文章编号: 1000-6788(2009)03-0090-10

两货栈及允许延期付款情形下变质性物品的最优订货策略

闵 杰[1], 常 浩[2]

(1. 安徽建筑工业学院 数理系, 合肥 230601; 2. 天津工业大学 理学院, 天津 300160)

摘 要 已有的确定性两货栈库存模型通常不考虑延期付款的情形, 但事实上允许购买费用滞后支付却是促使库存管理者加大订货量的一个重要原因. 对此, 基于连续运送租用货栈的物品到自己货栈的运输模式, 建立一个允许延期付款情形下变质性物品的两货栈库存模型, 从而将两货栈库存系统作了进一步的扩展. 然后对模型的最优解进行理论分析, 并提供了寻求最优订货策略的简单方法. 最后给出应用实例, 分析了模型参数变化对最优订货策略的影响.

关键词 两货栈; 滞后支付; 变质性物品; 库存

中图分类号 O22 **文献标志码** A

Optimal order policy for deteriorating items under the conditions of two-warehouse and delay in payments

MIN Jie[1], CHANG Hao[2]

(1. Department of Mathematics & Physics, Anhui University of Architecture, Hefei 230601, China; 2. School of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin 300160, China)

Abstract The existed deterministic two-warehouse inventory models usually did not consider the delay in payments. However, in the real life, trade credit is an important factor that makes the inventory manager to enlarge order quantity. To solve it, under the situation of shipping items in the rented warehouse to the owned warehouse through employing continuous shipment pattern, a new two-warehouse inventory model for deteriorating items with permissible delay in payments is developed, hence the two-warehouse system is further extended. Then we provide theoretical analysis of the optimal solutions to the considered problem and a simple method is given for finding the optimal order policy. At last, numerical examples and sensitive analysis of parameters are presented to illustrate the developed model.

Keywords two-warehouse; delay in payments; deteriorating items; inventory

1 引言

库存控制是运筹学和生产管理中的一个重要分支, 其基本问题就是确定经济订购量 (EOQ) 或经济生产量 (EPQ). 经典的库存模型大多只考虑单个货栈而且都假定该货栈具有无限的容量, 这显然不符合实际的情形, 因为在实际中任何货栈的容量都是有限的. 然而在现实的库存管理中, 却存在着许多使得库存管理者订

收稿日期: 2007-05-10
资助项目: 国家自然科学基金 (70771034, 70631003); 新世纪优秀人才支持计划 (NCET-05-0557); 高校博士学科点专项科研基金 (20060359007); 安徽省教育厅自然科学基金 (KJ2008A030); 安徽省高校青年教师科研资助计划 (2007jq1091)
作者简介: 闵杰 (1978–), 男, 汉, 安徽濉溪人, 副教授, 博士研究生, 研究方向: 库存控制与优化、物流与供应链管理, Email: minjie@aiai.edu.cn.

购的物品量超过其货栈容量的情形. 比如订货量多, 供应商会提供较大幅度的价格优惠或者较长的购买费用滞后支付期; 生产周期较长的产品如农产品, 在其收获期内收购价格相对较低等. 那么在这些情形下, 库存系统要么自己修建新的仓库, 要么租用别人的仓库, 而修建新仓库的一次性投入较大, 所以库存系统往往选择租用别人的仓库来存贮超过自己货栈容量的那部分物品. 一般来说, 租用货栈 (Rented Warehouse, RW) 的库存保管费用高于库存系统自己的货栈 (Owned Warehouse, OW) 的库存保管费用, 因而在两货栈系统中, RW 的物品首先被用来满足需求, 其次是 OW 的物品. 不少作者对两货栈库存模型展开了一定的研究, 最基本的两货栈库存模型是由 Hartely[1] 首先提出的, 他提供了一个确定最优订货量的启发式算法, 但是此模型不考虑短缺和变质. Sarma[2] 进一步发展了带有无限补充率和短缺的变质性物品的两货栈库存模型, Pakkala 和 Achary[3] 则在 Sarma[2] 的基础上考虑了有限补充率的情形. 在上述这些模型中需求都被假定是常数, Goswami 和 Chaudhuri[4] 通过考虑线性时变需求并假定从 RW 运送物品到 OW 的运输费用依赖于运输量而发展了两货栈库存系统. Bhunia 和 Maiti[5] 提出了一个有限计划期内带有线性增加需求且允许短缺发生的变质性物品的两货栈库存模型, 紧接着周永务 [6] 将其推广到无限计划期情形. Goyal 和 Giri[7] 对当时已有的变质性物品的两货栈库存模型进行了综述. 杨善林和周永务 [8] 针对需求随时间而变化的物品, 通过考虑价格折扣而将两货栈系统作了进一步扩展, Zhou 和 Yang[9] 就需求受库存水平影响的情形而研究了两货栈模型, Yang[10] 则在通货膨胀和允许短缺的条件下讨论了变质性物品的两货栈系统.

但是以上两货栈模型要么假设不允许短缺, 要么假设短缺完全拖后, Dye 等人 [11] 采用连续运输模式, 即每发生一个单位需求就从 RW 运送一个单位物品到 OW, 而研究了一个带有短缺部分拖后的两货栈库存模型.

然而, 上述两货栈模型都没有考虑促使库存管理者大量订购物品的一个重要原因 —— 允许购买费用滞后支付, 即都是假设订货量的到达与购买资金的投入是同时的. 但在实际的物流系统中它们有时并非是同时发生的, 正如 Gupta 和 Wang[12] 指出的那样, 延期支付作为一种短期商业信贷方式除了能吸引买方 (销售商) 大批量订货以外, 还可以使得卖方对买方的信用状况有更好地了解, 因此广泛地存在于商业活动中. 在允许购买费用滞后支付的这段时间内, 销售商是无需向供应商支付购买资金的利息, 但是超过了此宽限期如未能全额支付, 销售商则要支付相应的利息. 如此以来, 销售商要重新考虑自己的最优订货量, 以使得资金获得最大的时间价值. 事实上这个现象引起了很多研究者的注意, 如 Goyal[13] 在允许购买费用滞后支付的条件下首次对经济订货批量模型 (EOQ) 进行了拓展, 但是该模型假设采购成本等于销售价格且没有考虑变质性物品的情形. Aggarwal 和 Jaggi[14] 将其推广至变质性物品的库存模型, 紧接着 Jamal[15] 等人又将短缺的情形引入 Aggarwal 和 Jaggi 的模型而作了进一步的推广. 随后许多研究者考虑了许多情形下允许购买费用滞后支付的库存模型 [16−21]. 而本文在允许购买费用滞后支付的条件下, 构造了一种变质性物品的两货栈库存模型, 然后讨论了模型最优解的存在性及唯一性, 为库存管理者决定是否要租用货栈以及制定最优订货量的决策提供了理论依据与简单方法. 最后用实例讨论了模型在实际中的应用.

