文章编号: 1000-6788(2009)01-0081-08

考虑资源约束和变质期的订货批量与定价的联合决策

戴道明[1,2,3], 程　刚[2], 杨善林[1,3]

(1. 合肥工业大学 管理学院, 合肥 230009; 2. 安徽财经大学 信息工程学院, 蚌埠 233041;
3. 过程优化与智能决策教育部重点实验室, 合肥 230009)

摘　要　传统的订货计划一般假定需求事先已知. 研究了需求是价格的函数、订货能力有限情形时, 订货商对变质性产品协调地进行定价决策和订货决策, 使得利润最大化. 建立了二次规划数学模型. 提出了基于动态规划的算法, 可以在多项式时间内求解原问题的最优定价策略和最优订货计划. 实验结果表明, 与分散决策相比, 联合决策可以给订货商带来更多的利润. 通过订货能力的灵敏度分析, 表明订货能力变化对利润和价格产生显著影响, 有助于订货商选择恰当的订货能力水平. 通过变质期的灵敏度分析, 揭示了变质期对订货策略影响显著.

关键词　动态规划; 变质期; 定价; 能力受限批量问题

中图分类号　O221.3　　　**文献标识码**　A

Joint optimal dynamic pricing and capacitated lot sizing problem with perishable inventory

DAI Dao-ming[1,2,3], CHENG Gang[2], YANG Shan-lin[1,3]

(1. School of Management, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. School of Information Engineering, Anhui University of Finance & Economics, Bengbu 233041, China; 3. Key Laboratory of Process Optimization and Intelligent Decision-making, Ministry of Education, Hefei 230009, China)

Abstract　Material requirements planning research has typically assumed that the firm's demands are determined prior to order planning. In contrast, a class of capacitated lot sizing problems is considered, which implicitly decides, through pricing decisions, the demand levels the firm should satisfy in order to maximize contribution to profit. An algorithm based on dynamic programming is proposed, by which the optimal pricing strategy and the optimal order strategy are obtained in polynomial time. The results show that the algorithm can effectively solve the original problem. Also, in comparison with the decentralized policy, the more rational prices can be set so as to maximize the form's profit by the joint policy. Sensitivity analysis of order capacity shows the effect of capacity on profit and pricing, by which the proper order capacity level can be set. Sensitivity analysis of life perishability shows the remarkable effect of life perishbility on order strategy.

Keywords　dynamic programming; life perishability; pricing; capacitated lot sizing problem

1　引言

最新的制造技术 (如柔性制造系统, 即时制, 快速反应, 制造资源计划和企业资源规划等) 日益重视客

收稿日期: 2007-07-31
资助项目: 国家自然科学基金重点项目 (70631003); 中华全国供销合作总社科研项目 (GXZS0819)
作者简介: 戴道明 (1974–), 男, 汉, 安徽六安人, 讲师, 博士研究生, 研究方向: 运筹与优化、生产调度与库存优化. Email: ddmid@163.com.

户的需求，进一步增强了采购部门 (或生产部门) 和营销部门的功能交叉. 不过，它们都没有考虑市场的动态变化对订货计划的影响. 例如，最近的 ERP 系统虽然可以优化动态需求的订货批量问题，但是在其高度计算机化的采购计划系统中忽略了定价和其它的市场因素动态变化对订货计划的影响.

近年来，不少学者开始关注市场因素 (如价格、广告和折扣等) 对订货 (或生产) 批量的影响. 在连续时间情形下，Abad P. L.[1] 考虑了易逝性产品在有限生产率、指数腐蚀率、需求部分延迟部分放弃时的定价和批量的协调问题. Chang H. J. 等 [2] 研究了允许部分需求延迟时的订货批量与定价的集成问题，求解订货商的最优售价和采购计划. Chen JM 和 Chen LT[3] 研究了易逝品在指数生产率、指数变质率、允许交货延迟时的生产批量与定价的集成问题. Feng Y. 和 Xiao B.[4] 研究了变质性产品的定价和能力分配的集成问题.

