

文章编号: 1000-6788(2009)06-0068-09

## 分数布朗运动下欧式汇率期权的定价

张卫国, 肖炜麟, 徐维军, 张惜丽

(华南理工大学 工商管理学院, 广州 510640)

**摘要** 应用风险偏好和均衡定价方法, 考虑了标的资产服从分数布朗运动下的汇率期权定价问题. 首先利用条件期望构建了条件过程的联合密度函数, 然后, 基于历史有限信息推导出分数欧式汇率期权的闭式解. 为了理解定价模型, 进一步分析了赫斯特指数对定价结果的影响. 最后, 给出了基于 GBP/USD 期权的实证研究. 不同模型的结果说明了汇率市场具有分形特性.

**关键词** 汇率期权; 分数布朗运动; 风险偏好; 条件期望

**中图分类号** F830.59

**文献标志码** A

## Pricing European currency options in a fractional Brownian environment

ZHANG Wei-guo, XIAO Wei-lin, XU Wei-jun, ZHANG Xi-li

(School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract** By applying risk preferences and equilibrium pricing approach, the problem of pricing currency options when the underlying asset follows a fractional Brownian process is considered in this paper. Firstly, the associated density of the conditional process is constructed using the conditional expectation. Then, an analytic solution for fractional European currency options is derived based on limited knowledge about the past. For the sake of understanding this pricing model, the influence of the Hurst parameter is also analyzed. Finally, an empirical study of GBP/USD option is presented. The pricing results of different models provide the evidence that the currency market has the fractal properties.

**Keywords** currency options; fractional Brownian motion; risk preference; conditional expectation

### 1 引言

汇率期权是一种以汇率或汇率相关产品为基础资产的合约. 汇率期权的持有者有权利而非义务在合约规定的某一特定时间以约定的汇率用一定数量的一种货币买入或卖出另一种货币. 该期权具有非线性收益的特征, 兼顾了投资、保值和规避风险的功能, 是一种较传统远期外汇交易更具灵活性的衍生产品.

期权价值的形成机理一直是金融工程研究的核心问题. 自上个世纪 Black-Scholes<sup>[1]</sup> 期权定价模型出现以来, 期权定价理论得到了空前的发展. 但是, 大量的实证研究表明市场交易中的期权价格与定价模型的理论价值存在着差异, 而又以汇率市场中的汇率期权的差异最为显著. Garman 和 Kohlhagen<sup>[2]</sup> 在假定汇率服

收稿日期: 2008-01-23

资助项目: 国家自然科学基金 (70825005; 70571024); 教育部新世纪优秀人才支持计划 (06-0749); 中国博士后科学基金 (2005037241); 教育部人文社会科学研究规划基金 (07JA630048)

作者简介: 张卫国, 华南理工大学工商管理学院教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程、决策理论与风险管理; 肖炜麟, 华南理工大学工商管理学院, 研究方向: 金融工程; 徐维军, 华南理工大学工商管理学院, 研究方向: 金融工程、在线金融算法设计; 张惜丽, 华南理工大学工商管理学院, 研究方向: 支持向量机算法研究.

从几何布朗运动下, 首次给出了汇率期权的定价公式. 然而近年来, 对资本市场的大量研究表明金融资产的对数收益率并非服从正态分布, 而是服从一种“尖峰厚尾”的分布, 而且金融资产价格之间也并非随机游走, 而是存在着长期相关性<sup>[3]</sup>. Peters<sup>[4]</sup> 提出分形市场假说, 应用 R/S 分析法分析了不同资本市场 (如股市收益率、汇率), 都发现了分形结构和非周期循环的存在. 由于分数布朗运动是一种高斯过程, 其性质主要有加法不变性、自相似性、厚尾性、不连续性以及长期相关性等, 这些性质使得分数布朗运动成为刻画金融资产价格变化过程的良好工具. 但分数布朗运动既不是马氏过程, 又不是半鞅, 故无法用通常定义的随机积分进行分析. 从而众多学者试图寻找一种新的积分来避免套利的存在. Duncan<sup>[5]</sup> 等建立了一个关于分数布朗运动的基于 Wick 乘积的随机积分, 称为分形 -Itô- 积分. 在分形 -Itô- 积分下, Hu<sup>[6]</sup> 和 Necula<sup>[7]</sup> 分析了分数布朗运动下的期权市场, 并给出了欧式期权在任意时刻的定价公式. 但是, Bender 和 Elliott<sup>[8]</sup> 通过引入离散 Wick 乘积说明了分数布朗运动下二元市场套利的存在. Björk 和 Hult<sup>[9]</sup> 进一步指出 Hu<sup>[6]</sup> 对自融资概念的定义不能对金融市场做出合理的解释, 且其关于 Wick 乘积的定义导致了套利的存在. 因而建立一种既能给出合理经济解释又能消除套利的积分似乎是很困难的, 甚至是不可能的. Cheidito<sup>[10]</sup> 指出构建合理的期望可以消除两个连续交易过程中小时间段的套利机会. 由此 Rostek 和 Schöbel<sup>[11]</sup> 通过引入条件数学期望, 对分形市场的风险偏好问题进行了研究. 我国学者<sup>[14-15]</sup> 在外汇期权和分形市场方面也作了许多贡献.

基于 Rostek 和 Schöbel<sup>[11]</sup> 提出的关于期权定价方法的风险偏好理论, 本文探讨了汇率服从分数布朗运动下的欧式汇率期权定价问题. 通过引入基于历史信息的偏好理论, 推导出分数布朗运动下的条件密度函数. 进而推导出分数布朗运动下汇率期权定价公式, 并针对赫斯特指数对定价公式的影响进行了分析. 最后采用金融时报网站 (FT) 上的 GBP/USD 看涨期权进行实证分析, 比较了不同模型的定价结果, 说明了分数布朗运动下定价模型的合理性.