2 假定与记号

为了便于建立具体的决策模型, 我们首先作以下假定与符号的说明:

1) 备运期为零, 且不允许缺货;

2) 需求率为常数 D;

3) 订购的物品为具有常数变质率的物品, 且物品变质后无残值; 假设在 OW 和 RW 中贮存物品时其变质率分别为θ 和λ , 通常 RW 的存贮条件要劣于 OW, 因此假定$\lambda \geq \theta$;

4) W 表示 OW 的库存容量, h_o 表示 OW 中单位商品单位时间的库存保管费用;

5) 假设 RW 的库存容量无限大, h_r 表示 RW 中单位商品单位时间的库存保管费用, 考虑到实际情况有 $h_r \geq h_o$, 所以当销售商需要租用货栈时, 应先销售 RW 中的物品再销售 OW 中的物品; 为保证最优解的存在, 本模型进一步假设$\theta h_r \geq \lambda h_o$;

6) 如同 Dye 等人 [11], 当需要租用货栈库存物品时, 本模型采用连续运输模式将 RW 中的物品运到 OW,

即每发生一个单位需求就从 RW 运送一个单位物品到 OW, 直至 RW 中的物品销售完毕; 同时忽略从 RW 运送物品到 OW 的时间和费用;

7) K, c, s 分别表示销售商每次订货的订货费用, 单位商品的购买费用, 单位商品的销售价格, 且 $c \le s$;

8) T 为每个订货周期的长度 (决策变量); Q 是每周期的订货量;

9) T_o 表示销售商只订购 W 个商品时所需要的订货周期的长度 (常量); 显然当 $T \le T_o$ 时, 不需要租用货栈, 否则就要租用货栈来库存超出自己货栈容量的那部分物品;

10) T_w 表示销售商需要租用货栈时, 所租用货栈 RW 的库存水平降为零的时刻 (变量);

11) $I_o(t)$ 表示没有租用货栈时 OW 在 t 时刻的库存水平, $I_{o1}(t)$ 表示租用货栈时 OW 在区间 $(0, T_w)$ 内 t 时刻的库存水平, 而 $I_{o2}(t)$ 表示 OW 在区间 (T_w, T) 内的库存水平, $I_r(t)$ 则表示 RW 在区间 $(0, T_w)$ 内 t 时刻的库存水平;

12) M 为允许的购买费用滞后支付期, 考虑到实际中批发商通常会通过延长滞后支付期长度的策略来诱使销售商订购更多的物品, 本文假设 $M > T_o$. 允许的滞后支付期未到期时销售商可以免除利息且可以利用所得销售收入赚取一定的利息, 而到期后则要支付相应的利息;

13) T_M 表示 T_w 恰好等于 M 时整个订货周期 T 的长度 (常量), 显然有 $T_M > M > T_o$;

14) I_p 为单位库存单位时间的支付利息, I_e 为单位库存单位时间的收益利息; 考虑到实际中存贷利率的大小关系以及为保证模型最优解的存在, 本文假设$cI_p \ge sI_e$;

15) $AC(T)$ 表示一个订货周期内销售商的平均成本.

3 模型建立

基于上面的分析与假定, 整个库存系统运行过程如下: 首先在每个订货周期初 Q 单位的商品到达库存系统, 若 $Q \le W$(或 $T \le T_o$), 则销售商不需要租用货栈. 那么由于销售和变质在 T 时刻 OW 的库存降为零, 至此一个订货周期结束, 然后循环进行订货. 因此表示 OW 库存水平变化的状态方程为:

$$\frac{\mathrm{d}I_o(t)}{\mathrm{d}t} = -D - \theta I_o(t), \quad 0 \le t \le T \tag{1}$$

注意到边界条件 $I_o(T)$=0, 上述方程的解为:

$$I_o(t) = \frac{D}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(T-t)} - 1), \quad 0 \le t \le T \tag{2}$$

于是 $Q \le W$(或 $T \le T_o$) 时, 销售商每周期的订货量为:

$$Q = I_o(0) = \frac{D}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta T} - 1) \tag{3}$$

在 (3) 式中令 $Q = W$, 可计算出 T_o 的值, 即

$$T_o = \frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{\theta W}{D}\right) \tag{4}$$

但当 $Q > W$(或 $T > T_o$) 时, 需要租用货栈 RW 来库存物品. 根据假定, 首先要销售 RW 中的物品, 则在区间 $(0, T_w)$ 内 RW 中的物品由于销售和变质而在 T_w 时刻库存降为零, 因此 $I_r(t)$ 变化的微分方程可表示为:

$$\frac{\mathrm{d}I_r(t)}{\mathrm{d}t} = -D - \lambda I_r(t), \quad 0 \le t \le T_w \tag{5}$$

利用边界条件 $I_r(T_w)$=0, 方程 (5) 的解为:

$$I_r(t) = \frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda(T_w-t)} - 1), \quad 0 \le t \le T_w \tag{6}$$

而在 $(0, T_w)$ 内, OW 中的物品虽然没有销售, 但是因为变质而使得其库存水平下降, 其库存水平变化的微分方程为:

$$\frac{\mathrm{d}I_{o1}(t)}{\mathrm{d}t} = -\theta I_{o1}(t), \quad 0 \le t \le T_w \tag{7}$$

注意到边界条件 $I_{o1}(0)$=W, 上述方程的解为:

$$I_{o1}(t) = W\mathrm{e}^{-\theta t}, \quad 0 \le t \le T_w \tag{8}$$

当 $t=T_w$ 时, RW 中的物品销售完毕并开始销售 OW 中的物品, 且当 $t=T$ 时 OW 的库存水平变为零, 至此一个订货周期结束, 接着循环进行订货. 因此在区间 $[T_w, T]$ 内, OW 的库存水平变化的微分方程为:

$$\frac{\mathrm{d}I_{o2}(t)}{\mathrm{d}t}=-D-\theta I_{o2}(t),\qquad T_w\leq\ t\leq T \tag{9}$$

利用边界条件 $I_{o2}(T)$=0, 微分方程 (9) 的解为:

$$I_{o2}(t)=\frac{D}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(T-t)}-1),\qquad T_w\leq t\leq T \tag{10}$$

因为 OW 的库存水平在 T_w 处是连续变化的, 所以有 $I_{o1}(T_w)=I_{o2}(T_w)$, 即

$$W\mathrm{e}^{-\theta T_w}=\frac{D}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(T-T_w)}-1) \tag{11}$$

据此可求出 RW 的库存水平降为零的时刻为:

$$T_w=\frac{1}{\theta}\ln\left(\mathrm{e}^{\theta T}-\frac{\theta W}{D}\right) \tag{12}$$

进一步, 在 (12) 式中令 $T_w=M$ 可得:

$$T_M=\frac{1}{\theta}\ln\left(\mathrm{e}^{\theta M}+\frac{\theta W}{D}\right) \tag{13}$$

由以上分析知, 当 $Q>W$(或 $T>T_o$) 时两货栈系统每周期的订货量为:

$$Q=W+I_r(0)=W+\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1) \tag{14}$$

显然销售商一个订货周期内的成本函数由以下几个部分组成:

1) 每周期的订货费用为 K

2) 每周期 RW 的库存费用

①当 $T\leq T_o$ 时, 由于没有租用货栈, 所以 RW 的库存费用为 0;

②当 $T>T_o$ 时, 费用为 $h_r\int_0^{T_w}I_r(t)\mathrm{d}t=h_r\left[\frac{D}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)-\frac{DT_w}{\lambda}\right]$.