在离散时间情形下,Gilbert S.M.[5] 研究了单位产品成本和库存费用是静态的情形下, 单产品固定定价和订货批量的联合决策问题. Bhattaacharjee 和 Ramesh[6] 研究了一类变质性产品，需求具有一定弹性，无能力约束的订货批量和定价集成模型. Biller 等 [7] 研究了不含订货固定费用的动态定价模型，提出了贪婪算法. Geunes J[8] 等研究了收益是需求的分段线性函数时的定价和能力受限批量的集成问题.

本文主要研究在离散时间、多周期情形时，单产品动态定价与订货批量的集成问题. 订货能力受到限制 (如资金、人力资源、运输能力、存贮能力和机器设备等资源的限制). 产品具有一定的保质期，超过保质期产品因变质而成废品. 需求事先未知，但是掌握了需求与价格间的函数关系. 建立二次规划模型，提出基于动态规划的算法.

1 数学模型

本文建立在下面假设基础之上：

各周期的需求量与价格是一一对应的关系. 因此，需求量和价格是等价的概念，可以交互使用. 为了利用需求与生产能力之间的关系，便于求解模型，本文以各周期的需求量为决策变量，价格是需求量的函数.

状态参数：

N: 计划期内的周期数.

OC_t ：第 t 周期产品的固定订货费用.

v_t ：第 t 周期的单位产品成本.

SC_t ：第 t 周期的单位产品存贮费用.

C_t ：第 t 周期的订货能力，本文只考虑 C_t 为常数 C 时的情形.

l：产品的保质期，即产品的库存期不能超过 l，否则产品变质.

LT：订货提前期.

I_0 ：期初库存量.

决策变量：

R_t ：第 t 周期产品的需求量.

$P_t(R_t)=a_t-b_tR_t$：第 t 周期的产品销售价格函数.

H_t ：在途库存，表示计划期前下达订货单，在第 $t(1\le t\le LT)$ 周期产品的到货量.

Q_t ：表示在第 $t-LT$ 周期下达订单通知，第 $t(LT+1\le t\le N)$ 周期的到货量.

y_t ：是一个二进制变量，第 t 周期如果有产品到货，则取值为 1，否则取值为 0.

下面给出问题的数学模型 $(P1)$：

$$\max TP=\sum_{t=1}^{N}P_t(R_t)R_t-\Bigg[\sum_{t=1}^{N}OC_ty_t+\sum_{t=1}^{LT}v_tH_t+\sum_{t=LT+1}^{N}v_tQ_t+\sum_{t=1}^{LT}(I_0+\sum_{i=1}^{t}(H_i-R_i))SC_t+\\ \sum_{t=LT+1}^{N}(I_0+\sum_{i=1}^{LT}(H_i-R_i)+\sum_{i=LT+1}^{t}(Q_i-R_i))SC_t\Bigg] \tag{1}$$

$$0 \le I_0 + \sum_{i=1}^{t}(H_i - R_i) \le \sum_{i=t+1}^{\min\{LT,t+l\}} R_i \quad t = 1, 2, \cdots, LT \tag{2}$$

$$0 \le I_0 + \sum_{i=1}^{LT}(H_i - R_i) + \sum_{i=LT+1}^{t}(Q_i - R_i) \le \sum_{i=t+1}^{\min\{N,t+l\}} R_i, \quad t = LT+1, \cdots, N \tag{3}$$

$$0 \le H_t \le y_t \min\left\{C, \sum_{i=t}^{\min\{LT,t+l\}} R_i\right\}, \quad t = 1, 2, \cdots, LT \tag{4}$$

$$0 \le Q_t \le y_t \min\left\{C, \sum_{i=t}^{\min\{N,t+l\}} R_i\right\}, \quad t = LT+1, \cdots, N \tag{5}$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, 2, \cdots, LT \tag{6}$$

$$R_t, P_t(R_t) \ge 0, \quad t = 1, 2, \cdots, LT \tag{7}$$

目标函数 (1) 是公司的总利润, 等于总收入减去总成本, 其中总成本包括固定订货费用, 产品成本和库存费用; 约束条件 (2) 和 (3) 要求各周期库存量是非负的; 约束条件 (4) 和 (5) 是订货能力约束, 结合约束 (6) 和目标函数 (1) 可以判断第 t 周期是否到货; 约束条件 (6) 规定 y_t 是二进制变量; 约束条件 (7) 要求每周期的需求量和价格是非负的.

