

文章编号:1000-6788(2007)07-0132-05

群组 AHP 判断矩阵的一种有效集结方法

吕跃进,郭欣荣

(广西大学 数学与信息科学学院,南宁 530004)

摘要: 针对群决策中判断矩阵的集结问题,提出了一种基于 m 阶简单无向连通图理论的正互反型判断矩阵的集结方法.在给出了该算法的具体步骤的同时,通过算例分析,说明了该方法的实施过程及其有效性.

关键词: 层次分析法;群决策;综合判断矩阵;集结

中图分类号: O223;C934

文献标志码: A

An Effective Aggregation Method for the AHP Judgement Matrix in Group Decision-Making

LV Yue-jin, GUO Xin-rong

(School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: To solve the aggregation problem of the judgement matrices in Group Decision Making, An improved aggregating method about the reciprocal matrices is presented, which is based on the theory of the m -th power graph of simple undirected connected graph. Finally the applied steps of the proposed approach are described and numerical examples are given to illustrate the effectivity of the method.

Key words: AHP; group decision making; the synthetic judgement matrix; aggregation

1 引言

层次分析法^[1]作为多目标多因素决策的有效方法,被广泛应用于能源系统分析、城市规划、经济管理、教育管理、科研成果评价、社会科学等众多领域.为了使决策具有广泛的代表性,提高决策的有效性和准确性,一个复杂的系统通常需要由多个决策者参与决策,通过对决策者给出的判断矩阵进行集结最终获得一个合理的决策.因此,群组决策中 AHP 判断矩阵的集结问题成为 AHP 理论研究和应用中需要解决的问题之一^[2].

目前关于群决策问题的集结方法有很多,大体上分为直接集结个体排序和集结个体判断矩阵两大类.关于个体排序的集结方法以文[3,4]中所提方法为主;关于个体判断矩阵的集结问题则一般根据不同类型和同种类型两种情况分开讨论.对于不同类型判断矩阵的集结通常采用预先将其进行一致化处理的方法,近年来,有关这方面的研究已引起了重视,并取得了一些研究成果^[5,6];对于同种类型判断矩阵的集结,以对不确定性问题的研究见多^[7~9],其中多以模糊数、区间数等为主要讨论内容;关于确定性判断矩阵集结问题的研究,文[10]通过考虑随机变量的均值和方差所包含的信息,利用统计的方法来集结个体判断矩阵,而常用的方法是由 Saaty 提出的加性集结方法和乘性集结方法^[11~13].虽然文[3]指出了乘性集结方法的优良性,但由此所得的判断矩阵往往不能满足一致性的要求,这就需要决策者重新参与判断矩阵的调整工作,然而完成这项工作并不容易.那么能否从每个判断矩阵出发,从中寻找规律,剔除那些有偏差的判断,最终得到不再需要进行一致性调整的综合判断矩阵呢?

本文从这一角度出发,利用连通无向图的相关理论,提出了一种确定群组决策综合判断矩阵的方法,

收稿日期:2006-06-21

资助项目:广西大学科研基金(X032016)

作者简介:吕跃进(1958-),男,广东龙川人,教授,研究方向:运筹学,预测与决策等.

并进行了相应的算例分析,指出了该方法的有效性.

2 预备知识

2.1 关于图的基本理论

定义 2.1.1^[14] 简单图 称 $G = (V, E)$ 为简单图,如果 G 中无环(两端点相同的边称为环)并且无平行边.

定义 2.1.2^[14] 连通图 称无向图 $G = (V, E)$ 为连通图,如果 G 中每一对不同的顶点之间都有一条路.

定义 2.1.3^[14] 树 称无向图 $G = (V, E)$ 为一棵树,如果 G 是一个无圈连通无向图.

定理 2.1.1^[14] T 是一棵树 $\Leftrightarrow T$ 中无环,且任何两个不同的顶点之间有且仅有一条路.

2.2 AHP 互反型判断矩阵及其一致性

定义 2.2.1^[11] 一致矩阵 称 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为完全一致性矩阵,如果对 $\forall i, j, k (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$, 都有 $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$ 成立.

一致性正互反矩阵的性质^[11]:

- 1) 若 A 一致,则 A^T 也一致.
- 2) A 的每一行均为任意指定的另一行的正数倍.
- 3) A 的最大特征根 $\lambda_{\max} = n$,其余特征根皆为零.
- 4) 若 A 的属于 λ_{\max} 的特征向量为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$,则: $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$.
- 5) A 的归一化右主特征向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 就是它的排序权向量.

