Γ 分布参数估计的损失函数和风险函数的 Bayes 推断

刘焕香[1,2], 董晓娜[3], 师义民[1], 张素梅[1]
(1.西北工业大学 应用数学系,陕西 西安 710072; 2.绍兴文理学院 数学系,浙江 绍兴 312000)
(3.黄河水利职业技术学校 基础部数理教研室, 河南 开封 475001)

摘要: 在共轭先验分布下本文给出了 Γ 分布 $\Gamma(r,\theta)$ 中参数 $1/\theta$ 的估计的损失函数和风险函数不同的 Bayes 估计,并讨论了各种 Bayes 估计的性质, 进而指出各种 Bayes 估计的合理性.

关键词: Γ 分布;保守估计;Bayes 估计;损失函数;风险函数
中图分类号:O212.8　**文献标识码**:A　**文章编号**:1007-855X(2005)02-0112-03

Bayes Inference for Loss and Risk Function of Distribution Parameter Estimators

LIU Huan-xiang[1,2], DONG Xiao-na[3], SHI Yi-min[1], ZHANG Su-mei[1]
(1.Department of Applied Mathematics, North western Polytechnical University, Xi'an 710072,China; 2.Dept. of Math., Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing Zhejiang 312000;China 3.Teaching Research Office of Mathematics and Physics, Department of Basic Course, Yellow River Conservancy Vocational Technical College, Kaifeng, Henan 475001, China)

Abstract: Under the conjugate prior distribution, the Bayes estimators of the loss function and risk function for the estimators of Parameter $1/\theta$ of $\Gamma(r,\theta)$ are investigated. Then the property and the rationality of the Bayes estimators are discussed.

Key words: Γ distribution; conservative estimation; Bayes estimation; loss function; risk function

0 引 言

在统计决策中, $d=\delta(x)$ 作为未知参数 θ 的估计会带来一定的损失,记做 $w(\theta,d)$,它表示了决策 $\delta(x)$ 的精确程度.但 $w(\theta,d)$ 是 θ 的函数且不可观察,故有必要对损失 $w(\theta,d)$ 作一个精度估计.而依赖于观察数据 x 的精度估计,文献[5][6]作了讨论并给出例子.设 γ 是损失函数 $w(\theta,d)$ 的估计,[1]引入新的损失函数 $L(\theta;\delta,\gamma)=w(\theta,\delta)\gamma^{-1/2}+\gamma^{1/2}$,它把决策问题中的估计误差 $w(\theta,d)$ 和其精度估计 γ 结合起来. 对于此损失函数, [1] 给出如下结论:① 对于给定的 $d=\delta(x)$, 由于 $L(\theta;\delta,\gamma)\geq 2\sqrt{w(\theta,d)\gamma^{-1/2}\gamma^{1/2}}$,所以,当 $\gamma=w(\theta,d)$ 时 $L(\theta;\delta,\gamma)$ 取到最小值;② 对于给定的 $\gamma\geq 0$,由于 $L(\theta;\delta,\gamma)$ 是 $w(\theta,\delta)$ 的线性函数,所以 θ 的 Bayes 估计 $\delta_B(x)$ 关于损失函数 $w(\theta,\delta)$ 与关于损失 $L(\theta;\delta,\gamma)$ 是一样的,于是 γ 关于 $L(\theta;\delta,\gamma)$ 的 Bayes 估计 $\gamma_B(x)$ 恰好是 $\delta_B(x)$ 的后验损失,即 $\gamma_B(x)=E[w(\theta,\delta_B)\mid x]$.

对于二项参数的损失函数, [2] 给出了它在 $L(\theta;\delta,\gamma)$ 下的 Bayes 估计,并讨论其性质.项志华在[3]中给出 Poisson 分布和指数分布损失函数的 Bayes 估计及性质.李杨在[4] 中研究了正态分布均值的损失函数的 Bayes 统计推断问题.本文在共轭先验分布及无信息先验分布下得到 Γ 分布损失函数的 Bayes 估计,并在保守估计的要求下研究了它们的性质,最后讨论了不同情况下 Bayes 估计的合理性. 而且项志华研究的指数分布的情况是本文的一个特例.