## 2 分数布朗运动下欧式汇率期权定价模型

金融系统是一个自由度极大的复杂系统, 投资者一方面寻求规避风险策略, 另一方面为了得到高额利润而追求风险. 此外投资者不是在接受信息时立刻做出反映, 而是在信息达到一定临界值时才做出决策, 从而造成了金融资产收益率的“有偏”和“尖峰厚尾”等现象. Mandelbrot 认为这些现象体现了长记忆性的存在, 并提出用分数布朗运动来刻画金融资产的价格变化过程. 本文采用分数布朗运动来描述汇率的变化过程, 以期客观地反映汇率市场的现实.

### 2.1 模型假设

给定概率空间  $(\Omega, F^H, F_t^H, P_H)$  及其上的分数布朗运动  $B_H = \{B_{(t,\omega)}^H, t > 0\}$ , 其中,  $F_t^H = \sigma\{B_s^H, s \leq t\}$ , 且  $F_T^H = F^H$ . 我们对汇率市场作如下假设:

- 1) 市场是无摩擦, 即交易费用为零, 无税收, 且不存在套利机会;
- 2) 本国内的无风险利率  $r_d$  和国外利率  $r_f$  都是常数;
- 3) 没有对交易头寸方向的限制, 无卖空限制, 没有头寸大小、无流动性和时间限制;
- 4) 汇率变化动态过程服从分数布朗运动, 即  $t$  时刻本币兑外币汇率动态过程  $\{S_t : t \geq 0\}$  在风险中性测度  $Q$  下服从如下分布:

$$dS_t = \mu S_t dt + S_t \sigma dB_t^H, \quad 0 \leq t \leq T, S_0 = S \quad (1)$$

其中:  $S_t$  表示汇率的动态价格;  $\mu$  表示汇率的收益率;  $\sigma$  表示汇率价格波动率;  $B_t^H$  表示赫斯特指数为  $H \in (1/2, 1)$  的分数布朗运动.

### 2.2 基于历史信息的偏好理论

Nuzman 和 Poor<sup>[12]</sup> 提出关于分数布朗运动环境中的基于历史信息的条件期望概念, 并对分数布朗运动进行了 Lamperti's 变换得到了新的表达式. 基于条件期望的概念, 我们引入偏好理论.

**定义 1** 设  $B_T^H$  为赫斯特指数  $H \in (1/2, 1)$  的分数布朗运动, 则  $[\omega_1]_t$  为基于历史信息的等价类当且仅当  $[\omega_1]_t = \{\omega \in \Omega \mid B_s^H(\omega) = B_s^H(\omega_1), \forall s \in (-\infty, t]\}$ .

**定义 2** 设  $B_T^H$  为赫斯特指数  $H \in (1/2, 1)$  的分数布朗运动,  $[\omega_1]_t$  为基于历史信息的等价类,  $F_t^H = \sigma(B_s^H, s \leq t)$ , 则称  $E[B_T^H | F_t^H](\omega_1)$  为  $B_T^H$  基于历史信息  $F_t^H$  的条件期望.

**引理 1** 记  $[\omega_1]_t$  为基于历史信息的等价类, 则  $B_T^H$  基于观测量  $[\omega_1]_t$  条件分布满足:

$$\begin{aligned} E[B_T^H | F_t^H](\omega_1) &= B_t^H + \int_{-\infty}^t g(T-t, s-t) dB_s^H(\omega_1) := B_t^H + \widehat{\mu}_{T,t} \\ \text{Var}[B_T^H | F_t^H](\omega_1) &= E\left[(B_T^H - E[B_T^H | F_t^H])^2 | F_t^H\right](\omega_1) = \rho_H (T-t)^{2H} := \widehat{\sigma}_{T,t}^2 \end{aligned}$$

其中,

$$\rho_H = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(H-1/2)) \Gamma(3/2-H)^2}{\pi(H-1/2) \Gamma(2-2H)}, & H \neq \frac{1}{2} \\ \lim_{H \rightarrow 1/2} \frac{\sin(\pi(H-1/2)) \Gamma(3/2-H)^2}{\pi(H-1/2) \Gamma(2-2H)}, & H = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

**命题 1** 设  $\tilde{S}_s = S_s | [\omega_1]_t (s > t)$  表示概率空间  $([\omega_1]_t, \sigma([\omega_1]_t), \tilde{P})$  上的条件过程,  $F(s, \tilde{S}_s)$  为关于  $s$  一阶连续可微且关于  $\tilde{S}_s$  二阶连续可微的函数, 则下式成立:

$$\begin{aligned} F(T, \tilde{S}_T) &= F(t, \tilde{S}_t) + \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} F(s, \tilde{S}_s) ds + \int_t^T \mu(s) \frac{\partial}{\partial x} F(s, \tilde{S}_s) \tilde{S}_s ds + \sigma \int_t^T \frac{\partial}{\partial x} F(s, \tilde{S}_s) \tilde{S}_s d\tilde{B}_s^H + \\ &\quad \rho_H H \sigma^2 \int_t^T (s-t)^{2H-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(s, \tilde{S}_s) \tilde{S}_s^2 ds \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\rho_H$  的定义如式 (2) 所示.

命题的证明参见参考文献 [13].

**引理 2** 条件过程  $\tilde{S}_T = S_T | [\omega_1]_t (s > t)$  的联合密度函数为:

$$f(x) | [\omega_1]_t = \frac{1}{x\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2v}\right) 1_{[x>0]} \quad (4)$$

其中:  $1_{[\cdot]}$  为示性函数,  $m = \ln S_t + (r_d - r_f)(T-t) - \frac{1}{2}\rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H}$ ,  $v = \rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H}$ .

