第30卷 第1期　　昆明理工大学学报(理工版)　　Vol.30 No.1
2005年2月　　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　　Feb. 2005

复合矩阵法求解六维两点边值问题

马忠军,林怡平
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

摘要:对于有边界条件的且有边界层的微分方程组,常常使用复合矩阵法获得特征函数.文章给出了特征函数的计算公式,并讨论了确定积分初始值的方法.

关键词:边值问题;复合矩阵法
中图分类号:O241.81　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1007-855X(2005)01-0101-03

Solutions to Six - Dimensional Two - Point Boundary - Value Problem Using Compound Matrix Method

MA Zhong-jun, LIN Yi-ping
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: The compound matrix method is used to obtain the eigenfunctions of stiff six - dimensional differential equations subject to an equal number of separated boundary conditions at end points. The calculating formula are given and the method of determining the initial value of integral is discussed.

Key words: boundary - value problem; compound matrix method

0 引 言

高维有边界层常微分方程组的边界问题有着广泛的应用.这些问题时常用渐近分析法或奇异扰动法来研究,但是,对这些问题的数值解进行探讨也是非常重要的.运用复合矩阵法,文献[1]讨论了弹性波问题,文献[2]导出了Orr-Sommerfeld问题特征值关系的一致逼近,文献[3,4]研究了不高于四阶的两点边值问题.D.M.Haughton 和 A.Orr 使用该方法,探讨了弹性圆柱管的翻转问题[5].T.J.Bridges 从微分几何的角度,把复合矩阵法看作在Grassman流形上的积分[6].文中使用复合矩阵法,讨论了六维两点边值问题,给出了特征函数数值解的计算方法.

1 计算方法

考虑包含六个边界条件的六维微分方程组

$$\phi' = A(x)\phi, \tag{1}$$

其中,$\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_6)^T$,$A(x)$是六阶矩阵$[a_{ij}(x)]$,$a\le x\le b$.在$x=a$和$x=b$处的边界条件为

$$P\phi(a)=0, Q\phi(b)=0, \tag{2}$$

其中,$P=[p_{ij}]_{3\times6}$和$Q=[q_{ij}]_{3\times6}$是秩为3的矩阵.在积分过程中,当x增加到第二个边界点,初始条件数目超过了数值解所给出的条件时,标准打靶方法失效.

考虑用复合矩阵方法.假设$\Phi^{(1)},\Phi^{(2)},\Phi^{(3)}$是方程组(1)的满足下列初始条件的无关解:

$$P\Phi^{(1)}(a)=0, i=1,2,3 \tag{3}$$

收稿日期:2003-12-19. **基金项目**:中国自然科学基金;云南省教育厅科学研究基金(项目编号:10161007).
第一作者简介:马忠军(1973~),男,在读硕士研究生.主要研究方向:动力系统分支与混沌.**E-mail**:mzj1234402@sohu.com

令 $\Phi=(\Phi^{(1)}\Phi^{(2)}\Phi^{(3)})=\begin{pmatrix}\Phi_1^{(1)} & \Phi_1^{(2)} & \Phi_1^{(3)}\\ \Phi_2^{(1)} & \Phi_2^{(2)} & \Phi_2^{(3)}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Phi_6^{(1)} & \Phi_6^{(2)} & \Phi_6^{(3)}\end{pmatrix}$ (4)

矩阵的 Φ 的 3×3 子式为:

$$y_1=\begin{vmatrix}\Phi_1^{(1)} & \Phi_1^{(2)} & \Phi_1^{(3)}\\ \Phi_2^{(1)} & \Phi_2^{(2)} & \Phi_2^{(3)}\\ \Phi_3^{(1)} & \Phi_3^{(2)} & \Phi_3^{(3)}\end{vmatrix}=(1,2,3)\quad y_2=\begin{vmatrix}\Phi_1^{(1)} & \Phi_1^{(2)} & \Phi_1^{(3)}\\ \Phi_2^{(1)} & \Phi_2^{(2)} & \Phi_2^{(3)}\\ \Phi_4^{(1)} & \Phi_4^{(2)} & \Phi_4^{(3)}\end{vmatrix}=(1,2,4),$$

类似地,$y_3=(1,2,5)$,$y_4=(1,2,6)$,$y_5=(1,3,4)$,$y_6=(1,3,5)$,$y_7=(1,3,6)$,

$y_8=(1,4,5)$,$y_9=(1,4,6)$,$y_{10}=(1,5,6)$,$y_{11}=(2,3,4)$,$y_{12}=(2,3,5)$,

$y_{14}=(2,4,5)$,$y_{15}=(2,4,6)$,$y_{16}=(2,5,6)$,$y_{17}=(3,4,5)$,$y_{18}=(3,4,6)$,

$y_{19}(3,5,6)$,$y_{20}=(4,5,6)$.

利用行列式性质,对 y_i 求导,得:

$$y'=B(x)y \tag{5}$$

其中,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_{20})^T$,$B(x)=[b_{ij}(x)]_{20\times20}$.