2　相关的定义和定理

令第 t 周期末的库存量为 I_t, 则

$$I_t = \begin{cases} I_0 + \sum\limits_{i=1}^{t}(H_i - R_i), & t = 1, 2, \cdots, LT \\ I_0 + \sum\limits_{i=1}^{LT}(H_i - R_i) + \sum\limits_{i=LT+1}^{t}(Q_i - R_i), & t = LT+1, \cdots, N \end{cases}$$

为简便起见, 假设 $I_0 = I_N = 0$. 如前所述, H_t 和 Q_t 都表示第 t 周期的到货量, 不同之处在于前者是在计划期前下达订货通知, 后者是在计划期内下达订货通知. 为叙述方便, 用 x_t 表示第 $t(1 \le t \le N)$ 周期的到货量.

$X(R)$ 表示需求向量为 R 时的某个订货计划, 其中 $R = \{R_1, R_2 \cdots, R_N\}$.

定义 1　如果 $I_t = 0$, 则称周期 t 为再生点; 如果 $0 < x_t < C$, 则称周期 t 为零头订货周期.

定义 2　如果 S_{uv} $(1 \le u < v \le N)$ 表示可行订货计划 $X(R)$ 的一个子集, 且 $S_{uv} = \{x_i, \ i = u, u+1, \cdots v | I_{u-1} = 0 = I_v; I_i > 0, u \le i < v\}$, 则称 S_{uv} 是订货计划 $X(R)$ 的子订货计划. 特别地, 如果 $u-1$ 和 u 都是再生点, 那么 S_{uu} 也是生产计划 $X(R)$ 的子生产计划.

定义 3　对于子订货计划 S_{uv}, 如果至多只有一个周期是零头订货周期, 其余周期的到货量要么为零, 要么为订货能力 C, 则称 S_{uv} 为能力受限子订货计划.

定义 4　对于订货计划 $X(R)$, 如果它是由若干个能力受限子订货计划构成, 则称 $X(R)$ 为能力受限订货计划.

引理 1　如果 $X'(R)$ 和 $X''(R)$ 是不同的可行订货计划, $X(R) = \alpha X'(R) + (1-\alpha)X''(R)$, 其中 $0 < \alpha < 1$, 则 $X(R)$ 的再生点也是 $X'(R)$ 和 $X''(R)$ 的再生点.

证明　令周期 k 是 $X(R)$ 的任意一个再生点. 由于

$$\sum_{t=1}^{k} x_t = \alpha \sum_{t=1}^{k} x'_t + (1-\alpha)\sum_{t=1}^{k} x''_t \tag{8}$$

在 (8) 式的两边减去 $\sum\limits_{t=1}^{k} R_t$, 得到 $\sum\limits_{t=1}^{k}(x_t - R_t) = \alpha \sum\limits_{t=1}^{k}(x'_t - R_t) + (1-\alpha)\sum\limits_{t=1}^{k}(x''_t - R_t)$, 即 $I_k = \alpha I'_k + (1-\alpha)I''_k$. 因为 $X'(R)$ 和 $X''(R)$ 是可行订货计划, 所以 I'_k 和 I''_k 是非负的. 当 $I_k = 0$ 时, I'_k 和 I''_k 一定为 0.

定理 1　能力受限订货计划 $X(R)$ 对应于可行域的顶点.

证明 现在分两步来证明.

(i) 如果 $X(R)$ 不是能力受限订货计划, 则它一定不是可行域的顶点.

由于 $X(R)$ 不是能力受限订货计划, 因此存在某个子计划 S_{uv}, 该子计划内至少有两个周期 b 和 d ($1 \le u \le b < d \le v \le N$): $0 < x_b < C$, $0 < x_d < C$.

令 $\delta = 0.5\min\{x_b, C - x_b, x_d, C - x_d, \min_{u \le t < v} I_t\}$.

令 U_i 是一个 N 维向量, 其中第 i 个分量为 1, 其余分量为 0.