**证明** 在式 (3) 中, 令  $F(s, \tilde{S}_s) = \ln \tilde{S}_s$ , 则  $\ln \tilde{S}_T = \ln \tilde{S}_t + \int_t^T \mu(s) ds - \frac{1}{2}\rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H} + \sigma \left( \tilde{B}_T^H - \tilde{B}_t^H \right)$ . 同时令  $m = \tilde{E}(\ln \tilde{S}_T)$ 、 $v = \tilde{E}(\ln \tilde{S}_T - m)^2$  和  $\widehat{\mu}_{T,t} = \int_{-\infty}^t \left( \frac{\sin(\pi(H-1/2))}{\pi} (t-s)^{-H+1/2} \int_0^{T-t} \frac{x^{H-1/2}}{x+t-s} dx \right) d\tilde{B}_s^H(\omega_1)$ , 则有:

$$\begin{aligned} m &= \tilde{E}(\ln \tilde{S}_T) = E(\ln \tilde{S}_T | F_t^H)(\omega_1) = \ln S_t + \int_t^T \mu(s) ds - \frac{1}{2}\rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H} + \sigma \widehat{\mu}_{T,t} \\ v &= \tilde{E}(\ln \tilde{S}_T - m)^2 = E\left[(\ln \tilde{S}_T - m)^2 | F_t^H\right](\omega_1) = \rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H}. \end{aligned} \quad (5)$$

我们知道在概率空间  $([\omega_1]_t, \sigma([\omega_1]_t), \tilde{P})$  中, 若  $\ln \tilde{S}_T \sim N(m, v)$ , 则  $\tilde{S}_T \sim N(M, V)$ , 其中

$$M = e^{m+\frac{1}{2}v} = S_t e^{\int_t^T \mu(s) ds + \sigma \widehat{\mu}_{T,t}}, \quad V = e^{2m+2v} - e^{2m+v} = S_t^2 e^{2\int_t^T \mu(s) ds} \left( e^{\rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H}} - 1 \right).$$

根据均衡理论, 投资者购买股票和持有  $S_t$  份无风险资产是等价的. 从而它们的期望也应该相等, 即

$$E(\tilde{S}_T | F_t^H) = S_t e^{\int_t^T \mu(s) ds + \sigma \widehat{\mu}_{T,t}} = E(S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)}) = S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)}. \quad \text{由此, 我们得到:}$$

$$\int_t^T \mu(s) ds + \sigma \widehat{\mu}_{T,t} = (r_d - r_f)(T-t) \quad (6)$$

将式 (6) 代入式 (5) 中立即得到

$$\begin{cases} m = \ln S_t + (r_d - r_f)(T-t) - \frac{1}{2}\rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H} \\ v = \rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H} \end{cases} \quad (7)$$

从而立即得到  $\tilde{S}_T$  基于观测量  $[\omega_1]_t$  的条件密度函数为 (4) 式所示.

### 2.3 定价公式的数理推导

根据汇率期权定价原理, 结合分数布朗运动下基于历史信息的条件密度函数, 我们可以得出分数布朗运动下欧式汇率期权的定价公式.

**定理 1**  $t(t \in [0, T])$  时刻欧式汇率期权的价值  $V(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, H, \varphi)$  由以下方程组确定:

$$\begin{cases} V(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, H, \varphi) = \varphi [S_t e^{-r_f(T-t)} N(\varphi d_1) - K e^{-r_d(T-t)} N(\varphi d_2)] \\ d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r_d - r_f)(T-t) + \frac{\sigma^2 \rho_H}{2}(T-t)^{2H}}{\sigma(T-t)^H \sqrt{\rho_H}}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\rho_H} \sigma (T-t)^H \\ \rho_H = \frac{\sin(\pi(H-1/2)) \Gamma(3/2-H)^2}{\pi(H-1/2) \Gamma(2-2H)} \left( H \neq \frac{1}{2} \right), \quad \rho_H = \lim_{H \rightarrow 1/2} \frac{\sin(\pi(H-1/2)) \Gamma(3/2-H)^2}{\pi(H-1/2) \Gamma(2-2H)} \left( H = \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (8)$$

其中: 看涨期权  $\varphi = +1$ , 看跌期权  $\varphi = -1$ ;  $N(\cdot)$  为正态分布的累积函数.

**证明** 在风险中性世界里,  $t$  时刻的欧式看涨汇率期权的价值即为  $T$  时刻条件期望价值的贴现, 从而

$$\begin{aligned} V(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, 1) &= e^{-r_d(T-t)} E[(S_T - K)^+ | F_t^H] \\ &= e^{-r_d(T-t)} (E[S_T 1_{[K \leq S_T < \infty]} | F_t^H] - K \cdot E[1_{[K \leq S_T < \infty]} | F_t^H]) = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

其中:  $I_1 = e^{-r_d(T-t)} E[S_T 1_{[K \leq S_T < \infty]} | F_t^H]$ ,  $I_2 = K e^{-r_d(T-t)} E[1_{[K \leq S_T < \infty]} | F_t^H]$ . 又由引理 2 知  $\tilde{S}_T$  的密度函数具有式 (4) 的形式, 同时利用变量代换  $\ln x = u$  和  $(u-m)/\sqrt{v} = z$ , 则有

$$\begin{aligned} I_2 &= K e^{-r_d(T-t)} \int_k^\infty \frac{1}{x \sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2v}\right) dx = K e^{-r_d(T-t)} \int_{\ln k}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2v}\right) du \\ &= K e^{-r_d(T-t)} \int_{\frac{\ln k - m}{\sqrt{v}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = K e^{-r_d(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