基于上述性质,我们容易发现,一个完全一致的正互反矩阵可由它的某一行(或列)完全确定.结合图的相关理论,熊立在文[15]中进一步指出:

定理 2.2.1^[15] 对于任意一个 n 阶正互反矩阵 A ,从 A 中任选 $(n - 1)$ 个满足条件 的元素,就能构造出一个完全一致的矩阵.其中:

条件 :这 $(n - 1)$ 个元素中的任意一个元素都不能由其它 $(n - 2)$ 个元素导出.

文[15]在给出上述命题的相关证明的同时,指出了这样的一个事实:

满足条件 的 $(n - 1)$ 个元素对应着一个没有回路的连通无向简单图 G^* .其中,顶点和边的对应关系如下:

- 1) 元素 a_{ij} 的下标 i, j 分别对应于 G^* 中的两个顶点 V_i 和 V_j .
- 2) 元素 a_{ij} 对应于图 G^* 中两顶点 V_i 和 V_j 的一条关联边 e_{ij} .

3 群组决策中正互反型判断矩阵的集结方法

为了便于下面的讨论,这里先给出群组决策的一般性结构.设有 m 位专家对 n 个决策方案进行评判,其中 $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ 为专家决策群体, $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 为候选的决策评价方案.设第 k 位专家 E_k 的评价判断矩阵为 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n}$, 其中, $k = 1, 2, \dots, m; i, j = 1, 2, \dots, n$.

由于专家权重的不同可以转化为专家人数的不同^[16],我们不妨假设各决策者的权重是相同的.为了获得一个较为合理的决策,需要充分考虑各决策者给出判断矩阵所反映的一致性信息.为此,首先构造一个等级偏差矩阵 $E = (e_{ij})_{n \times n}$,其中 $e_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{s < t = 1}^m | \tilde{a}_{ij}^{(s)} - \tilde{a}_{ij}^{(t)} | (s, t = 1, 2, \dots, m)$. $\tilde{a}_{ij}^{(s)}$ 代表决策者 E_s 认为方案 S_i 和 S_j 相比较时所反映出的重要性等级.以 1~9 标度为例,标度系统总共存在 17 个不同的标度值,分别对应着 17 个不同的等级,用自然数将这些等级依次进行编号,其对应关系如下:

$$\tilde{a}_{ij}^{(s)} = \begin{cases} k + 8 & a_{ij}^{(s)} = k (k = 1, 2, \dots, 9) \\ 10 - k & a_{ij}^{(s)} = \frac{1}{k} (k = 2, 3, \dots, 9) \end{cases}, \quad S = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

容易证明: $e_{ij} = e_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n); e_{ii} = 0$.

易见, 等级偏差矩阵 E 比较恰当地反映了决策者所给出的不同判断矩阵间的不一致性信息.

为得到正互反型的综合判断矩阵, 通常采用乘性综合的方法, 但此时可能需要进行复杂的一致性调整工作才能得到较为满意的决策. 本文认为, 在专家判断认真程度足够高的前提下, 一致性调整的工作是可以避免的. 基于定理 2.2.1 的理论, 依据等级偏差矩阵 E 中所提供的一致性信息, 我们可以从决策者判断矩阵 $A^{(k)}$ 中挑选出判断尽可能一致的元素, 进而用以构成一个完全一致的综合判断矩阵 A^* . 具体步骤如下:

Step 1: 对决策者 E_k 所给出的正互反型判断矩阵 $A^{(k)} (k = 1, 2, \dots, m)$ 进行一致性检验. 将未通过满意一致性检验的矩阵反馈给相应的决策者重新判断, 直至达到满意指标的要求为止.

Step 2: 依据(1)式确定出整个决策过程的等级偏差矩阵 E .

Step 3: 从等级偏差矩阵 E 中依次挑选出等级偏差最小并且符合条件的 $(n - 1)$ 个元素 e_{ij}^* .

Step 4: 从 $A^{(k)} (k = 1, 2, \dots, m)$ 中将与 e_{ij}^* 对应位置相同的元素取出, 记为 $a_{ij}^{(k)*}$.

Step 5: 利用加性或乘性综合方法对已取出的 $(n - 1)$ 组元素 $a_{ij}^{(k)*}$ 进行集结, 将集结结果记为 a_{ij}^* .