令订货计划 $X'(R) = X(R) - \delta U_b + \delta U_d$ 和 $X''(R) = X(R) + \delta U_b - \delta U_d$. 由于 $\delta > 0$, 因此 $X'(R)$ 和 $X''(R)$ 是不同的两个可行订货计划. 显然, $X(R) = 0.5(X'(R) + X''(R))$, 即 $X(R)$ 是 $X'(R)$ 和 $X''(R)$ 连线的中点.

(ii) 如果可行解 $X(R)$ 不是顶点, 则它一定不是能力受限订货计划.

因为 $X(R)$ 不是顶点, 所以存在两个不同的可行解 $X'(R)$ 和 $X''(R)$, 使

$$X(R) = \alpha X'(R) + (1 - \alpha)X''(R) \tag{9}$$

设存在周期 $b_1 (u \le b_1 \le v)$, 有 $x'_{b_1} \ne x''_{b_1}$, 其中周期 $u-1$ 和 v 是 $X(R)$ 的两个连续再生点. 由引理 1 可知, $u-1$ 和 v 也是 $X'(R)$ 和 $X''(R)$ 的两个再生点. 因此, 在周期 $u-1$ 到 v 之间, 至少存在两个以上周期 $b_1, b_2, \cdots$, 有 $x'_{b_1} \ne x''_{b_1}$, $x'_{b_2} \ne x''_{b_2}$, $\cdots$.

下面以 b_1 为例, 证明 $0 < x_{b_1} < C$.

反证法, 假设 x_{b_1}=0 或 x_{b_1}=C.

由于 $X'(R)$ 和 $X''(R)$ 是可行解, 因此 $0 \le x'_{b_1} \le C$, $0 \le x''_{b_1} \le C$.

当 x_{b_1}=0 时, 由 (9) 可知, $x'_{b_1} = x''_{b_1}$=0, 这与 $x'_{b_1} \ne x''_{b_1}$ 相矛盾.

当 x_{b_1}=C 时, 由 (9) 可知, $x'_{b_1} = x''_{b_1} = C$, 与 $x'_{b_1} \ne x''_{b_1}$ 相矛盾

故 $0 < x_{b_1} < C$. 同理可证, $0 < x_{b_2} < C$. $X(R)$ 在连续再生点 $u-1$ 和 v 之间至少有两个零头订货周期. 因此, $X(R)$ 不是能力受限订货计划.

由 (i) 和 (ii) 可得, 能力受限订货计划 $X(R)$ 对应于可行域的顶点. 证明完毕.

3 数学模型的进一步讨论

3.1 子问题的数学模型

由于原问题可行域是凸集且目标函数是凹函数, 因此目标函数在某个顶点处达到最优. 根据定理 1, 存在某个最优解, 它是能力受限订货计划. 因而, 求解原问题的关键之处在于求解它的子问题 (u, v), 其中 $1 \le u \le v \le N$. 下面以子问题 $(1, n)(1 \le n \le N)$ 为例, 讨论子问题的求解方法. t_f 表示零头订货周期, m 表示订货次数, S 表示订货计划的订货周期集合.

$$x_{t_f} = \sum_{i=1}^{n} R_t - (m-1)C \tag{10}$$

把 (10) 式代入模型 (P1), 根据定理 1, 得到下面的模型 (P2):

$$\begin{aligned}\min &\left\{\sum_{t=1}^{t_f-1}\left(P_t(R_t) - v_{t_f} + \sum_{i=t}^{t_f-1} SC_i\right)R_t + \sum_{t=t_f}^{n}\left(P_t(R_t) - v_{t_f} - \sum_{i=t_f}^{t-1} SC_i\right)R_t\right\} + \\ &\left\{C\left[\sum_{t_i \in S - \{t_f\}}(v_{t_f} - v_{t_i}) - \sum_{t_i \in S, i<f}\sum_{j=t_i}^{t_f-1} SC_j + \sum_{t_i \in S, i>f}\sum_{j=t_f}^{t_i-1} SC_j\right] - \sum_{t_i \in S} OC_{t_i}\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=j}^{t} R_j \le \sum_{t_i \in S, t_i \le t} C_{t_i}, \quad t = 1, 2, \cdots, t_f - 1 \tag{12}$$