3) 每周期 OW 的库存费用

①当 $T\leq T_o$ 时, 费用为 $h_o\int_0^{T}I_o(t)\mathrm{d}t=h_o[\frac{D}{\theta^2}(\mathrm{e}^{\theta T}-1)-\frac{DT}{\theta}]$;

②当 $T>T_o$ 时, 费用为

$$h_o\int_0^{T_w}I_{o1}(t)\mathrm{d}t+h_o\int_{T_w}^{T}I_{o2}(t)\mathrm{d}t=h_o\left[\frac{W}{\theta}(1-\mathrm{e}^{-\theta T_w})+\frac{D}{\theta^2}(\mathrm{e}^{\theta(T-T_w)}-1)-\frac{D(T-T_w)}{\theta}\right]$$

4) 每周期的购买费用

①当 $T\leq T_o$ 时, 费用为 $cQ=\frac{cD}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta T}-1)$;

②当 $T>T_o$ 时, 费用为 $cQ=c\left[W+\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\right]$.

5) 每周期在允许的滞后支付期限到期后, 销售商为仍未出售的货物的款项而支付的利息

①当 $T\leq M$ 时, 因为订货周期小于允许固定的滞后支付期, 显然此时要付的利息为 0.

②当 $T>M$ 时, 这时因为 $T_M>M$, 所以又可分为以下两种情形:

i) 当 $M<T\leq T_M$ 时, 这表示滞后支付期 M 不小于 T_w, 即滞后支付期到期时 RW 中物品已经销售完毕, 没有售出的物品全部剩余在 OW 中, 所以要支付的利息为

$$cI_p\int_M^T I_{o2}(t)\mathrm{d}t=cI_p\left[\frac{D}{\theta^2}(\mathrm{e}^{\theta(T-M)}-1)-\frac{D(T-M)}{\theta}\right]$$

ii) 当 $T>T_M$ 时, 则滞后支付期 M 小于 T_w, 即允许的滞后支付期到期时 RW 中物品还没有售完, 所以要支付的利息为

$$cI_p\left[\int_M^{T_w}I_r(t)\mathrm{d}t+\int_M^{T_w}I_{o1}(t)\mathrm{d}t+\int_{T_w}^{T}I_{o2}(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=cI_p\left[\frac{D}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{\lambda(T_w-M)}-1)-\frac{D(T_w-M)}{\lambda}+\frac{W}{\theta}(\mathrm{e}^{-\theta M}-\mathrm{e}^{-\theta T_w})+\frac{D}{\theta^2}(\mathrm{e}^{\theta(T-T_w)}-1)-\frac{D(T-T_w)}{\theta}\right]$$

6) 每周期销售商赚取的销售收入的利息

①当 $T\leq M$ 时, 所赚取的利息为 $sI_e[\int_0^T Dt\mathrm{d}t+DT(M-T)]=sI_eD(MT-\frac{1}{2}T^2)$.

②当 $T\geq M$ 时, 本模型采用 Aggarwal 和 Jaggi[14] 以及 Chung[18] 中计算赚取利息的方式,

即假设销售商在整个订货周期内可以一直利用销售所得的收入来赚取利息, 因此所赚取的利息为

$$sI_e\int_0^T D\mathrm{d}t = \frac{sI_eDT^2}{2}$$

所以该销售商单位时间内的平均成本可表示为:

$$AC(T)=\Big\{\text{订货费用}+\text{OW 库存费用}+\text{RW 库存费用}+\text{购买费用}+\text{支付的利息 - 赚取的利息}\Big\}/T$$

由于 $T_o<M<T_M$, 所以平均成本函数$AC(T)$ 可分为以下四种情形:

1) 当 $0<T\le T_o$ 时,

$$AC_1(T)=\frac{1}{T}\left[K+\frac{h_oD}{\theta^2}(\mathrm{e}^{\theta T}-\theta T-1)+\frac{cD}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta T}-1)-sI_eD(MT-\frac{T^2}{2})\right] \tag{15}$$

2) 当 $T_o<T\le M$ 时,

$$\begin{aligned}AC_2(T)=&\frac{1}{T}\Big\{K+\frac{h_o}{\theta^2}\Big[\theta W(1-\mathrm{e}^{-\theta T_w})+D(\mathrm{e}^{\theta(T-T_w)}-\theta(T-T_w)-1)\Big]+\frac{h_rD}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-\lambda T_w-1)+\\&c\left[W+\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\right]-sI_eD(MT-\frac{T^2}{2})\Big\}\end{aligned} \tag{16}$$

3) 当 $M<T\le T_M$ 时,

$$\begin{aligned}AC_3(T)=&\frac{1}{T}\Big\{K+\frac{h_o}{\theta^2}\Big[\theta W(1-\mathrm{e}^{-\theta T_w})+D(\mathrm{e}^{\theta(T-T_w)}-\theta(T-T_w)-1)\Big]+\frac{h_rD}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-\lambda T_w-1)+\\&c\left[W+\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\right]+\frac{cI_pD}{\theta^2}(\mathrm{e}^{\theta(T-M)}-\theta(T-M)-1)-\frac{sI_eDT^2}{2}\Big\}\end{aligned} \tag{17}$$

4) 当 $T>T_M$ 时,

$$\begin{aligned}AC_4(T)=&\frac{1}{T}\Big\{K+\frac{h_o}{\theta^2}\Big[\theta W(1-\mathrm{e}^{-\theta T_w})+D(\mathrm{e}^{\theta(T-T_w)}-\theta(T-T_w)-1)\Big]+\frac{h_rD}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-\lambda T_w-1)+\\&c\left[W+\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\right]+cI_p\Big[\frac{D}{\theta^2}(\mathrm{e}^{\theta(T-T_w)}-\theta(T-T_w)-1)+\\&\frac{D}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{\lambda(T_w-M)}-\lambda(T_w-M)-1)+\frac{W}{\theta}(\mathrm{e}^{-\theta M}-\mathrm{e}^{-\theta T_w})\Big]-\frac{sI_eDT^2}{2}\Big\}\end{aligned} \tag{18}$$

因此销售商单位时间内的平均成本$AC(T)$ 可以表示为下述分段函数:

$$AC(T)=\begin{cases}AC_1(T),\ 0<T\le T_o\\AC_2(T),\ T_o<T\le M\\AC_3(T),\ M<T\le T_M\\AC_4(T),\ T_M<T<+\infty\end{cases} \tag{19}$$

因为$AC_1(T_o)$=$AC_2(T_o)$, $AC_2(M)$=$AC_3(M)$, $AC_3(T_M)$=$AC_4(T_M)$, 所以$AC(T)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是连续的. 本文要解决的问题是: 1) 在允许购买费用滞后支付的条件下, 销售商是否需要租用货栈? 2) 库存系统的最优订货周期的长度 (或者订货量) 是多少? 下面我们将对上述模型进行分析求解.