当已知 $\Phi^{(1)}(a)$,$i=1,2,3$ 时,由 $y|_{x=a}=y(a)$,不难确定 y 在 $x=a$ 处的初值.由文献[7]知,(5)的通解包含6个支配项,仅有一个未知初始条件.因此,可使用标准打靶方法,得到方程组(5)的数值解.

假设方程组(1)有解

$$\phi=C_1\Phi^{(1)}+C_2\Phi^{(2)}+C_3\Phi^{(3)}=\Phi C \tag{6}$$

其中,$C=(C_1,C_2,C_3)^T$,而且 ϕ 在 $x=b$ 处满足边界条件(2),即 $Q\phi(b)=0$.

因此,

$$Q\Phi(b)C=0. \tag{7}$$

因 C 为非零向量,故

$$\det[Q\Phi(b)]=0. \tag{8}$$

把(6)写成

$$\phi_i=C_1\Phi_i^{(1)}+C_2\,\Phi_i^{(2)}+C_3\,\Phi_i^{(3)},\qquad i=1,2,3,4,5,6. \tag{9}$$

下面确定 ϕ 所满足的方程.行列式

$$\det\begin{bmatrix}\phi_i & \Phi_i^{(1)} & \Phi_i^{(2)} & \Phi_i^{(3)}\\ \phi_j & \Phi_j^{(1)} & \Phi_j^{(2)} & \Phi_j^{(3)}\\ \phi_k & \Phi_k^{(1)} & \Phi_k^{(2)} & \Phi_k^{(3)}\\ \phi_l & \Phi_l^{(1)} & \Phi_l^{(2)} & \Phi_l^{(3)}\end{bmatrix}=0.$$

其中,i,j,k,l 两两不同,且在$\{1,2,3,4,5,6\}$中取值.上式产生15个方程

$y_{11}\phi_1-y_5\phi_2+y_2\phi_3-y_1\phi_4=0$, (10-1) $y_{12}\phi_1-y_6\phi_2+y_3\phi_3-y_1\phi_5=0$, (10-2)

$y_{13}\phi_1-y_7\phi_2+y_4\phi_3-y_1\phi_6=0$, (10-3) $y_{14}\phi_1-y_8\phi_2+y_3\phi_4-y_2\phi_5=0$, (10-4)

$y_{15}\phi_1-y_9\phi_2+y_4\phi_4-y_2\phi_6=0$, (10-5) $y_{16}\phi_1-y_{10}\phi_2+y_4\phi_5-y_3\phi_6=0$, (10-6)

$y_{17}\phi_1-y_8\phi_3+y_6\phi_4-y_5\phi_5=0$, (10-7) $y_{18}\phi_1-y_9\phi_3+y_7\phi_4-y_5\phi_6=0$, (10-8)

$y_{19}\phi_1-y_{10}\phi_3+y_7\phi_5-y_6\phi_6=0$, (10-9) $y_{20}\phi_1-y_{10}\phi_4+y_9\phi_5-y_8\phi_6=0$, (10-10)

$y_{17}\phi_1-y_{14}\phi_3+y_{12}\phi_4-y_{12}\phi_5=0$, (10-11) $y_{18}\phi_2-y_{15}\phi_3+y_{13}\phi_4-y_{11}\phi_6=0$, (10-12)

$y_{19}\phi_2 - y_{16}\phi_3 + y_{13}\phi_5 - y_{12}\phi_6 = 0$, (10 – 13)　　$y_{20}\phi_2 - y_{16}\phi_4 + y_{15}\phi_5 - y_{14}\phi_6 = 0$, (10 – 14)

$y_{20}\phi_3 - y_{19}\phi_4 + y_{18}\phi_5 - y_{17}\phi_6 = 0$. (10 – 15)

从(9)中任意 3 个方程解出 C_1, C_2, C_3,代入其他 3 个方程,同样可以获得上述公式.我们发现,在(10)中,只须同时考虑 3 个独立的方程.例如,从(9)的前 3 个方程解出 C_1, C_2, C_3,然后代入后 3 个方程,得出(10 – 1),(10 – 2)和(10 – 3)是独立的.从(9)的第 1,第 2,第 4 个方程解出 C_1, C_2, C_3,然后代入其他 3 个方程,得出(10 – 1),(10 – 4)和(10 – 5)是独立的.

为了得到 3 个独立方程,也可先从(10)里选择一个方程,然后从(10)里另选两个方程,使得后两个方程与第 1 个方程有且仅有 3 个 ϕ_i 是相同的.至于应该考虑哪 3 个方程,这取决于待研究的问题.这里,作为一个例子,我们选择(10 – 1),(10 – 4),(10 – 5)进行讨论.考虑

$$y_{11}\phi_1 - y_5\phi_2 + y_2\phi_3 - y_1\phi_4 = 0, \qquad y_{14}\phi_1 - y_8\phi_2 + y_3\phi_4 - y_2\phi_5 = 0,$$
$$y_{15}\phi_1 - y_9\phi_2 + y_4\phi_4 - y_2\phi_6 = 0. \tag{11}$$