采用类似的方法, 并令  $\ln x = u$  以及  $(u-m-v)/\sqrt{v} = z$ , 则有

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-r_d(T-t)} \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2v}\right) dx \\ &= e^{-r_d(T-t)} \int_{\ln k}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2v}\right) \exp(u) du \\ &= e^{-r_d(T-t)} \int_{\ln k}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2v} + u\right) du \\ &= e^{-r_d(T-t) + m + \frac{v^2}{2}} \int_{\ln k}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2 - 2uv + v^2 + 2mv}{2v}\right) du \\ &= e^{-r_d(T-t) + m + \frac{v^2}{2}} \int_{\ln k}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(u-m-v)^2}{2v}\right) du \\ &= e^{-r_d(T-t) + m + \frac{v^2}{2}} \int_{\frac{\ln k - m - v}{\sqrt{v}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = S_t e^{-r_f(T-t)} N(d_1) \end{aligned}$$

故  $V(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, H, 1) = S_t e^{-r_f(T-t)} N(d_1) - K e^{-r_d(T-t)} N(d_2)$ , 利用看涨-看跌平价关系得到欧式看跌汇率期权在  $t$  时刻的价格.

综上所述, 我们可以得到任意时刻的汇率期权定价公式 (8). 定理证毕.

从定价公式可以看出分数布朗运动下汇率期权定价模型比传统的 G-K 模型更能解释资本市场中的价格变化现象. 传统的 G-K 模型中, 期权的价格只与  $T-t$  有关, 而与  $T, t$  各自无关, 而在分数布朗运动中, 期权的价值不仅与  $T$  和  $t$  有关, 而且由于股票价格的变化具有长相关性, 因此期权的价值还与 Hurst 系数  $H$  有关. 这能更好地符合实际情况. 例如有两个到期日  $T$  相同, 而发行日不同的看涨期权, 一个发行日为  $t_1$ , 另一个发行日为  $t_2$ , 其中  $t_1 < t_2$ , 并且假定两者的 Hurst 指数值  $H$  不相同. 此时, 若按照传统的 B-S 期权公式, 可以求得它们在同一个时刻点  $t(t_1 < t_2 < t < T)$ , 将具有相同的期权价值, 但是由于 Hurst 系数  $H$  的不同, 使得它们在分数布朗运动下的期权价值不一样. 这就能更好地反映标的资产股票变化中所存在的长期相关性.

## 2.4 赫斯特指数对定价公式的影响

比较定价公式 (8) 和经典的 Garman-Kohlhagen 汇率期权定价公式, 我们可以看出公式 (8) 反映了汇率的赫斯特指数对期权价格的影响. 由于金融资产的长记忆性, 使得其在一段时间内持续高涨或下跌, 赫斯特指数正反映了金融资产的这种自相似性, 下面我们进一步分析赫斯特指数对期权价值中的影响.

**定理 2** 汇率期权的价值与赫斯特指数  $H$  的变化关系可以表示为:

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{1}{2} \varphi \left[ S_t e^{-r_f(T-t)} N'(\varphi d_1) \sqrt{\rho_H} \sigma (T-t)^H \left( \psi(1-H) - \psi\left(H + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 + 2 \ln(T-t) \right) \right] \quad (9)$$

其中,  $\psi$  表示 Psi 函数 (Digamma 函数), 且令  $\tau = T - t$ , 则有下面的性质:

1) 对于看涨期权, 当  $\tau \leq 1$  时, 则有  $\frac{\partial V}{\partial H} < 0$ ,  $\forall H \in (\frac{1}{2}, 1)$ . 当  $\tau > 1$  时, 则存在某个  $\tilde{H}_C \in (1/2, 1)$ , 使得

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial H} > 0, & H \in \left(\frac{1}{2}, \tilde{H}_C\right) \\ \frac{\partial V}{\partial H} = 0, & H = \tilde{H}_C \\ \frac{\partial V}{\partial H} < 0, & H \in (\tilde{H}_C, 1) \end{cases}$$

2) 对于看跌期权, 当  $\tau \leq 1$  时, 则有  $\frac{\partial V}{\partial H} > 0$ ,  $\forall H \in (\frac{1}{2}, 1)$ . 当  $\tau > 1$  时, 则存在某个  $\tilde{H}_P \in (1/2, 1)$ , 使得

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial H} < 0, & H \in \left(\frac{1}{2}, \tilde{H}_P\right) \\ \frac{\partial V}{\partial H} = 0, & H = \tilde{H}_P \\ \frac{\partial V}{\partial H} > 0, & H \in (\tilde{H}_P, 1) \end{cases}$$

**证明** 下面针对看涨期权的情形给予证明, 对于看跌期权用类似的方法可证. 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, H, 1)}{\partial H} &= S_t e^{-r_f(T-t)} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial H} - K e^{-r_d(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial H} \\ &= S_t e^{-r_f(T-t)} N'(d_1) \frac{\partial (\sqrt{\rho_H} \sigma (T-t)^H)}{\partial H} \end{aligned}$$

又

$$\frac{\partial (\rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H})}{\partial H} = \rho_H \sigma^2 (T-t)^{2H} \left( \psi(1-H) - \psi\left(H + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 + 2 \ln(T-t) \right)$$

根据复合函数求导法则知 (9) 式在  $\varphi = 1$  时成立. 同时由于 Digamma 函数在定义域大于零时是严格单调增的凹函数, 所以当  $H \in (1/2, 1)$  时,  $\psi(1-H) - \psi(H + 1/2)$  是严格单调减, 故

$$\max \{ \psi(1-H) - \psi(H + 1/2) \} < \lim_{H \rightarrow 1/2} [\psi(1-H) - \psi(H + 1/2)] = \psi(1/2) - \psi(1) = -2 \ln 2$$

根据函数的单调性即得定理成立.