Step 6: 利用经过综合得到 $(n - 1)$ 个 a_{ij}^* 建立综合判断矩阵 $A^* = (a_{ij}^*)_{n \times n}$, 使用和法或 EM 法对其进行方案最终排序.

4 算例分析

例 1^[15] 假设由四位专家给出的判断矩阵分别为:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 5 \\ 1/6 & 1 & 1 & 1 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

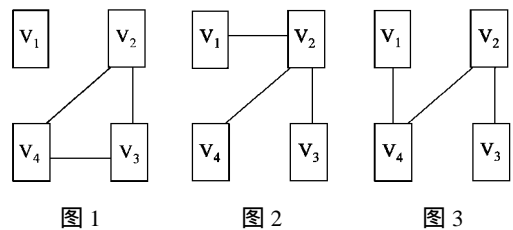
$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 4 \\ 1/6 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/8 & 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

分析: 首先, 通过计算可知各专家所给出的判断矩阵均通过一致性检验. 根据(1)式可确定等级偏差矩阵如下:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 20 & 12 \\ 12 & 0 & 3 & 6 \\ 20 & 3 & 0 & 9 \\ 12 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 初步确定判断一致性程度较高的三个元素为: $a_{23}^{(k)}, a_{24}^{(k)}, a_{34}^{(k)} (k = 1, 2, 3, 4)$, 按照定理 2.2.1 中的对应关系, 作出其对应的无向连通图(图 1).

由于图 1 中存在回路 $V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2$, 不符合条件中的要求, 因此需要对选定的三个元素进行调整. 使用破圈法思想, 首先去掉回路中等级偏差较大的元素 $a_{34}^{(k)}$, 此时可以补入的元素有 $a_{12}^{(k)}$ 和 $a_{14}^{(k)} (k = 1, 2, 3, 4)$. 由此得到两个水平相当的三元组 $a_{23}^{(k)}, a_{24}^{(k)}, a_{12}^{(k)} (k = 1, 2, 3, 4)$ 和 $a_{23}^{(k)}, a_{24}^{(k)}, a_{14}^{(k)} (k = 1, 2, 3, 4)$, 其对应的无向连通图如图 2 和图 3.



针对图 2 中的情况, 可从 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n} (k = 1, 2, 3, 4)$ 中提取三组元素如下:

$$a_{23}^{(k)*} = 1, 1, 1, 1/2; a_{24}^{(k)*} = 1/2, 1, 1/2, 1/3; a_{12}^{(k)*} = 7, 6, 6, 3,$$

采用加性集结方法,得: $a_{23}^* = 7/8$; $a_{24}^* = 5/12$; $a_{12}^* = 11/2$. 进而可构造完全一致性判断矩阵: $A^* =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 11/2 & 77/16 & 55/24 \\ 2/11 & 1 & 7/8 & 5/12 \\ 16/77 & 8/7 & 1 & 10/21 \\ 24/55 & 12/5 & 21/10 & 1 \end{pmatrix}$$

,利用 EM 法对之进行排序得归一化排序向量为: $W = (0.5476, 0.0996, 0.1138, 0.2390)^T$.

按照同样的方法,可求得图 3 所对应的方案排序为: $W = (0.6490, 0.0773, 0.0883, 0.1854)^T$.

以上两种情况所对应的结果均与原文中所给出的专家排序 $S_1 > S_4 > S_3 > S_2$ 完全相同.

例 2^[17] 假设由九位专家给出的判断矩阵分别为:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 1/7 & 1 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1/6 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(3)} &= \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1/8 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^{(4)} &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(5)} &= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 1/9 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(6)} &= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^{(7)} &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1/6 & 1 & 1/3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(8)} &= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 1/9 & 1 & 1/3 \\ 1/6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(9)} &= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 1/9 & 1 & 1/4 \\ 1/6 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

依据文中所给出的方法,采用乘性综合的方法集结一致性较好的信息,最终可得方案排序向量为 $W = (0.7071, 0.0949, 0.2174)^T$,而原文中经过一致性调整后所给出的排序向量为: $W = (0.7520, 0.0786, 0.1694)^T$. 大量的实践证明,本文的方法是行之有效的.

5 结论

本文给出了综合群组判断矩阵的一种新方法,通过提取专家判断中尽可能一致的信息,构造出一个完全一致的综合判断矩阵.这种方法直观、合理、有效,便于进行方案排序,而且避免了一致性调整这项复杂工作的进行.当然,该方法还有许多需要进一步探讨和扩展的地方,作者将在以后的研究中继续加以完善.