$$\sum_{j=t+1}^{n} R_j \geq \sum_{t_i\in S, t_i>t} C_{t_i}, \quad t=t_f, t_f+1, \cdots, n \tag{13}$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} R_j - \sum_{t_i\in S, i\neq f} C_{t_i} \leq C_{t_f} \tag{14}$$

$$\sum_{t_i\in S, t_i\leq t} C_{t_i} - \sum_{j=1}^{t} R_j \leq \sum_{j=t+1}^{\min\{n,t+l\}} R_j, \quad t=1,2,\cdots,t_f-1 \tag{15}$$

$$\sum_{j=t+1}^{n} R_j - \sum_{t_i\in S, t_i>t} C_{t_i} \leq \sum_{j=t+1}^{\min\{n,t+l\}} R_j, \quad t=t_f, t_f+1, \cdots, n \tag{16}$$

$$R_t \geq 0, \quad P_t(R_t) \geq 0, \quad t=1,2,\cdots,n \tag{17}$$

约束条件 (12) 和 (13) 保证各周期的需求得到满足；约束条件 (14) 要求在零头订货周期的订货量是非负的且不超过订货能力；约束条件 (15) 和 (16) 要求产品的库存不能超过 l 个周期 (即保证产品没有变质)；约束条件 (17) 要求各周期的需求量和相应的价格是非负的.

对于给定的 (m, t_f)，需求仅与 (11) 式的第一个花括号相关, 与第二个花括号无关；而生产计划与第一个花括号无关. 因此，可以首先求解子问题 $(1, n)$ 的各周期需求，然后进行批量决策.

3.2 子问题的需求决策模型

松驰模型 (P2) 中的条件 (12-16) 后，得到模型 (P3):

$$\max \sum_{t=1}^{t_f-1} (P_t(R_t) - v_{t_f} + \sum_{i=t}^{t_f-1} SC_i)R_t + \sum_{t=t_f}^{n} (P_t(R_t) - v_{t_f} - \sum_{i=t_f}^{t-1} SC_i)R_t \tag{18}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} R_i \leq mC \tag{19}$$

$$R_t \geq 0, P_t(R_t) \geq 0, \quad t=1,2,\cdots,n \tag{20}$$

约束条件 (19) 式要求计划期内的总需求不能超过总订货量. 如果给定订货次数 m $(1 \leq m \leq n)$ 和零头订货周期 $t_f (1 \leq t_f \leq n)$，则可以用动态规划法求解出模型 (P3) .

(18) 式是关于 R_t 的二次函数. 设 $F_t(\tilde{R}_t)$ 表示累积需求为 $\tilde{R}_t$ 时, 从周期 1 初到周期 t 末的最大利润. 以周期数 n 为阶段数，周期 t 的需求量为决策变量，从周期 1 到周期 t 的积累需求量 $\tilde{R}_t$ 为状态变量. 当 $t < t_f$ 时，令 $A_t = a_t - v_{t_f} + \sum\limits_{i=t}^{t_f-1} SC_i$；当 $t \geq t_f$ 时，令 $A_t = a_t - v_{t_f} + \sum\limits_{i=t_f}^{t-1} SC_i$. 则：

$$F_t(\tilde{R}_t) = \max\ K_t + L_t\tilde{R}_t + M_t\tilde{R}_t^2 = \max\ F_{t-1}(\tilde{R}_t - R_t) + (A_t - b_tR_t)R_t \tag{21}$$

由 (18) 式和 (21) 式可以得到周期 t 的最优需求：

$$R_t^* = \frac{A_t - L_{t-1} - 2M_{t-1}\tilde{R}_t}{2(b_t - M_{t-1})} \tag{22}$$

由 (18)、(21) 和 (22) 式，得到 (21) 式系数的递推关系式：

$$K_t = \frac{(A_t - L_{t-1})^2}{4(b_t - M_{t-1})} + K_{t-1} \tag{23}$$

$$L_t = \frac{L_{t-1}b_t - M_{t-1}A_t}{b_t - M_{t-1}} \tag{24}$$

$$M_t = \frac{M_{t-1}b_t}{b_t - M_{t-1}} \tag{25}$$

检查需求向量 $(R_1^*, \cdots, R_n^*)$ 是否满足约束条件：

$$\sum_{i=1}^{t} R_i^* \leq tC, \quad t=1,\cdots,n \tag{26}$$

如果需求向量 $(R_1^*, \cdots, R_n^*)$ 不满足 (26) 式，则不必进行批量决策，利润设为充分小的负数；否则转到 3.3 节进行批量决策. 由于 (26) 式比约束条件 (12–16) 宽松，因此不会漏掉最优解.