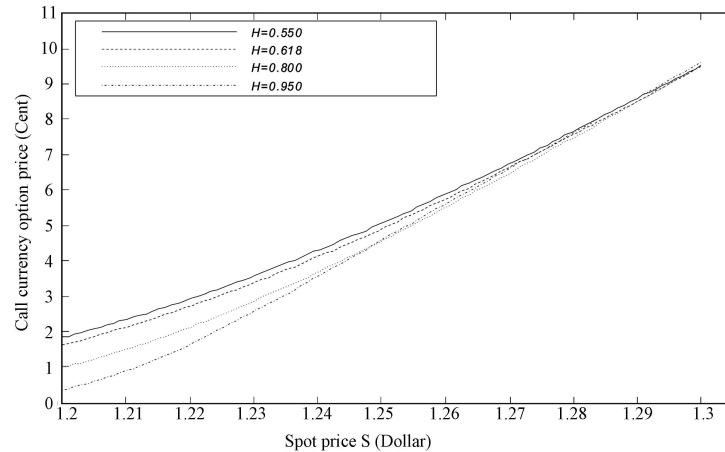
### 3 实证分析

为了评价模型的性能、说明赫斯特指数对期权价值的影响以及解释本文模型的合理性, 我们将数值实证部分分为三个步骤. 第一个步骤就是采用金融时报网站 (FT) 上 GBP/USD 期权的每天市场数据进行实证分析. 通过比较传统模型和分数布朗运动下模型的定价结果与实际报价的误差程度来反映模型的性能. 该期权是还有三个月到期且执行价格为 1.21 美分的看涨期权, 根据历史数据知 GBP/USD 汇率的波动率为 9%, USD 的利率为 4.93%, EUR 的利率为 2.71%. 根据汇率的历史数据, 利用 R/S 算法求得赫斯特指数  $H=0.618$ . 同时根据 GBP/USD 的汇率价格从 1.213 美元到 1.218 美元变化时, 采用不同定价模型计算所得结果如表 1 所示. 表 1 中,  $P_{G-K}$ 、 $P_{C-R-R}$  (分为 4000 步)、 $P_{M-C}$  (模拟 100000 次)、 $P_{F-B}$  分别表示采用 Garman 和 Kohlhagen<sup>[2]</sup> 的汇率期权定价模型、二叉树定价模型、蒙特卡罗模拟和本文的分数布朗运动模型计算的结果, 且用  $P_{\text{actual}}$  表示期权的市场报价. 由表中数据可以看出传统模型的定价结果与期权的实际情况有较大偏差, Garman 和 Kohlhagen 的汇率期权定价模型、二叉树定价模型以及蒙特卡罗模拟都没有体现金融资产的长记忆性, 从而高估期权的价值. 而采用本文的分数布朗运动定价模型得到的期权价值与实际价值最为接近, 充分说明了汇率市场的分数特性, 同时也说明了本文提出的模型的合理性.

表 1 汇率变化时不同定价模型下 GBP/USD 看涨汇率期权的定价结果 (单位: 美分)

汇率 (美元)	$T-t$ (年)	$P_{G-K}$	$P_{C-R-R}$	$P_{M-C}$	$P_{F-B}$	$P_{actual}$
1.213	0.241	2.670	2.688	2.675	2.299	2.305
1.214	0.240	2.728	2.746	2.755	2.357	2.349
1.215	0.250	2.786	2.805	2.804	2.415	2.408
1.216	0.220	2.846	2.865	2.855	2.475	2.459
1.217	0.195	2.906	2.925	2.929	2.535	2.564
1.218	0.208	2.966	2.987	3.003	2.596	2.604

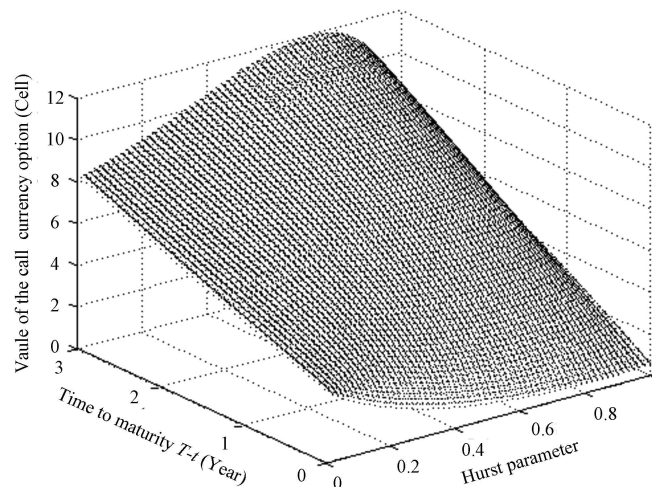
实证的第二个步骤就是分析赫斯特指数对期权定价结果的影响. 我们针对不同的赫斯特指数, 在汇率从 1.2 到 1.3 之间变化时, 计算期权的价格如图 1 所示. 显而易见赫斯特指数对期权价格的影响随着标的资产——汇率的增加而减少.



参数选择:  $r_d = 4.95\%$ ,  $r_f = 2.71\%$ ,  $K = 1.21$ ,  $T-t = 3/12$ ,  $\sigma = 0.09$

图 1 对应于不同赫斯特指数的分形汇率看涨期权的价格

进一步, 我们研究期权剩余期限和赫斯特指数变化时看涨期权价格的变化情况, 图 2 给出了剩余期限和赫斯特指数同时变化时汇率期权的价格走势情况.



