)$ 且 $k+(k+m-1) = n+1$,即 $2k+m-1 = n+1$.

4) 设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为加权向量,其中[14]

$$\omega_i = \begin{cases} 0, & i < k-m \\ \dfrac{1}{2m+1}, & k-m \le i \le k+m, \quad k,m \text{为正整数,且 } k+m \le n+1, k \ge m+1, \\ 0, & i \ge k+m \end{cases}$$

则 ω 满足对称性的充要条件是: n 为奇数且 $k = \frac{n+1}{2}$.

证明(充分性) 若 n 为奇数且 $k = \frac{n+1}{2}$,则

$$(k-m-1)+(k+m+1) = 2k = 2\cdot\frac{n+1}{2} = n+1 \text{ 且 } k-m+(k+m) = 2k = n+1,$$

所以 ω 满足对称性.

(必要性) 若 $\omega_i = \omega_{n+1-i}$,则

$$(k-m-1)+(k+m+1) = n+1 \text{ 且 } k-m+(k+m) = n+1,$$

即 $k = \frac{n+1}{2}$,因此,若 n 为偶数,则 $n+1$ 为奇数,$\frac{n+1}{2}$ 不是整数,与 k 为整数矛盾.因此,加权向量 ω 要满足对称性则 n 必为奇数且 $k = \frac{n+1}{2}$.

5) 设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为加权向量,其中[14]

$$\omega_i = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & i \le k \\ 0, & i > k \end{cases},$$

则 ω 满足对称性的充要条件是 $k = n$.

证明(充分性) 若 $k = n$,则对任意 i,有 $\omega_i = \frac{1}{n}$,因此,对任意 i,可得

$$\omega_i = \omega_{n+1-i} = \frac{1}{n},$$

因此,ω 满足对称性.

(必要性) 若 ω 是对称性的,即 $\omega_i = \omega_{n+1-i}$,则 $\omega_n = \omega_1 = \frac{1}{k}$,所以 $k = n$.

类似5),可证明下列结论:

6) 设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$ 为加权向量,其中[14]

$$\omega_i = \begin{cases} 0, & i < k \\ \dfrac{1}{(n+1)-k}, & i \ge k \end{cases}.$$

则 ω 满足对称性的充要条件是 $k = 1$.

4 结束语

本文对信息集成算子加权向量的对称性进行了研究,提出了升序加权算术平均(AOWAA)算子和语言AOWAA算子,且分别给出了DOWAA算子和AOWAA算子、DOWGA算子和AOWGA算子、以及语言DOWAA算子和语言AOWAA算子的一个等价条件,并把基于对称性加权向量的信息集成算子应用于群决

策,从而丰富和发展了有序集成算子理论,并为其在群决策中的应用奠定了基础. 最后探讨了一些常用加权向量的对称性问题.

参考文献:

[1] Yager R R, Kacprzyk J. The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications[M]. Norwell MA: Kluwer, 1997.

[2] Calvo T, Mayor G, Mesiar R. Aggregation Operators: New Trends and Applications[M]. Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 2002.

[3] Xu Z S, Da Q L. An overview of operators for aggregating information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18(9): 953 - 969.

[4] Torra V. Information Fusion in Data Mining[M]. New York: Physica-Verlag; 2003.

[5] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(1): 183 - 190.

[6] Xu Z S, Da Q L. The ordered weighted geometric averaging operators[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17(7): 709 - 716.

[7] Xu Z S. An overview of methods for determining OWA weights[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20(8): 843 - 865.

[8] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E, Martinez L. A note on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using OWA operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 137(1): 71 - 83.

[9] Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. A study of origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18(6): 689 - 707.

[10] Zadeh L A. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1983, 9(1): 149 - 184.

[11] Aczél J, Saaty T L. Procedures for synthesizing ratio judgments[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1983, 27(1): 93 - 102.

[12] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 277 - 291.

[13] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.
Xu Z S. Uncertain Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[14] Yager R R. Families of OWA operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 59(2): 125 - 145.