3.3 子问题的批量决策模型

对于在 3.2 节中求得的需求向量 $(R_1^*,\cdots,R_n^*)$, 模型 (P2) 目标函数的总收益 $\sum\limits_{t=1}^{N}P_t(R_t^*)R_t^*$ 是常数, 因而目标函数函数等价于最小化总成本. 令 $TC(m,t_f,t)$ 表示从周期 1 初到周期 t 末, 订货次数为 m、零头订货周期为 t_f 时的最小总成本. 前面已经指出零头订货周期的订货量为 $x_{t_f}=\sum\limits_{i=1}^{n}R_i^*-(m-1)C$.

$$TC(0,0,0)=0 \tag{27}$$

当 $1\le t<t_f$ 时:

$$TC(m,t_f,t)=\min\left\{\begin{array}{l} TC(m-1,t_f,t-1)+OC_t+v_tC+SC_t(\sum\limits_{t_i\in s,t_i\le t}C_{t_i}-\sum\limits_{j=1}^{t}R_j^*)\ y_t=1 \\ TC(m,t_f,t-1)+SC_t(\sum\limits_{t_i\in s,t_i\le t}C_{t_i}-\sum\limits_{j=1}^{t}R_j^*)\ y_t=0 \end{array}\right\} \tag{28}$$

当 $t=t_f$ 时:

$$TC(m,t_f,t_f)=\left\{TC(m-1,t_f,t_f-1)+OC_{t_f}+v_{t_f}x_{t_f}+SC_{t_f}(\sum_{j=t_f+1}^{n}R_j^*-\sum_{t_i\in S,t_i>t_f}C_{t_i})\right\} \tag{29}$$

当 $n\ge t>t_f$ 时:

$$TC(m,t_f,t)=\min\left\{\begin{array}{l} TC(m-1,t_f,t-1)+OC_t+v_tC+SC_t(\sum\limits_{j=t+1}^{n}R_j^*-\sum\limits_{t_i\in S,t_i>t}C_{t_i})\ y_t=1 \\ TC(m,t_f,t-1)+SC_t(\sum\limits_{j=t+1}^{n}R_j^*-\sum\limits_{t_i\in S,t_i>t}C_{t_i})\ y_t=0 \end{array}\right\} \tag{30}$$

运用动态规划顺序递推公式 (27)-(30) 结合约束条件 (12)-(17) 求解模型 (P2), 得到子问题 $(1,n)$ 在 (m,t_f) 时的最优需求向量、最优订货计划和最优利润. 子问题 $(1,n)$ 在其它订货次数和零头周期情形时的求解方法类似 3.2 和 3.3 的求解方法. 在所有可能的 (m,t_f) $(1\le m\le n,\ 1\le t_f\le n)$ 情形中, 利润最大者及其对应的需求向量和订货计划就是子问题 $(1,n)$ 的最优解.

3.4 整个问题的求解模型

令 $F(t)$ 表示从计划期初到周期 t 末的最大利润, E_{jt} 表示子问题 $(j,\ t)$ 的最大利润. 可以得到下面的动态规划顺推关系式:

$$F(0)=0 \tag{31}$$

$$F(t)=\max_{1\le j\le t}\{F(j-1)+E_{jt}\},\quad t=1,2,\cdots,N \tag{32}$$

根据 3.2 和 3.3, 可以求解出 E_{jt}. 由 (31) 和 (32) 式可以顺推求解出原问题的最大利润、最优需求 (价格) 向量和最优订货计划.

4 算法及其计算复杂度

4.1 算法

下面给出算法的具体步骤:

步骤 1 对于子问题 $(u,v)(1\le u\le v\le N)$, 设订货次数为 $m(0\le m\le u-v+1)$, 零头订货周期为 $t_f(u\le t_f\le v)$.