4 模型求解

首先给出关于函数 $AC_i(T)(i=1,2,3,4)$ 最优解的一个性质定理.

定理 1 1) $AC_1(T)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是关于 T 的下凸函数, 且存在唯一最小值点 $T_1^*\in(0,+\infty)$.

2) $AC_2(T)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是关于 T 的单峰函数, 且存在唯一最小值点 $T_2^*\in(0,+\infty)$.

3) 当 $f_3(M)>0$ 时, $AC_3(T)$ 在区间 $(M,+\infty)$ 上是关于 T 的单峰函数, 且此时存在唯一最小值点 $T_3^*\in(M,+\infty)$; 而当 $f_3(M)\le 0$ 时, $AC_3(T)$ 在区间 $(M,+\infty)$ 上严格递增.

4) 当 $f_4(T_M)>0$ 时, $AC_4(T)$ 在区间 $(T_M,+\infty)$ 上是关于 T 的单峰函数, 且此时存在唯一最小值点 $T_4^*\in(T_M,+\infty)$, 而当 $f_4(T_M)\le 0$ 时, $AC_4(T)$ 在区间 $(T_M,+\infty)$ 上严格递增.

证明见附录 A.

现在来讨论库存系统何时租用货栈是最佳的策略, 以及整个系统的最优订货周期 T^* 如何来确定. 经计算可得

$$AC_1'(T_o) = -f_1(T_o)/T_o^2 = AC_2'(T_o) = -f_2(T_o)/T_o^2, AC_2'(M) = -f_2(M)/M^2, AC_3'(M) = -f_3(M)/M^2$$

$$AC_3'(T_M) = -f_3(T_M)/T_M^2 = AC_4'(T_M) = -f_4(T_M)/T_M^2$$

根据 $f_1(T_o)$, $f_2(T_o)$, $f_2(M)$, $f_3(M)$ 以及 $f_3(T_M)$, $f_4(T_M)$ 的之间的正负大小关系, 综合分析后可推出如下定理.

定理 2

1) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) \geq 0, f_3(M) > 0$, $f_3(T_M) > 0$ 且 $f_4(T_M) > 0$, 则 $AC(T^*) = AC_4(T_4^*)$, $T^* = T_4^*$.

2) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) < 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) > 0$ 且 $f_4(T_M) > 0$, 则 $AC(T^*) = \min\{AC_2(T_2^*), AC_4(T_4^*)\}$, 而 T^* 是 T_2^*, T_4^* 中对应最小成本的值.

3) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) \geq 0$, $f_3(M) > 0, f_3(T_M) \leq 0$ 且 $f_4(T_M) \leq 0$, 则 $AC(T^*) = AC_3(T_3^*)$, 而 $T^* = T_3^*$.

4) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) < 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) \leq 0$ 且 $f_4(T_M) \leq 0$, 则 $AC(T^*) = \min\{AC_2(T_2^*), AC_3(T_3^*)\}$, 而 T^* 是 T_2^*, T_3^* 中对应最小成本的值.

5) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) < 0, f_3(M) \leq 0$, $f_3(T_M) \leq 0$ 且 $f_4(T_M) \leq 0$, 则 $AC(T^*) = AC_2(T_2^*)$, 而 $T^* = T_2^*$.

6) 若 $f_1(T_o) \leq 0$, $f_2(T_o) \leq 0$, $f_2(M) < 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) > 0$ 且 $f_4(T_M) > 0$, 则 $AC(T^*) = \min\{AC_1(T_1^*), AC_4(T_4^*)\}$, 而 T^* 是 T_1^*, T_4^* 中对应最小成本的值.

7) 若 $f_1(T_o) \leq 0$, $f_2(T_o) \leq 0$, $f_2(M) < 0$, $f_3(M) > 0, f_3(T_M) \leq 0$ 且 $f_4(T_M) \leq 0$, 则 $AC(T^*) = \min\{AC_1(T_1^*), AC_3(T_3^*)\}$, 而 T^* 是 T_1^*, T_3^* 中对应最小成本的值.

8) 若 $f_1(T_o) \leq 0$, $f_2(T_o) \leq 0$, $f_2(M) < 0, f_3(M) \leq 0$, $f_3(T_M) \leq 0$ 且 $f_4(T_M) \leq 0$, 则 $AC(T^*) = AC_1(T_1^*)$, 而 $T^* = T_1^*$.

证明见附录 B.

综合以上分析可知, 我们可以通过如下方法来寻求此两货栈库存系统在延期付款条件下的最优订货策略: 首先根据定理 1 求出各分段成本函数 $AC_i(T)$ 的最优值点 T_i^*(i=1, 2, 3, 4), 然后根据定理 2 通过判断 $f_1(T_0)$、$f_2(T_0)$、$f_2(M)$、$f_3(M)$、$f_3(T_M)$ 和 $f_4(T_M)$ 的正负关系, 就可以确定库存系统的最优订货成本 $AC(T^*)$ 和最优订货周期 T^*, 从而系统的最优订货量 Q^* 也可以根据公式 (3) 或 (14) 求出来. 显然若 $Q^* \leq W$, 则不需要租用货栈, 否则租用货栈是最佳的选择.

5　数值例子

例 设某销售商经销某变质性商品, 根据历史销售数据知该物品单位时间的需求为 D=500, 假设销售商 OW 的容量为 W=200, 每次订货的固定订货费用为 K=100, 物品的采购价格为 c=10, 市场销售价格为 s=15, 在 OW 和 RW 中贮存物品时变质率分别为 θ =0.02 和 λ =0.04, OW 中单位商品单位时间的库存保管费用 h_o=0.2, RW 中单位商品单位时间的库存保管费用 h_r=0.5, 单位库存单位时间的支付利息 I_p=0.18, 单位库存单位时间的收益利息 I_e=0.12; 若供应商给予订货商的购买费用滞后支付期 M =0.80 , 则该订货商是否要租用货栈? 其最优订货量是多少?