参数选择:  $r_d = 4.95\%$ ,  $r_f = 2.71\%$ ,  $K = 1.21$ ,  $\sigma = 0.09$

图 2 对应于不同剩余期限和赫斯特指数下欧式看涨汇率期权的价格

实证部分的第三个步骤就是将本文的定价模型与根据文献 [6] 和文献 [7] 得到的分数布朗运动下汇率期权定价模型 (见附录 A) 进行比较. 比较两个定价模型可以发现, 定价公式 (8) 就是用  $\rho_H(T-t)^{2H}$  代替了定价公式 (10) 中的  $T^{2H} - t^{2H}$ . 这样做是合理的, 在定价公式 (10) 中, 期权的价格与  $T$ ,  $t$ ,  $H$  各自相关, 而定

价公式 (8) 中, 期权的价值与  $T-t$  和  $H$  有关. 这更能正确地解释实际情况. 例如有某个到期日  $T$  很长的期权, 而时刻点  $t$  比较小, 按照定价公式 (10) 计算, 则  $T^{2H} - t^{2H}$  非常大 ( $H > 0.5$ ), 从而远离 G-K 模型计算的价值. 而定价公式 (8) 中, 由于  $\rho_H$  随着  $H$  的增大而减少 (见图 3), 虽然此时  $(T-t)^{2H}$  很大, 但由于  $\rho_H$  的急降性, 使得  $\rho_H(T-t)^{2H}$  不会太大, 从而使得由 (8) 式计算的期权价值非常接近 G-K 模型计算的价值. 由于经典的 G-K 模型与 B-S 模型一样, 都经过了众多的实证检验, 虽然不能完全吻合期权的价值, 但也不会偏离太远, 故定价公式 (10) 与经典的 G-K 模型定价结果有较大的冲突, 而定价公式 (8) 是合理的, 同时公式 (8) 反映了赫斯特指数  $H$  对期权价值的影响, 这就能更好地反映标的资产股票变化中所存在的长期相关性. 进一步假设  $t=0.1$  年, 且到期日  $T$  在  $[1, 10]$  内变化, 赫斯特指数  $H$  在  $[0.51, 1]$  内变动, 分别计算根据 G-K 公式、公式 (8) 和公式 (10) 求期权价格的影响因子  $T-t$ ,  $\rho_H(T-t)^{2H}$  和  $T^{2H} - t^{2H}$  如图 4 所示. 从图形可得知因子  $T^{2H} - t^{2H}$  随着有效期的增加呈指数趋势迅速增大, 这与因子  $T-t$  的增加速度相去甚远, 从而影响了定价结果的准确性.

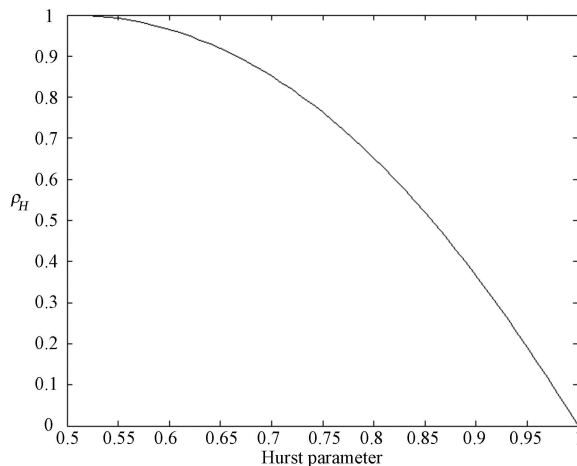


图 3  $\rho_H$  形状图

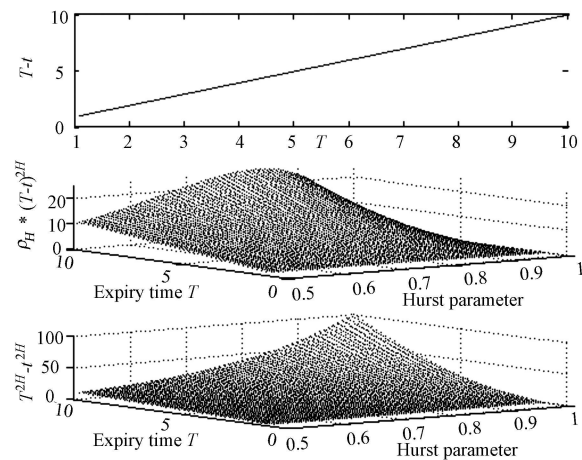


图 4  $T-t, \rho_H(T-t)^{2H}, T^{2H} - t^{2H}$  形状图

为了说明影响因子  $T-t$ ,  $\rho_H(T-t)^{2H}$  和  $T^{2H} - t^{2H}$  对各自定价模型的影响, 下面我们假设  $T \in [0.1, 10]$  且  $H \in [0.51, 0.99]$ , 其他参数假定为:  $S_t = 1.218, r_d = 4.95\%, r_f = 2.71\%, K = 1.21, \sigma = 0.09, t = 0.1$ , 分别采用 G-K 公式、公式 (8) 与公式 (10) 计算汇率期权的价格, 计算结果如图 5-7 所示. 从计算结果可以看出当期权到期日  $T$  和赫斯特指数较大时, 根据公式 (10) 计算的期权价值远远偏离 G-K 模型的计算结果, 而根据公式 (8) 计算所得的结果不但体现了标的股票的长记忆性而且非常接近 G-K 模型.