步骤 2 运用 3.2 节中的 (21-25) 式, 用顺推解法求解模型 (P3), 得到 (m,t_f) 时的最优需求向量.

(i) 初始化: 以周期 $t(u\le t\le v)$ 的累积需求量 $\tilde{R}_t=\sum\limits_{j=u}^{t}R_j$ 为状态变量, 以周期 t 的需求量 R_t 为决策变量, 周期数 $u-v+1$ 为阶段数, $\tilde{R}_0=0$, $F(0)=0$.

(ii) 根据 (23-25) 式计算 (21) 式的各项系数.

(iii) 根据 (22) 式求得各周期需求函数表达式 (关于累积需求的函数).

(iv) 求解出周期 v 的需求量, 然后逆推算出其余各周期的需求量.

步骤 3 参见 3.3 节, 运用动态规划顺推公式 (27)–(30) 进行批量决策.

步骤 4 对于子问题 (u, v) 的订货次数和零头订货周期的所有可能组合 (m, t_f), 重复步骤 2 至步骤 3, 进行需求决策和批量决策.

步骤 5 在子问题 (u, v) 的所有可能组合 (m, t_f) 中, 确定利润最大的组合, 该组合对应的最优需求向量和最优订货计划为子问题 (u, v) 的最优定价决策和最优订货计划.

步骤 6 参见 3.4 节, 运用动态规划顺推解法, 由 (31) 和 (32) 式求解原问题的最大利润.

步骤 7 根据原问题最优决策方案包含的子问题, 得到原问题的最优需求 (价格) 向量和最优订货计划.

4.2 算法的计算复杂度分析

由前面的分析可知, 对于子问题 $(1, n)$, (m, t_f) 有 n^2+1 种可能的组合, 每一个 (m, t_f) 组合可以得到一个价格向量. 因此, 最优定价向量数为 $O(n^2)$. 对于每一个价格向量, 由动态规划算法可以求解出子问题的最优订货策略, 其计算复杂度为 $O(n^2)$[9]. 原问题所有可能的子问题数是 $0.5N(N-1)$. 因此, 整个算法的计算复杂度为 $O(N^6)$.

5 实验结果

订货能力是 25000, 变质期为 4, 其余相关参数的值参见表 1.

图 1 比较了联合决策和分散决策下订货商获得的利润. 在分散策略下, 为简洁起见, 假定每周期需求量是恒定的, 选择了具有代表性的 10 种情形. 从订货商的利润角度, 可以得出联合决策比分散决策更加优越.

表 1　相关参数值

周期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_t	25.2	25.4	25.4	25.4	25.5	25.2	25.6	25.6	25.7	25.7
SC_t	0.2	0.22	0.22	0.21	0.21	0.2	0.22	0.22	0.23	0.23
OC_t	18400	18500	18500	18400	18500	18500	18400	18500	18400	18400
a_t	30.7	30.8	30.9	30.9	30.9	30.6	30.7	30.6	30.9	30.8
b_t	0.00028	0.00029	0.00029	0.0003	0.00027	0.00027	0.0003	0.0003	0.00029	0.00027