此时 T_o=0.3984, T_M =1.1921, 使用 matlab 软件计算 $AC_i(T)$ 的最优解分别为 T_1^*=0.4262, T_2^*=0.4211, T_3^*=1.3208, T_4^*=1.3205, 同时又因为 $f_1(T_o) = f_2(T_o) = 12.6143 > 0, f_2(M) = -314.581 < 0, f_3(M) = 261.4194 > 0$ 且 $f_3(T_M) = f_4(T_M) = 77.5935 > 0$, 所以根据定理 2 知最优订货周期 T^* 为 T_2^*, T_4^* 中对应最小成本的值, 经计算可知 $AC_2(T_2^*) = 4749.42$, $AC_4(T_4^*)$=4790.60, 显然 $AC_2(T_2^*) < AC_4(T_4^*)$, 所以 $T^* = T_2^*$=0.4211, 对应的最优平均成本和最优订货量分别为 $AC(T^*)$=4749.42, Q^*=211.4487; 又因为 $Q^* > W$, 所以租用货栈是订货商的最佳选择, 且需要在 RW 中库存物品的量为 11.4487.

此外, 本文在上述例子的基础上, 进一步考察了模型参数 W, M 和 K 的变化对库存系统最优订货策略以及最优平均成本的影响. 当每个参数变化时其它参数值保持不变, 表 1–3 给出了观察结果.

表 1　W 的变化对最优订货策略的影响

W	T_o	$f_1(T_0)$	$f_2(T_0)$	$f_2(M)$	$f_3(M)$	$f_3(T_M)$	$f_4(T_M)$	T^*	Q^*	$AC(T^*)$	RW
50	0.0999	>0	>0	<0	>0	>0	>0	T_2^*=0.3867	194.51	4778.20	144.51
150	0.2991	>0	>0	<0	>0	>0	>0	T_2^*=0.4054	203.60	4753.30	53.60
250	0.4975	<0	<0	<0	>0	>0	>0	T_1^*=0.4262	214.00	4749.20	0
400	0.7937	<0	<0	<0	>0	<0	<0	T_3^*=1.4141	719.13	4733.20	319.13

表 2　M 的变化对最优订货策略的影响

M	T_M	$f_1(T_0)$	$f_2(T_0)$	$f_2(M)$	$f_3(M)$	$f_3(T_M)$	$f_4(T_M)$	T^*	Q^*	$AC(T^*)$	RW
0.40	0.7952	>0	>0	>0	>0	>0	>0	T_4^*=0.9098	460.43	4957.90	260.43
0.60	0.9937	>0	>0	<0	>0	>0	>0	T_4^*=1.1008	559.03	4866.91	359.03
0.80	1.1921	>0	>0	<0	>0	>0	>0	T_2^*=0.4211	211.45	4749.42	11.45
1.00	1.3906	>0	>0	<0	>0	>0	>0	T_2^*=0.4211	211.45	4569.40	11.45

表 3　K 的变化对最优订货策略的影响

K	$f_1(T_0)$	$f_2(T_0)$	$f_2(M)$	$f_3(M)$	$f_3(T_M)$	$f_4(T_M)$	T^*	Q^*	$AC(T^*)$	RW
10	<0	<0	<0	>0	<0	<0	T_1^*=0.1348	67.50	4428.30	0
50	<0	<0	<0	>0	>0	>0	T_1^*=0.3014	151.16	4611.70	0
200	>0	>0	<0	>0	>0	>0	T_4^*=1.4673	750.45	4862.30	550.45
500	>0	>0	>0	>0	>0	>0	T_4^*=1.8290	942.11	5044.20	742.11

由表 1–3 可以推出如下结论:

1) 随着 W 的增大, 最优订货周期 T^* 和最优订货量 Q^* 也随之增大, 但是系统的最优成本 $AC(T^*)$ 却不断减小. 这是因为当 OW 的容量变大时, 销售商自然会增大订货量, 因此订货周期也随之增加, 同时因为增大了 OW 的容量就相当于节约了平均库存费用, 从而使得系统平均成本下降;

2) 随着允许滞后支付期 M 的增大, 系统的最优平均在不断的减小, 这与实际情况是吻合的. 有趣的是当 M 较小时, 随着 M 的增大销售商的订货量也在不断增大, 但当 M 增大到一定程度时, 销售商的订货量反而会下降, 然后维持在某一固定水平. 这从某种意义上解释了为什么在实际中供应商通峋凵桃桓鼋铣ἆ□换崽□ἆ闹秃笕Ц镀因为只有这样才能提高销售商增大订货量的积极性.

3) 当订货费用 K 增加时, T^*, Q^* 以及$AC(T^*)$ 都在随之增大. 这是因为每次的订货费用越高, 销售商为了降低订货次数就会增加每次的订货量, 以至于当订货量超过 OW 的容量时就需要租用 RW 来库存超过 OW 容量的物品, 从而就导致了订货周期和系统成本的增加. 所以销售商为了减小库存系统的平均成本就应尽量降低每次订货的固定费用.

6　结论

考虑到在实际的物流系统中, 上一级的供应商为了刺激下一级销售商的订货量通嵩市砉郝蚍延弥秃笕Ц兑欢问奔本文将已有的两货栈库存系统作了进一步的扩展, 发展了延期付款情形下的变质性物品的两货栈库存模型. 然后重点对模型的最优解进行了详细地分析, 给出了寻求两货栈库存系统的最优进货策略的理论依据与简单方法, 为库存管理者制定订货策略提供了决策依据. 本模型的进一步拓展方向: 可考虑其它需求形式和运输模式等.

参考文献

[1] Hartely V R. Operations Research-A Managerial Emphasis[M]. Santa Monica, CA: Good Year, 1976, 315–317.
[2] Sarma K V S. A deterministic order-level inventory model for deteriorating items with two storage facitlities[J].

European Journal of Operational Research, 1987, 29: 70–72.

[3] Pakkala T P M, Achary K K. A deterministic inventory model for deteriorating items with two warehouses and finite replenishment rate[J]. European Journal of Operational Research, 1992, 57: 71–76.

[4] Goswami A, Chaudhuri K S. An economic order quantity model for items with two levels of storage for a linear trend in demand[J]. Journal of the Operational Research Society, 1992, 43: 157–167.

[5] Bhunia A K, Maiti M. A two-warehouse inventory model for deteriorating items with a linear trend in demand and shortages[J]. Journal of the Operational Research Society, 1998, 49: 287–292.

[6] Zhou Y W. An optimal EOQ model for deteriorating items with two warehouses and time-varying demand[J]. Mathematica Applicata, 1998, 10: 19–23.

[7] Goyal S K, Giri B C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134: 1–16.