因 ϕ 也必须满足在 $x = b$ 处的边界条件,即

$$R(b)\phi = 0 \tag{12}$$

其中,

$$R(b) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} \\ y_{11} & -y_5 & y_2 & -y_1 & 0 & 0 \\ y_{14} & -y_8 & 0 & y_3 & -y_2 & 0 \\ y_{15} & -y_9 & 0 & y_4 & 0 & -y_2 \end{bmatrix}_{x=b}$$

因此,

$$\det[R(b)] = 0. \tag{13}$$

可以证明,(8)与(13)等价.事实上,利用文献[8]中的 Laplace 展开式,得:

$$\det[Q\phi(b)] = \det\left[\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{16} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{36} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} & \Phi_1^{(2)} & \Phi_1^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_6^{(1)} & \Phi_6^{(2)} & \Phi_6^{(3)} \end{bmatrix}\right] \overset{\Delta}{=} Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \cdots + Q_{20} y_{20}$$

$$\begin{aligned} \det[R(b)] = & -y_2^2[Q_1y_1 + Q_2y_2 + Q_3y_3 + Q_4y_4 + Q_5y_5 + Q_8y_8 + Q_9y_9 + Q_{11}y_{11}] \\ & - y_2[Q_6(y_3y_5 + y_1y_8) + Q_7(y_1y_9 + y_4y_5) + Q_{10}(y_3y_9 - y_4y_8) \\ & + Q_{12}(y_{11}y_3 + y_1y_{14}) + Q_{13}(y_1y_{15} + y_1y_{11}) + Q_{16}(y_3y_{15} - y_4y_{14}) \\ & + Q_{17}(y_8y_{11} - y_5y_{14}) + Q_{18}(y_5y_{15} - y_9y_{11}) + Q_{20}(y_8y_{15} - y_8y_{14})] \\ & - Q_{19}(y_{11}y_8y_4 - y_1y_9y_{14} + y_5y_3y_{15} + y_1y_8y_{15} - y_{11}y_3y_9 - y_5y_4y_{14}) \end{aligned}$$

其中, $Q_1 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = [1,2,3]$, $Q_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{34} \end{vmatrix} = [1,2,4]$,

其余依次类推.用 Mathematica 进行计算, 得 $\det[R(b)] = -y_2^2\det[Q\Phi(b)]$.

这就得出(8)与(13)是等价的.解方程(13),得 ϕ 在 $x = b$ 处的初始条件.因此,方程(1)的解 ϕ 就可以通过从 $x = b$ 到 a 解(11)来确定了.

(下转第 107 页)

受到轻度噪音污染的图像,而当图像受到多种噪音(如椒盐噪音、卷积模糊、逆滤波退化等)污染时,阈值面积区域消去法往往达不到目的.相反,如果采用数学形态学的方法,则会取得理想的效果.

总之,数学形态学方法具有准确性高、灵活性大、实用性强等优点,对图像的空穴检出来说是一种很好的方法,与阈值面积区域消去法相比,该方法灵活、实用、简单.

参考文献:

[1] 张毓晋. 图象工程(下册)—图象理解与计算机视觉[M].北京:清华大学出版社,2000.241~258.
[2] 张毓晋. 图象工程(上册)—图象处理和分析[M].北京:清华大学出版社,1999.254~277.
[3] 杨枝灵,王开. Visual C++数字图象获取、处理及实践应用[M]. 北京:人民邮电出版社,2003.475~499.
[4] 龚炜,石青云,程民德. 数字空间中的数学形态学—理论及应用[M]. 北京: 科学出版社,1997.10~80.
[5] 崔屹. 图象处理与分析—数学形态学方法的应用[M]. 北京:科学出版社, 2000.12~65.

(上接第 103 页)

参考文献:

[1] Gibert F, Backus G. Propagator Matrices in Elastic Wave and Vibration Problems[J]. Geophysics, 1996,31(2):326~332.
[2] Lakin W D, NG B S. Approximations to the Eigenvalue Relation for the Orr – Sommerfeld Problem[J]. Reid W.H., Philos., Trans. Roy. Soc. London Ser.A. 1978,289:347~371.
[3] NG B S, Reid W H. An Initial Value Method for Eigenvalue Problems Using Compound Matrices[J]. Computational Phisics, 1979,30:125~136.
[4] NG B S, Reid W H. A Numerical Method for Linear Two – Point Boundary – Value Problems Using Compound Matrices[J]. Computational Phisics, 1979,33:70~85.
[5] Haughton D M, Orr A. On the Eversion of Compressible Elastic Cylinders[J]. Solids Structures, 1997,34(15):1893~1914.
[6] Bridges T. The Orr – Sommerfeld Equation on a Manifold[J]. Prac. R. Soc. Lond. A. 1999,455:3019~3040.
[7] Davey A. On the Removal of the Singularities from the Riccati Method[J]. Computational Phisics, 1979,(30): 137~144.
[8] Ayres J R F. Theory and Problems of Matrices[M]. Mc. Graw – Hill Book Company, 1962.32~33.