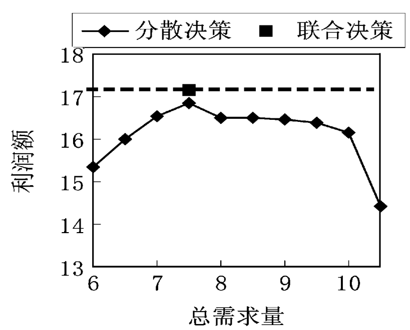

图 1　联合决策与分散策略的比较

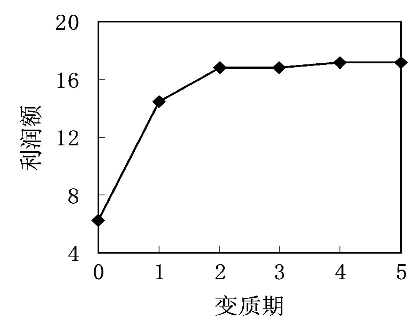

图 2　变质期对利润的灵敏度分析

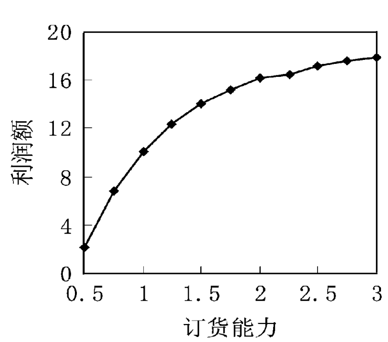

图 3　订货能力对利润的灵敏度分析

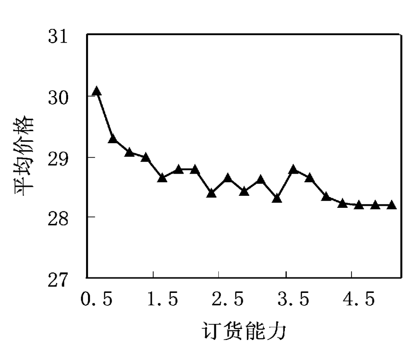

图 4　订货能力对平均价格的灵敏度分析

图 2 分析了产品变质期对利润的影响，对订货商是否投资冷库设备或改进工艺以便延长变质期，提供重要参考. 图 3 分析了订货能力对公司总利润的影响. 图 3 中曲线上相邻两点间线段的斜率是相应订货能力增量的边际利润. 当订货能力过低时，订货商会损失大量的销售机会，进而损失了大量的利润；当订货能力过高时，订货能力增量的边际利润很低，甚至为 0，会导致较低的投资效益.

图 4 分析了订货能力的变化对平均价格的影响. 订货能力低于一定水平时，随着订货能力的降低，价格反而提高. 当订货能力高于一定水平时, 随着订货能力的提高，价格反而降低. 当订货能力提高到一定程度时，价格不再随订货能力的变化而变化. 在中间一段区间，订货能力对平均价格的影响是不稳定的.

6 结论

本文研究了需求预先未知、有限订货能力下，变质性产品的定价和订货批量的联合决策问题. 通过合理地定价决策和订货决策，保证公司获得最大的利润. 提出了一种基于动态规划的算法，可以在多项式时间 $O(T^6)$ 内求解出原问题的最优订货计划和各周期最优价格. 变质期的灵敏度分析对是否投资冷库设备或改进工艺, 以便延长产品变质期提供重要参考. 订货能力对利润的灵敏度分析对销售商为产品分配适当的订货能力，提高投资效益具有指导意义. 订货能力对平均价格的灵敏度分析在一定程度说明，资本弱小的销售商可以针对特定的顾客群，通过较高的定价获得较为理想的利润；而实力强大的销售商可以通过较低的定价，提高市场占有率，获得较为理想的利润.

参考文献

[1] Abad P L. Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability, finite production and partial backordering and lost sale [J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144: 677–685.

[2] Chang H J, Teng J T. Ouyang L Y, et al. Retailer's optimal pricing and lot- sizing policies for deteriorating items with partial backlogging[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168: 51–64.

[3] Chen J M, Chen L T. Pricing and prodluction lot-size/scheduling with finite capacity for a deteriorating item over a finite horizon[J]. Computers & Operations Research, 2005, 32: 2801–2819.

[4] Feng Y, Xiao B. Integration of pricing and capacity allocation for perishable products[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168: 17–34.

[5] Gilbert S M. Coordination of pricing and multi-period production for constant priced goods[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 114: 330–337.

[6] Bhattacharjee S, Ramesh R. A multi-period profit maximizing model for retail supply chain management: An integration of demand and supply-side mechanism[J]. Eur J of Oper Res, 2002, 122: 584–601.

[7] Biller, Chan L M A, Simchi-levi, et al. Dynamic pricing and the direct-to-customer model in the automotive industry[J]. Electronic Commerce, 2005, 5(2): 309–334.

[8] Geunes J, Romeijn H E, Taaffe K. Requirements planning with pricing and order selection flexibility[J]. Operations Research, 2006, 54(2): 394–40

[9] Florian M, Klein M. Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints[J]. Management Science, 1971, 18(1): 12–20.

[10] 钱颂迪. 运筹学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
Qian S D. Operations Research[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990.