[8] 杨善林, 周永务. 两货栈库存模型: 考虑时变需求和价格折扣 [J]. 系统工程学报, 2003, 18: 498–505.
Yang S L, Zhou Y W. Two-warehouse inventory model: Considering time-varying demand and price discounts[J]. Journal of Systems Engineering, 2003, 18: 498–505.

[9] Zhou Y W, Yang S L. A two-warehouse inventory model for items with stock-level-dependent rate[J]. International Journal of Production Economics, 2005, 95: 215–228.

[10] Yang H L. Two-warehouse inventory models for deteriorating items with shortages under inflation[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 157: 344–356.

[11] Dye C Y, Ouyang L Y, Hsieh T P. Deterministic inventory model for deteriorating items with capacity constraint and time-proportional backlogging rate[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 178: 789–807.

[12] Gupta D, Wang L. The impact of trade-credit terms on inventory decisions[Z]. 2005.

[13] Goyal S K. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments[J]. Journal of the Operational Research Society, 1985, 36: 335–338.

[14] Aggarwal S P, Jaggi C K. Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments[J]. Journal of the Operational Research Society, 1995, 46: 658–662.

[15] Jamal A M M, Sarker B R, Wang S. An ordering policy for deteriorating items with allowable shortages and permissible delay in payment[J]. Journal of the Operational Research Society, 1997, 48: 826–833.

[16] Hwang H, Shinn S W. Retailer's pricing and lot sizing policy for exponentially deteriorating products under the condition of permissible delay in payment[J]. Computers & Operations Research, 1997, 24: 539–547.

[17] 周永务. 购买费用的滞后支付对库存系统最优订货策略的影响 [J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(4): 116–120.
Zhou Y W. The effect of the delayed payment for purchasing cost on the optimal order policy of inventory system[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 1997, 17(4): 116–120.

[18] Chung K J. Economic order quantity model when delay in payments is permissible[J]. Journal of Information & Optimization Sciences, 1998, 19: 411–416.

[19] Chang H J, Hung C H, Dye C Y. An inventory model for deteriorating items with linear trend demand under the condition that permissible delay in payments[J]. Production Planning and Control, 2001, 12: 274–282.

[20] Huang Y F. Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing[J]. Journal of the Operational Research Society, 2003, 54: 1011–1015.

[21] Teng J T, Chang C T, Goyal S K. Optimal pricing and ordering policy under permissible delay in payments[J]. International Journal of Production Economics, 2005, 97: 121–129.

附录 A　定理 1 的证明

证明　1) 对$AC_1(T)$ (即 (15) 式) 求二阶导数可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 AC_1(T)}{\mathrm{d}T^2}=\frac{2}{T^3}\left\{K+\frac{D(h_o+c\theta)}{2\theta^2}[(\theta T)^2\mathrm{e}^{\theta T}-2\theta T\mathrm{e}^{\theta T}+2\mathrm{e}^{\theta T}-2]\right\} \tag{20}$$

因为在区间 $(0,+\infty)$ 上 $(\theta T)^2\mathrm{e}^{\theta T}-2\theta T\mathrm{e}^{\theta T}+2\mathrm{e}^{\theta T}-2>0$, 所以有 $\mathrm{d}^2AC_1(T)/\mathrm{d}T^2>0$, 即$AC_1(T)$ 是关于 T 的下凸函数. 因此$AC_1(T)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在唯一最小值点 T_1^*, 且 T_1^* 必满足 "$\mathrm{d}AC_1(T)/\mathrm{d}T=0$", 而

$$\frac{\mathrm{d}AC_1(T)}{\mathrm{d}T}=-\frac{1}{T^2}\left\{K-\frac{D(h_o+c\theta)}{\theta^2}(\theta T\mathrm{e}^{\theta T}-\mathrm{e}^{\theta T}+1)-\frac{sI_eDT^2}{2}\right\}\triangleq-\frac{1}{T^2}f_1(T) \tag{21}$$

解方程 $f_1(T)=0$ 可得$AC_1(T)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一最优值 T_1^*.

2) 为简化计算, 利用 (11) 式对 (16) 式化简可得

$$AC_2(T)=\frac{1}{T}\left\{K+\frac{h_o}{\theta}[W-D(T-T_w)]+\frac{h_rD}{\lambda^2}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-\lambda T_w-1)+c[W+\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)]-sI_eD(MT-\frac{T^2}{2})\right\}$$

根据极值存在的必要条件知, $AC_2(T)$ 的最优解一定满足 "$\mathrm{d}AC_2(T)/\mathrm{d}T=0$", 对上式求导可得:

$$\frac{\mathrm{d}AC_2(T)}{\mathrm{d}T}=-\frac{1}{T^2}\left\{K-\frac{h_o}{\theta}\left(DT\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-DT_w-W\right)-\frac{h_rD}{\lambda^2}\left[\lambda T(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-\lambda T_w-1)\right]-c\left[DT\mathrm{e}^{\lambda T_w}\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-W-\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\right]-\frac{sI_eDT^2}{2}\right\}\triangleq-\frac{1}{T^2}f_2(T) \tag{22}$$

所以 $f_2(T)$ 与 $\mathrm{d}AC_2(T)/\mathrm{d}T$ 有相同的定义域和相反的符号, 进一步对 $f_2(T)$ 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}f_2(T)}{\mathrm{d}T}=-DT\left\{\left(\frac{\lambda h_o-\theta h_r}{\lambda\theta}\right)\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}+\frac{(h_r+\lambda c)\mathrm{e}^{\mathrm{d}T_w}}{\lambda}\left[\lambda\left(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}\right]+sI_e\right\} \tag{23}$$

而由 (12) 可得$\mathrm{d}T_w/\mathrm{d}T=D\mathrm{e}^{\theta T}/(D\mathrm{e}^{\theta T}-\theta W)$, $\mathrm{d}^2T_w/\mathrm{d}T^2=-DW\theta^2\mathrm{e}^{\theta T}/(D\mathrm{e}^{\theta T}-\theta W)^2<0$. 既然$\lambda\geq\theta$, 则$\lambda(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T})^2+\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}\geq\theta(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T})^2+\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}=D\theta\,\mathrm{e}^{\theta T}/(D\mathrm{e}^{\theta T}-\theta W)>0$(因为 $T>T_M$ 时可得$D\mathrm{e}^{\theta T}>\theta W$), 同时由于$\lambda h_o\leq\theta h_r$, 所以易推出$\mathrm{d}f_2(T)/\mathrm{d}T<0$. 注意到 $f_2(0)=K+h_oW/\theta+cW>0$ 和 $\lim\limits_{T\to+\infty}f_2(T)=-\infty$, 因此函数 $f_2(T)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在唯一的零点 T_2^*, 且当 $0<T<T_2^*$ 时 $f_2(T)>0$, 而当 $T>T_2^*$ 时 $f_2(T)<0$, 所以$AC_2(T)$ 在区间 $(0,T_2^*)$ 严格递减, 在区间 $(T_2^*,+\infty)$ 严格递增, 因此$AC_2(T)$ 是关于 T 的单峰函数, 且 T_2^* 是其唯一最小值点.