定义 1　设 $\gamma(x)$ 是未知参数 θ 的损失函数 $w(\theta,\delta)$ 的估计,称 γ 是一个保守估计,如果它满足:

收稿日期:2004-11-18.**基金项目**:陕西省教育厅自然科学基金资助项目(项目编号:03JK065).
第一作者简介:刘焕香(1976~),女,在读硕士研究生.研究方向: 应用概率统计,可靠性理论及应用.**E-mail**:liuhuanxiang2046@126.com.

$$E_\theta(\gamma(x) \geq R(\theta,\delta) = E_\theta(w(\theta,\delta))$$

1 Bayes 估计及其性质

1.1 损失函数的 Bayes 估计

设 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是来自 Γ 分布 $\Gamma(r,\theta)$ 的一个样本，r 已知，则样本的联合密度函数为

$$f(x \mid \theta) = \frac{\theta^{nr}\prod_{i=1}^{n} x_i^{(r-1)} e^{-\theta y}}{[\Gamma(r)]^n},\ x_i \geq 0$$

其中 $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$，记 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$，易知 y 服从 $\Gamma(nr,\theta)$，$Ey = \frac{nr}{\theta}$，$Dy = \frac{nr}{\theta^2}$，$Ey^2 = \frac{nr + n^2r^2}{\theta^2}$.

若 θ 取的共轭先验分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$，其密度函数为

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)},\ \theta \geq 0$$

则 θ 的后验密度为 $\pi(\theta \mid x) \propto \theta^{nr+\alpha-1}e^{-\theta(y+\beta)}$，$\theta \geq 0$ 即服从 $\Gamma(nr+\alpha,y+\beta)$.

由于人们通常对 $\frac{1}{\theta}$ 感兴趣，所以我们给出在二次损失 $w(1/\theta,d) = (1/\theta - d)^2$(其中 d 是的 $\frac{1}{\theta}$ 估计)下 $\frac{1}{\theta}$ 的 Bayes 估计 $\delta_B(x) = E(\frac{1}{\theta} \mid x) = \frac{y+\beta}{nr+\alpha-1}$，也可求得 $E(\frac{1}{\theta^2} \mid x) = \frac{(y+\beta)^2}{(nr+\alpha-1)(nr+\alpha-2)}$.

设 $w(\frac{1}{\theta},d)$ 的估计记为 $\gamma(x)$，则 $w(\frac{1}{\theta},d)$ 关于损失函数 $L(\theta;\delta,\gamma) = w(\theta,\delta)\gamma^{-1/2} + \gamma^{1/2}$ 的 Bayes 估计为

$$\gamma_B(x) = E[w(\frac{1}{\theta},\delta_B) \mid x] = E[(\frac{1}{\theta} - \delta_B)^2 \mid x] = D(\frac{1}{\theta} \mid x)$$
$$= \frac{(y+\beta)^2}{(nr+\alpha-1)^2(nr-\alpha-2)}$$

从而

$$E_\theta\gamma_B(x) = \frac{E(y^2+\beta^2+2\beta y)}{(nr+\alpha-1)^2(nr+\alpha-2)} = \frac{\frac{nr+n^2r^2}{\theta^2} + \beta^2 + 2\beta\frac{nr}{\theta}}{(nr+\alpha-1)^2(nr+\alpha-2)}$$
$$= \frac{\beta^2\theta^2 + 2\beta nr\theta + nr(nr+1)}{(nr+\alpha-1)^2(nr+\alpha-2)\theta^2}$$