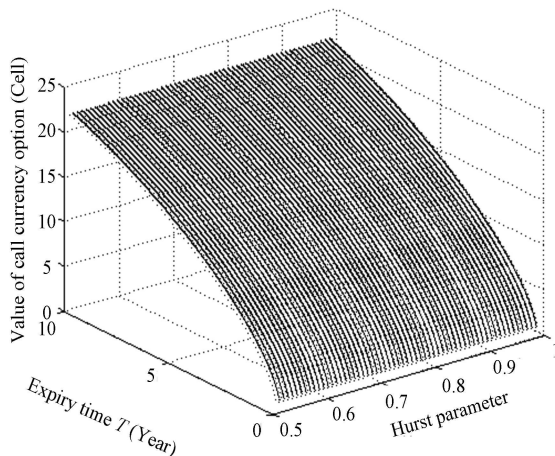


图 5 根据 G-K 模型计算不同剩余期限和赫斯特指数下欧式看涨汇率期权的价格

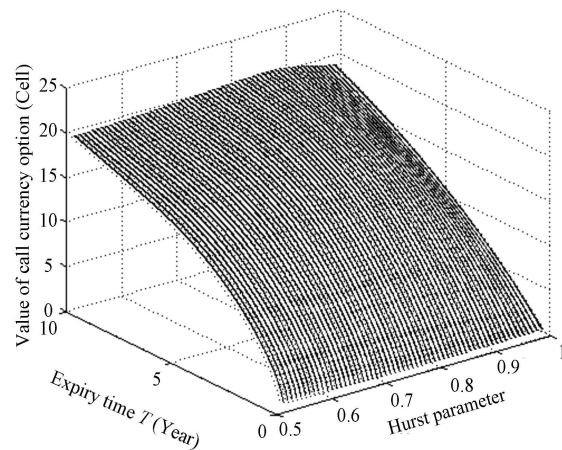


图 6 根据公式 (8) 计算不同剩余期限和赫斯特指数下欧式看涨汇率期权的价格

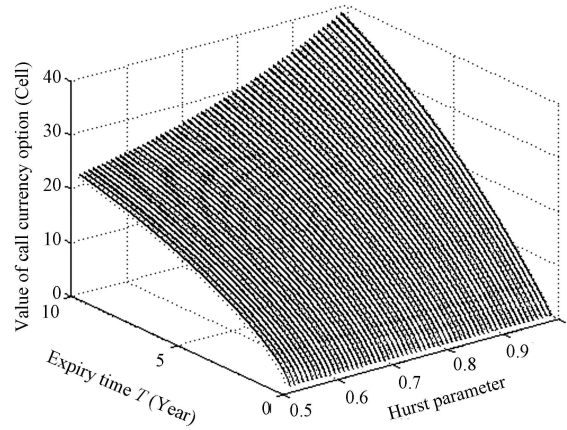


图 7 根据公式 (10) 计算不同剩余期限和赫斯特指数下欧式看涨汇率期权的价值

## 4 结论

本文探讨了分数布朗运动下欧式汇率期权的定价模型, 采用 GBP/USD 汇率期权的实际数据进行了实证检验, 并分析了赫斯特指数对汇率期权价格的影响, 比较了分数布朗运动下汇率期权两个不同的定价公式, 用数值例子说明了本文提出模型的合理性. 而且在定价公式 (8) 中令  $H = 1/2$ , 则与文献 2 的定价公式是一致的, 这表明了本文定价公式的普遍性, 同时也说明了布朗运动只是分数布朗运动的一个特例.

采用分数布朗运动刻画金融资产的变化过程在一定程度上比以前模型有所改进, 但是整个理论模型始终没有脱离 G-K 模型理论框架, 为简化模型而进行的众多假设显然与现实有出入, 且模型中没有考虑人的行为以及个人的风险偏好等因素. 所以模型有待进一步改进和修正, 采用新的柔性理论框架来定价期权迫在眉睫, 比如国外有些学者将行为人的风险偏好因素引入到期权定价理论, 为期权定价提供了新的方法途径.

## 附录 A

根据文献 [6] 和 [7], 采用类似的推导可得到欧式汇率期权的定价公式.

**引理 3**<sup>[7]</sup> 任意有界且  $F_T^H$  可测的未定权益  $Z(T, \omega) \in L^2(\hat{P}_H)$  在  $t \in [0, T]$  的价值可以表示为:

$$Z(t, \omega) = e^{-r(T-t)} \tilde{E}_{\hat{P}_H} [Z(T, \omega) | F_t^H]$$

其中  $\tilde{E}_{\hat{P}_H} [Z(T, \omega) | F_t^H]$  表示  $Z(T, \omega)$  在测度  $\hat{P}_H$  下关于  $F_t^H$  的拟条件期望<sup>[7]</sup>.

**引理 4**<sup>[7]</sup> 设  $f$  是一个满足  $E[f(B_T^H)] < \infty$  的函数, 则对任意  $t \leq T$  都有下面式子成立,

$$E[f(B_T^H) | F_t] = \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H} - t^{2H})}} \exp\left(-\frac{(x - B_t^H)^2}{2(T^{2H} - t^{2H})}\right) f(x) dx.$$

**定理 3** 分数布朗运动下,  $t(t \in [0, T])$  时刻执行价格为  $K$ 、国内外无风险利率分别为  $r_d$  和  $r_f$ 、波动率为  $\sigma$  的欧式汇率期权的价格  $V(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, H, \varphi)$  由方程组确定:

$$\begin{cases} V^*(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, H, \varphi) = \varphi[S_t e^{-r_f(T-t)} N(\varphi d_1^*) - K e^{-r_d(T-t)} N(\varphi d_2^*)], \\ d_1^* = \frac{\ln(S_t/K) + (r_d - r_f)(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, d_2^* = d_1^* - \sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}} \end{cases} \quad (10)$$

其中  $N(\cdot)$  为正态分布累积函数.