3) 对$AC_3(T)$ 求一阶导数可得

$$\frac{\mathrm{d}AC_3(T)}{\mathrm{d}T}=-\frac{1}{T^2}\left\{K-\frac{h_o}{\theta}(DT\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-DT_w-W)-\frac{h_rD}{\lambda^2}\left[\lambda T(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-\lambda T_w-1)\right]-c\left[DT\mathrm{e}^{\lambda T_w}\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-W-\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\right]-\frac{cI_pD}{\theta^2}[\theta T(\mathrm{e}^{\theta(T-M)}-1)-(\mathrm{e}^{\theta(T-M)}-\theta(T-M)-1)]+\frac{sI_eDT^2}{2}\right\}\triangleq-\frac{1}{T^2}f_3(T) \tag{24}$$

为判断 $f_3(T)$ 的正负性, 对 $f_3(T)$ 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}f_3(T)}{\mathrm{d}T}=-DT\left\{\left(\frac{\lambda h_o-\theta h_r}{\lambda\theta}\right)\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}+\frac{(h_r+\lambda c)\mathrm{e}^{\lambda T_w}}{\lambda}\left[\lambda\left(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}\right]+cI_p\mathrm{e}^{\theta(T-M)}-sI_e\right\} \tag{25}$$

已知 $(\frac{\lambda h_o-\theta h_r}{\lambda\theta})\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}+\frac{(h_r+\lambda c)\mathrm{e}^{\mathrm{d}T_w}}{\lambda}[\lambda(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T})^2+\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}]>0$, 当 $T\geq M$ 时由$cI_p\geq sI_e$ 可推出$\mathrm{d}f_3(T)/\mathrm{d}T<0$, 即 $f_3(T)$ 在 $T\geq M$ 时是严格递减函数. 利用假设$cI_p\geq sI_e$ 可以证明 $\lim\limits_{T\to+\infty}f_3(T)=-\infty$, 那么若 $f_3(M)>0$, 则函数 $f_3(T)$ 在区间 $(M,+\infty)$ 内存在唯一零点 T_3^*, 可知$AC_3(T)$ 在 $(M,+\infty)$ 上是一个关于 T 的单峰函数, 即$AC_3(T)$ 在 $(M,+\infty)$ 内$AC_3(T)$ 于 T_3^* 处取得最小值; 反之, 若 $f_3(M)\leq0$, 则函数 $f_3(T)$ 在 $(M,+\infty)$ 内一直取负值, 即$AC_3(T)$ 在 $(M,+\infty)$ 上严格递增.

4) 根据极值存在的必要条件知$AC_4(T)$ 的最优解一定满足 "$\mathrm{d}AC_4(T)/\mathrm{d}T=0$", 对$AC_4(T)$ 求导可得:

$$\frac{\mathrm{d}AC_4(T)}{\mathrm{d}T}=-\frac{1}{T^2}\left\{K-\frac{h_o}{\theta}(DT\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-DT_w-W)-\frac{h_rD}{\lambda^2}\left[\lambda T(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-\lambda T_w-1)\right]-c\left[DT\mathrm{e}^{\lambda T_w}\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-W-\frac{D}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda T_w}-1)\right]-\frac{cI_pD}{\lambda^2}\left[\lambda T(\mathrm{e}^{\lambda(T_w-M)}-1)\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}-(\mathrm{e}^{\lambda(T_w-M)}-\lambda(T_w-M)-1)\right]+\frac{cI_p}{\theta}(W\mathrm{e}^{-\theta M}+DT_w-DT\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T})+\frac{sI_eDT^2}{2}\right\}\triangleq-\frac{1}{T^2}f_4(T) \tag{26}$$

所以 $f_4(T)$ 与$\mathrm{d}AC_4(T)/\mathrm{d}T$有相同的定义域和相反的符号, 对 $f_4(T)$ 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}f_4(T)}{\mathrm{d}T}=-DT\left\{\left(\frac{\lambda h_o-\theta h_r}{\lambda\theta}\right)\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}+\frac{(h_r+\lambda c)\mathrm{e}^{\lambda T_w}}{\lambda}\left[\lambda\left(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}\right)^2+\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}\right]+cI_p\left[\left(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}\right)^2\mathrm{e}^{\theta(T_w-M)}+\frac{1}{\theta}\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}(\mathrm{e}^{\theta(T_w-M)}-1)\right]-sI_e\right\} \tag{27}$$

由于$AC_4(T)$ 的定义域为 $T>T_M$, 所以不妨在 $(T_M, +\infty)$ 上研究 $f_4(T)$ 的性质. 此时必有 $T_w > M$, 又因为$\lambda h_o \le \theta\ h_r$, $\mathrm{d}^2T_w/\mathrm{d}T^2 < 0$ 和 $\lambda(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T})^2 + \frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2} > 0$, 所以由 (27) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}f_4(T)}{\mathrm{d}T} < -DT\left\{cI_p\left[\left(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T}\right)^2 + \frac{1}{\theta}\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2}\right] - sI_e\right\} \tag{28}$$

而 $(\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}T})^2 + \frac{1}{\theta}\frac{\mathrm{d}^2T_w}{\mathrm{d}T^2} = \frac{D\mathrm{e}^{\theta T}}{D\mathrm{e}^{\theta T} - \theta W} > 1$, 又$cI_p \ge sI_e$, 所以有 $\mathrm{d}f_4(T)/\mathrm{d}T < 0$, 即 $f_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 上是严格递减函数. 同样利用$cI_p \ge sI_e$ 可证明 $\lim\limits_{T\to+\infty} f_4(T) = -\infty$, 因此若 $f_4(T_M) > 0$, 则 $f_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 内存在唯一的零点 T_4^*. 根据 $f_4(T)$ 与 $\mathrm{d}AC_4(T)/\mathrm{d}T$ 的关系, 可知$AC_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 上是一个关于 T 的单峰函数, 且$AC_4(T)$ 于 T_4^* 处取得最小值; 但若 $f_4(T_M) \le 0$, 则$AC_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 是递增的.