参考文献:

- [1] 王莲芬,许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京:中国人民大学出版社,1990.
Wang Lianfen, Xu Shubo. The Introduction about the Analytic Hierachy Process[M]. Beijing: China Renmin University Press, 1990.
- [2] 许树柏. 理论研究的现状与愿望[J]. 决策与层次分析法, 1989, (1): 35 - 42.
Xu Shubo. The present conditions and aspirations on the theory study[J]. Decision and the AHP, 1989, (1): 35 - 42.
- [3] 王明哲. 群偏好 GMM 集结方法的讨论[J]. 华中理工大学学报, 1998, 26(3): 68 - 73.
Wang Mingzhe. A discussion on the GMM group preference aggregation methods in AHP[J]. J. Huazhong Univ of Sci & Tech, 1998, 26(3): 68 - 73.
- [4] 陈华友,刘春林. 群决策中基于不同偏好信息的相对熵集成方法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2005, 35(2): 311 - 315.
Chen Huayou, Liu Chunlin. Relative entropy aggregation method in group decision making based on different types of preference information[J]. Journal of Southeast University(Natural Science Edition), 2005, 35(2): 311 - 315.
- [5] 郭春香,郭敦煌. 属性具有不同形式偏好信息的群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(1): 63 - 65.
Guo Chunxiang, Guo Dunhuang. Approach of multiple-attribute group decision making with different forms of preference information [J]. Systems Engineering and Electronics, 2005, 27(1): 63 - 65.
- [6] Chiclana F, Herrera F, Herrera-viedma F. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1): 33 - 48.
- [7] 柴小青. 一种基于专家模糊偏好集结的群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 1998, 32 - 35.

- Chai Xiaoqing. A method of group decision making problems based on aggregating experts fuzzy preferences [J]. Systems Engineering and Electronics, 1998:32 - 35.
- [8] Dae-Young Choi. A new aggregation method in a fuzzy environment [J]. Decision Support Systems, 1999, 25:39 - 51.
- [9] 李炳军, 刘思峰. 基于区间数判断矩阵群信息的集结方法 [J]. 江南大学学报(自然科学版), 2004, 3(5):528 - 534.
Li Bingjun, Liu Sifeng. The method of aggregating group information under interval number judgment matrixes [J]. Journal of Southern Yangtze University(Natural Science Edition), 2004, 3(5):528 - 534.
- [10] 郑明, 王芳, 黄治斌. 群组决策中求权向量的一种新方法 [J]. 管理工程学报, 2001, 15(2):22 - 23.
Zheng Ming, Wang Fang, Huang Zhibin. A new approach of priorities in group decision [J]. Journal of Industrial Engineering Management, 2001, 15(2):22 - 23.
- [11] Saaty T.L. Decision Making for Leasers[M]. Wadsworth Inc, Belmont, California, 1982.
- [12] Ramanathan R, Ganesh L S. Group preferences aggregation method employed in AHP: An evaluation and intrinsic process for deriving members weightiness [J]. European Journal of Operational Research, 1994, 79:249 - 265.
- [13] 宋远方. 混合因素与群体 AHP 方法及其通用软件 [J]. 系统工程, 1989, 7(1):66 - 70.
Song Yuanfang. The mixed factor and the group AHP method and the general software [J]. Systems Engineering, 1989, 7(1):66 - 70.
- [14] 殷剑宏, 吴开亚. 图论及其算法 [M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2003.
Yin Jianhong, Wu Kaiya. The Graph Theory and Theorem [M]. Hefei: The Science and Technology University of China Publish, 2003.
- [15] 熊立, 梁良, 王国华. 一种群决策中确定专家判断认真程度的方法 [J]. 系统工程, 2004, 22(3):84 - 87.
Xiong Li, Liang Liang, Wang Guohua. A new method of determining the reliability of decisionmaker in group decision [J]. Systems Engineering, 2004, 22(3):84 - 87.
- [16] 董玉成, 陈义华. 群组决策可接受性理论 [J]. 重庆大学学报, 2004, 27(6):96 - 98.
Dong Yucheng, Chen Yihua. The acceptable theory in the group decisionmaking [J]. Journal of Chongqing University, 2004, 27(6):96 - 98.
- [17] 宋海洲. 群组决策的综合判断矩阵及一致性调整 [J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(6):52 - 59.
Song Haizhou. The synthetic judgement matrix and the adjustment on consistency in group decisionmaking [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2004, 34(6):52 - 59.