**证明** 令  $\hat{B}_t^H = \frac{\mu + r_f - r_d}{\sigma} t + B_t^H$ , 则  $\hat{B}_H(t)$  显然为  $\hat{P}_H$  下的分数布朗运动, 根据参考文献 [7] 引理 1.5 知  $S_T = S_t \exp\left(\sigma \left(\hat{B}_T^H - \hat{B}_t^H\right) + \mu(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})\right)$ . 令:

$d_2' = \frac{\ln(K/S_t) - (r_d - r_f)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma \hat{B}_t^H}{\sigma}$ , 结合引理 4 且用  $1_{[\cdot]}$  代表示性函数, 则有:

$$\tilde{E}_{\hat{P}_H} [1_{[S_T > K]} | F_t^H] = \tilde{E}_{\hat{P}_H} [1_{[d_2' < \hat{B}_T^H < +\infty]} (\hat{B}_T^H) | F_t^H] = \int_{d_2'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H} - t^{2H})}} \exp\left(-\frac{(x - \hat{B}_t^H)^2}{2(T^{2H} - t^{2H})}\right) dx$$



$$= \int_{-\infty}^{\frac{\widehat{B}_t^H - d_2^*}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = N(d_2^*) \quad (11)$$

令  $B_t^{*H} = \widehat{B}_t^H - \sigma t^{2H}$ , 由分形 Girsanov 公式知存在  $(\Omega, F^H)$  上的测度  $P_H^*$  使得  $B_t^{*H}$  为  $P_H^*$  下的分数布朗运动. 令  $Z(t, \omega) = \exp(\sigma \widehat{B}_t^H - \frac{\sigma^2}{2} t^{2H})$ , 则  $S_T = S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)} Z(T, \omega)$  再结合引理 3 和引理 4 得

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\tilde{P}_H} [S_T 1_{\{S_T > K\}} | F_t^H] &= S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)} \tilde{E}_{\tilde{P}_H} [Z(T, \omega) 1_{\{d_2^* < \widehat{B}_t^H < +\infty\}} (\widehat{B}_t^H) | F_t^H] \\ &= S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)} \tilde{E}_{P_H^*} [1_{\{d_1^* < B_T^{*H} < +\infty\}} (B_T^{*H}) | F_t^H] \\ &= S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)} \int_{-\infty}^{\frac{B_t^{*H} - d_1^*}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)} N(d_1^*) \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $d_1^* = \frac{\ln(K/S_t) - (r_d - r_f)(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma \widehat{B}_t^H}{\sigma}$ .

从而根据引理 3 和定理 4 的结论, 将 (11)、(12) 式代入可知  $t$  时刻的欧式看涨汇率期权的价值为

$$\begin{aligned} V(S_t, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, H, 1) &= e^{-r_d(T-t)} \tilde{E}_{\tilde{P}_H} [(S_T - K)^+ | F_t^H] \\ &= e^{-r_d(T-t)} \left( \tilde{E}_{\tilde{P}_H} [S_T 1_{\{S_T > K\}} | F_t^H] - K \cdot \tilde{E}_{\tilde{P}_H} [1_{\{S_T > K\}} | F_t^H] \right) \\ &= S(t) e^{-r_f(T-t)} N(d_1^*) - K e^{-r_d(T-t)} N(d_2^*) \end{aligned}$$

令未定权益  $Z(T, \omega) = (K - S_T)^+$ , 同理可求得欧式看跌外汇期权在  $t$  时刻的价格.

## 参考文献

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637-659.
- [2] Garman M B, Kohlhagen S W. Foreign currency option values[J]. Journal of International Money and Finance, 1983, 2(12): 231-237.
- [3] Fama E. The behavior of stock market prices[J]. The Journal of Business, 1965, 38(1): 34-105.
- [4] Peters E E. Fractal structure in the capital markets[J]. Financial Analyst Journal, 1989, 7: 434-453.
- [5] Duncan T E, Hu Y, Pasik-Duncan B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I Theory[J]. SIAM J Control Optim, 2000, 38: 582-612.
- [6] Hu Y, Øksendal B. Fractional white noise calculus and applications to finance[J]. Infinite Dim Anal Quantum Probab Related Topics, 2003, 6: 1-32.
- [7] Necula C. Option pricing in a fractional Brownian motion environment[R]. Working Paper of the Academy of Economic Studies, Bucharest, 2002, 27: 8079-8089.
- [8] Bender C, Elliott R J. Arbitrage in discrete version of the wick-fractional black-scholes market[J]. Mathematics of Operations Research, 2004, 29(3): 935-945.
- [9] Björk T, Hult H. A note on wick products and the fractional black-scholes model[J]. Finance and Stochastic, 2005, 9: 197-209.
- [10] Cheidito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models[J]. Finance and Stochastic, 2003, 7: 533-553.
- [11] Rostek S, Schöbel R. Risk preference based option pricing in a fractional Brownian market[J]. Applied Probability Trust, 2007, 30: 1-29.
- [12] Nuzman C J, Poor H V. Linear estimation of self-similar processes via Lamperti's transformation[J]. J Appl Probab, 2000, 37(2): 429-452.
- [13] Bender C. Integration with respect to fractional Brownian motion and related market models[D]. Ph D Thesis, Department of Mathematics and Statistics, University of Konstanz, 2003.
- [14] 陈荣达. 基于 Delta-Gamma-Theta 模型的外汇期权风险度量 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(7): 55-60.  
Chen R D. Risk measure of FX options based on Delta-Gamma-Theta model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2005, 25(7): 55-60.
- [15] 赵巍, 何建敏. 股票价格遵循分数 Ornstein-Uhlenback 过程的期权定价模型 [J]. 中国管理科学, 2007, 15(2): 1-4.  
Zhao W, He J M. Model of option pricing driven by fractional Ornstein-Uhlenback process[J]. Chinese Journal of Management Science, 2007, 15(2): 1-4.