附录 B 定理 2 的证明

证明 既然 $f_2(T)$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $f_3(T)$ 在 $[M,+\infty)$ 内均严格递减, 所以有 $f_2(T_o) > f_2(M)$, $f_3(M) > f_3(T_M)$, 同时由 (22)、(24) 可知 $f_2(M) < f_3(M)$. 即 $f_1(T_0) = f_2(T_0) > f_2(M) < f_3(M) > f_3(T_M) = f_4(T_M)$, 所以关于 $f_1(T_o)$, $f_2(T_o)$, $f_2(M)$, $f_3(M)$ 以及 $f_3(T_M)$, $f_4(T_M)$ 的正负关系有以下情形:

1) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) \ge 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) > 0$ 且 $f_4(T_M) > 0$, 而已知 $f_1(T_1^*) = 0, f_2(T_2^*) = 0, f_3(T_3^*) = 0$, 且 $f_4(T_4^*) = 0$, 根据 $f_i(T)(i = 1, 2, 3, 4)$ 的单调递减性, 则必有 $T_1^* > T_o$, $T_2^* > T_o, T_2^* \ge M, T_3^* > M$, $T_3^* > T_M, T_4^* > T_M$. 然后由定理 1 可知 $AC_1(T)$ 在区间 $(0, T_o)$ 上严格递减 , $AC_2(T)$ 在区间 (T_o, M) 上递减, $AC_3(T)$ 在区间 (M, T_M) 上递减, 而函数 $AC_4(T)$ 在 (T_M, T_4^*) 上递减但在区间 $(T_4^*, +\infty)$ 递增, 因此分段连续函数$AC(T)$ 在整个定义域 $(0, +\infty)$ 内于 T_4^* 处取得最小值, 即 $T^* = T_4^*$.

2) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) < 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) > 0$ 且 $f_4(T_M) > 0$, 则同理必有 $T_1^* > T_o, T_2^* > T_o, T_2^* < M, T_3^* > M, T_3^* > T_M, T_4^* > T_M$. 所以 $AC_1(T)$ 在 $(0, T_o)$ 递减, $AC_2(T)$ 在 (T_o, T_2^*) 递减但在 (T_2^*, M) 递增, $AC_3(T)$ 在 (M, T_M) 递减, 而 $AC_4(T)$ 在 (T_M, T_4^*) 递减但在 $(T_4^*, +\infty)$ 递增, 因此在 $(0, +\infty)$ 内$AC(T^*) = \min\{AC_2(T_2^*), AC_4(T_4^*)\}$, 而 T^* 是 T_2^*, T_4^* 中对应最小成本的值.

3) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) \ge 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) \le 0$, 则同理必有 $T_1^* > T_o$, $T_2^* > T_o$, $T_2^* \ge M$, $T_3^* > M$, $T_3^* < T_M$, 所以 $AC_1(T)$ 在 $(0, T_o)$ 递减, $AC_2(T)$ 在 (T_o, M) 递减, $AC_3(T)$ 在 (M, T_3^*) 递减但在 (T_3^*, T_M) 递增. 又因为 $f_4(T_M) \le 0$, 则由定理 1 知 $AC_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 递增, 因此在 $(0, +\infty)$ 内 $AC(T^*) = AC_3(T_3^*)$, $T^* = T_3^*$.

4) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) < 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) \le 0$ 且 $f_4(T_M) \le 0$, 则 $T_1^* > T_o$, $T_2^* > T_o$, $T_2^* < M$, $T_3^* > M$, $T_3^* < T_M$, 所以$AC_1(T)$ 在 $(0, T_o)$ 递减, $AC_2(T)$ 在 (T_o, T_2^*) 递减但在 (T_2^*, M) 递增, $AC_3(T)$ 在 (M, T_3^*) 递减但在 (T_3^*, T_M) 递增, 而$AC_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 递增, 因此在 $(0, +\infty)$ 内 $AC(T^*) = \min\{AC_2(T_2^*), AC_3(T_3^*)\}$, 而 T^* 是 T_2^*, T_3^* 中对应最小成本的值.

5) 若 $f_1(T_o) > 0, f_2(T_o) > 0, f_2(M) < 0$, 则 $T_1^* > T_o$, $T_2^* > T_o$, $T_2^* < M$, 即 $AC_1(T)$ 在 $(0, T_o)$ 递减, $AC_2(T)$ 在 (T_o, T_2^*) 递减但在 (T_2^*, M) 递增, 而又因为 $f_3(M) \le 0, f_4(T_M) \le 0$, 所以 $AC_3(T)$ 在 (M, T_M) 递增 , $AC_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 递增, 因此在 $(0, +\infty)$ 内 $AC(T^*) = AC_2(T_2^*)$, 而 $T^* = T_2^*$.

6) 若 $f_1(T_o) \le 0$, $f_2(T_o) \le 0$, $f_2(M) < 0, f_3(M) > 0, f_3(T_M) > 0$ 且 $f_4(T_M) > 0$, 则 $T_1^* \le T_o$, $T_2^* \le T_o$, $T_2^* < M$, $T_3^* > M$, $T_3^* > T_M$, $T_4^* > T_M$. 所以 $AC_1(T)$ 在 $(0, T_1^*)$ 递减但在 (T_1^*, T_o) 递增, $AC_2(T)$ 在 (T_o, M) 递增, $AC_3(T)$ 在 (M, T_M) 递减, 而 $AC_4(T)$ 在 (T_M, T_4^*) 递减但在 $(T_4^*, +\infty)$ 递增, 因此在 $(0, +\infty)$ 内 $AC(T^*) = \min\{AC_1(T_1^*), AC_4(T_4^*)\}$, 而 T^* 是 T_1^*, T_4^* 中对应最小成本的值.

7) 若 $f_1(T_o) \le 0$, $f_2(T_o) \le 0$, $f_2(M) < 0$, $f_3(M) > 0, f_3(T_M) \le 0$, 则 $T_1^* \le T_o$, $T_2^* \le T_o$, $T_2^* < M$, $T_3^* > M$, $T_3^* < T_M$, 所以 $AC_1(T)$ 在 $(0, T_1^*)$ 递减但在 (T_1^*, T_o) 递增, $AC_2(T)$ 在 (T_o, M) 递增, $AC_3(T)$ 在 (M, T_3^*) 递减在 (T_3^*, T_M) 递增, 又因为 $f_4(T_M) \le 0$, 所以 $AC_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 递增, 因此在 $(0, +\infty)$ 内 $AC(T^*) = \min\{AC_1(T_1^*), AC_3(T_3^*)\}$, 而 T^* 是 T_1^*, T_3^* 中对应最小成本的值.

8) 若 $f_1(T_o) \le 0$, $f_2(T_o) \le 0$, $f_2(M) < 0$, 则 $T_1^* \le T_o, T_2^* \le T_o, T_2^* < M$, 即 $AC_1(T)$ 在 $(0, T_1^*)$ 递减但在 (T_1^*, T_o) 递增, $AC_2(T)$ 在 (T_o, M) 递增, 又因为 $f_3(M) \le 0$, $f_4(T_M) \le 0$, 所以 $AC_3(T)$ 在 (M, T_M) 递增, $AC_4(T)$ 在 $(T_M, +\infty)$ 递增, 因此在 $(0, +\infty)$ 内 $AC(T^*) = AC_1(T_1^*)$, 而 $T^* = T_1^*$.