$$R(\frac{1}{\theta},\delta_B) = E_\theta[w(\frac{1}{\theta},\delta_B)] = E_\theta(\frac{y+\beta}{nr+\alpha-1} - \frac{1}{\theta})^2$$
$$= \frac{1}{(nr+\alpha-1)^2\theta^2}E_\theta[\theta^2y^2 + (\theta\beta - nr - \alpha + 1)^2 + 2(\theta\beta - nr - \alpha + 1)\theta y]$$
$$= \frac{1}{(nr+\alpha-1)^2\theta^2}[\theta^2\frac{nr+n^2r^2}{\theta^2} + (\theta\beta - nr - \alpha + 1)^2 + 2(\theta\beta - nr - \alpha + 1)\theta\frac{nr}{\theta}]$$
$$= \frac{1}{(nr+\alpha-1)^2\theta^2}[nr + (\theta\beta - \alpha + 1)^2]$$

1.2 风险函数的估计

决策 $d = \delta(x)$ 的平均损失 $R(\frac{1}{\theta},\delta) = E_\theta[w(\frac{1}{\theta},\delta)]$ 是未知参数 θ 的函数，所以对 $R(\frac{1}{\theta},\delta)$ 可以做估计.考虑到 $R(\frac{1}{\theta},\delta)$ 是 $w(\frac{1}{\theta},\delta)$ 的均值，因此可以把 $R(\frac{1}{\theta},\delta)$ 的估计作为 $w(\frac{1}{\theta},\delta)$ 的估计.在二次损失下，$R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$ 的 Bayes 估计为

$$\phi(\delta_B) = E[R(\frac{1}{\theta},\delta_B) \mid x] = E[\frac{nr + (\theta\beta - \alpha + 1)^2}{(nr+\alpha-1)^2\theta^2} \mid x]$$
$$= \frac{1}{(nr+\alpha-1)^2}E\{[(nr + (\alpha -)^2)\frac{1}{\theta^2} + \beta^2 - 2(\alpha - 1)\beta\frac{1}{\theta}] \mid x\}$$

$$= \frac{[nr+(\alpha-1)^2](y+\beta)^2+\beta^2(nr+\alpha-1)(nr+\alpha-2)-2(\alpha-1)\beta(y+\beta)(nr+\alpha-2)}{(nr+\alpha-1)^3(nr+\alpha-2)}$$

1.3 估计的性质

下面考查 $\gamma_B(x)$ 与 $\phi(\delta_B)$ 是否为保守估计,为方便起见,假设 $nr>2,\alpha\geq 0,\beta\geq 0$.

定理 1 当 $\beta=0$ 时,(i) 若 $0\leq\alpha\leq 2$, 则 $E_\theta\phi(\delta_B)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B),E_\theta\gamma_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\phi(\delta_B)$ 与 $\gamma_B(x)$ 都是保守估计,等号成立当且仅当 $\alpha=2$;(ii) 若 $\alpha>2$, 则 $E_\theta\phi(\delta_B)<R(\frac{1}{\theta},\delta_B),E_\theta\gamma_B(x)<R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\phi(\delta_B)$ 与 $\gamma_B(x)$ 都不是保守估计.

证明: 当 $\beta=0$ 时,可得

$$E_\theta\gamma_B(x)=\frac{nr(nr+1)}{(nr+\alpha-1)^2(nr+\alpha-2)\theta^2},\ R(\frac{1}{\theta},\delta_B)=\frac{nr+(\alpha-1)^2}{(nr+\alpha-1)^2\theta^2}$$

$$\phi(\delta_B)=\frac{[nr+(\alpha-1)^2]y^2}{(nr+\alpha-1)^3(nr+\alpha-2)\theta^2},\ E_\theta\phi(\delta_B)=\frac{[nr+(\alpha-1)^2]nr(nr+1)}{(nr+\alpha-1)^3(nr+\alpha-2)\theta^2}$$

若使 $E_\theta\phi(\delta_B)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,须使 $nr(nr+1)\geq(nr+\alpha-1)(nr+\alpha-2)$,即$(\alpha-2)(\alpha+2nr-1)\leq 0$.所以当 $0\leq\alpha\leq 2$ 时,$E_\theta\phi(\delta_B)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\phi(\delta_B)$ 是保守估计;当 $\alpha>2$ 时,$E_\theta\phi(\delta_B)<R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\phi(S_B)$ 不是保守估计.若使 $E_\theta\gamma_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,须使 $nr(nr+1)\geq[nr+(\alpha-1)]^2(nr+\alpha-2)$,即$(\alpha-2)[\alpha^2+(nr-2)\alpha+nr+1]\leq 0$.所以当 $0\leq\alpha\leq 2$ 时,$E_\theta\gamma_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\gamma_B(x)$ 是保守估计;当 $\alpha>2$ 时,$E_\theta\gamma_B(x)<R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\gamma_B(x)$ 不是保守估计.

定理 2 当 $\alpha=0$ 时,(i) 对任何 $\beta>0,E_\theta\phi(\delta_B)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\phi(\delta_B)$ 是保守估计;(ii) 若 $2<nr\leqslant 3$, 则对任何 $\beta>0,E_\theta\gamma_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$, 即 $\gamma_B(x)$ 是保守估计; 若 $nr>3$, 记 $c_1=\frac{2+\sqrt{2(n^2r^2-2nr-1)}}{nr-3}$,则当 $0\leq\beta\leq c_1/\theta$ 时,$E_\theta\gamma_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$, 即 $\gamma_B(x)$ 是保守估计;当 $\beta>c_1/\theta$ 时,$E_\theta\gamma_B(x)<R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\gamma_B(x)$ 不是保守估计.

证明: 当 $\alpha=0$ 时,可得

$$E_\theta\gamma_B(x)=\frac{\beta^2\theta^2+2\beta nr\theta+nr(nr+1)}{(nr-1)^2(nr-2)\theta^2},\ \phi(\delta_B)=\frac{(nr+1)y^2+2\beta(2nr-1)y+\beta^2(n^2r^2-1)}{(nr-1)^3(nr-2)}$$

$$R(\frac{1}{\theta},\delta_B)=\frac{nr+(\theta\beta+1)^2}{(nr-1)^2\theta^2},\ E_\theta\phi(\delta_B)=\frac{nr(nr+1)^2+2\beta nr(2nr-1)\theta+\beta^2\theta^2(n^2r^2-1)}{(nr-1)^3(nr-2)\theta^2}$$

若使 $E_\theta\phi(\delta_B)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,须使 $nr(nr+1)^2+2\beta nr(2nr-1)\theta+\beta^2\theta^2(n^2r^2-1)\geq(nr-1)(nr-2)[nr+(\theta\beta+1)^2]$,即 $3\beta^2\theta^2(nr-1)+2\theta\beta(n^2r^2+2nr-2)+2(nr+1)(2nr-1)\geq 0$.所以对任何 $\beta>0$,上式成立从而 $E_\theta\phi(\delta_B)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,即 $\phi(\delta_B)$ 是保守估计.若使 $E_\theta\,\theta_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$,须使 $\beta^2\theta^2+2\beta nr\theta+nr(nr+1)\geq(nr-2)[nr+(\theta\beta+1)^2]$,此式化为 $\beta^2\theta^2(3-nr)+4\beta\theta+2(nr+1)\geq 0$.所以当 $2<nr\leq 3$ 时,对任何 $\beta>0,E_\theta\gamma_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$, 即 $\gamma_B(x)$ 是保守估计. 若 $nr>3$, 记 $c_1=\frac{2+\sqrt{2(n^2r^2-2nr-2)}}{nr-3}$,则当 $0\leq\beta\leq c_1/\theta$ 时,$E_\theta\gamma_B(x)\geq R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$, 即 $\gamma_B(x)$ 是保守估计;当 $\beta>c_1/\theta$ 时,$E_\theta\gamma_\beta(x)<R(\frac{1}{\theta},\delta_B)$, 即 $\gamma_B(x)$ 不是保守估计.

(下转第 118 页)

3 结 论

1) 在基液中加入 $Ce_2(SO_4)_3$ 后,对镀液电导率有微小提高,对提高镀液稳定性有一定的贡献,有利于提高镀液稳定性,有利于提高镀液分散力,但当 $Ce_3(SO_4)_2$ 达到一定浓度后,镀液分散力不再有明显提高.

2) 在基液中加入 $Ce(SO_4)_2$ 后,对铁的沉积则有明显的阻化作用,降低了镀层中的铁含量.

3) 不同浓度的 $Ce_2(SO_4)_3$ 会不同程度地增加电沉积过程阴极极化,但 $Ce_3(SO_4)_2$ 达到一定浓度后,阴极极化作用增加的程度变得缓慢.

4) 在基液中加入少量 $Ce(SO_4)_2$ 后,镀层在 pH = 7 的 5%NaCl 溶液中的耐蚀性比 Zn - Fe 合金镀层又有较大提高,比纯 Zn 镀层则有很大提高.

参考文献:

[1] 石金声.电镀化学基础[M].天津.天津科学技术出版社,1999.369~376.
[2] 沈品华,屠振密.电镀锌及锌合金[M].北京.机械工业出版社,2001. 210~281.
[3] 张昭.电镀 Zn - Fe 合金的发展现状[J].电镀与环保,1998,18(5):11~14.
[4] 吴俊琳.微量添加稀土对锌基镀层的影响[J].上海有色冶金,2002,(23):23~25.

(上接第 114 页)

注:特别地当 $\beta = 0, \alpha = 1$ 时 $\pi(\theta) \propto$ 常数,则 $\frac{1}{\theta}$ 的 Bayes 估计为 $\delta_B = \frac{\gamma}{nr} \hat{=} \frac{1}{\hat{\theta}}$ 恰为 $\frac{1}{\theta}$ 的极大似然估计, 由定理 1 知 $\gamma_B(x)$ 和 $\phi(\delta_B) \hat{=} \phi(\frac{1}{\hat{\theta}})$ 作为损失函数 $w(\frac{1}{\theta}, d)$ 的估计都是保守估计.

2 估计的合理性

根据上节讨论并考虑到 $\gamma_B(x)$ 的简捷性,关于损失函数 $w(\frac{1}{\theta}, d)$ 的估计可得如下结论:若取 $\beta = 0$ 对应的先验分布,取 $\gamma_B(x)$ 较为合理;若取 $\beta > 0$ 对应的先验分布,β 较小时取 $\gamma_B(x)$,β 较大时取 $\phi(\frac{1}{\hat{\theta}})$ 或 $\phi(\delta_B)$ 较为合理.若 $\alpha = 0, \beta = 0$ 即取无信息先验分布,或 $\beta = 0, \alpha = 1$,对应的广义先验分布,$\gamma_B(x)$ 与 $\phi(\delta_B)$ 都是保守估计,由于简捷性取 $\gamma_B(x)$ 更为合理些.

参考文献:

[1] Rukhin A L. Estimated loss and admissible loss estimators[J]. In Proceedings of Forth Purdue Symposium on Decision Theory, Ed.J.O. Berger and S.S.Gupta, Berlin:Springer - Verlag,1987,(1)365~375.
[2] Rukhin A L. Estimating the loss of estimators of a binomial parameter[J]. Biometrika,1988,75(1):153~155.
[3] 项志华.参数估计的损失函数和风险函数的 Bayes 推断[J]. 数理统计与应用概率,1993,8(3):25~30.
[4] 李杨.正态参数估计的损失函数和风险函数的 Bayes 推断[J].沈阳化工学院学报,2000,14(2):127~129.
[5] Kiefei J. Conditional confidence statements and confidence estimators [J].J.Am.Statist.Assoc,1977,(72):789~827.
[6] Berger J. The frequentist viewpoint and conditioning, in Proceedings of the Berkeley Conference in Honor of Jerzy Neyman and Jack Kidfer,Ed. L .Lecanm and R.olshen,1985:15~44.Belmont,Calif.Wadsworth.