文章编号:1000-6788(2005)11-0007-07

拓展的 C-OWA 算子及其在不确定多属性决策中的应用

徐泽水[1,2]
(1. 清华大学经济管理学院,北京 100084;2. 解放军理工大学理学院,江苏 南京 211101)

摘要: 把 Yager 提出的连续区间数据 OWA(C-OWA)算子进行拓展,提出了加权的 C-OWA(WC-OWA)算子、有序加权的 C-OWA(OWC-OWA)算子、以及组合的 C-OWA(CC-OWA)算子,研究了它们的一些性质.基于这些算子,分别在单人决策和群决策这两种情形下,提出了属性权重确知、且属性值以区间数形式给出的不确定多属性决策方法.最后,进行了实例分析.

关键词: 不确定多属性决策; 拓展的 C-OWA 算子; 区间数
中图分类号: C934　　**文献标识码**: A

Extended C-OWA Operators and Their Use in Uncertain Multi-Attribute Decision Making

XU Ze-shui[1,2]
(1. College of Economics and Management, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Institute of Sciences, PLA University of Sciences and Technology, Nanjing 211101, China)

Abstract: In this paper, we propose some extended continuous interval argument OWA (C-OWA) operator, such as weighted C-OWA (WC-OWA) operator, ordered weighted C-OWA (OWC-OWA) operator, and combined C-OWA (CC-OWA) operator, and study some of their characteristics. Based on these operators, we develop two approaches for solving uncertain multi-attribute multi-person decision-making problems and uncertain multi-attribute single-person decision-making problems, respectively, in which the attribute weights are completely known and the attribute values are interval numbers. Finally, an illustrative example is given.

Key words: Uncertain multi-attribute decision making; extended C-OWA operator; interval number

1　引言

数据信息集成算子[1]在决策、管理、人工智能、专家系统、数据库系统等诸多领域有着广泛的应用[2~5].加权算术平均(weighted arithmetic averaging(WAA))算子[6]和有序加权平均(ordered weighted averaging(OWA))算子[7]是两种较为常见的数据信息集成算子,其中,WAA 算子的特点是:先对一组数据中的每个数据进行加权(即根据每个数据的重要性赋予适当的权重),然后对加权后的数据进行集成,而 OWA 算子特点是:先对一组数据按从大到小的顺序重新进行排序,然后通过加权集成,其权重只与相应的位置有关.文[1]介绍了一种混合的加权集成(hybrid weighted averaging(HWA))算子,运用该算子集成数据信息,不仅能考虑每个数据的自身重要性程度,而且还能体现该数据所在位置的重要性程度.然而,上述这些算子只能对离散型数据进行处理.最近,Yager 教授提出了一种连续区间数据 OWA(continuous interval argument OWA(本文称之为 C-OWA))算子[8].该算子根据区间数的特点,对区间数中的每一个数据进行集成.本文把 C-OWA 算子进行拓展,提出了加权的 C-OWA(WC-OWA)算子、有序加权的 C-OWA(OWC-OWA)算子和组合的 C-OWA(CC-OWA)算子.基于这些算子,分别在单人决策和群决策这两种情形下,提出了属性权重确知、且属性值以区间数形式给出的不确定多属性决策方法,并且进行了实例分析.

收稿日期:2004-11-19
资助项目:中国博士后科学基金项目(2003034366)
作者简介:徐泽水(1968 -),男,安徽南陵人,博士,教授,从事决策分析及信息融合等研究.

2 C-OWA 算子

美国著名学者 Yager 教授于 1988 年提出了一种集成离散数据信息的有序加权平均(OWA)算子:

定义 2.1[7] 设 $f: R^n \to R$,若

$$f_\omega(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j, \tag{1}$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 是与函数 f 相关联的加权向量,$\omega_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1$, 且 b_j 是一组数据$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$中第 j 个最大的元素, R 为实数集,则称函数 f 是有序加权平均(OWA)算子.

OWA 算子的特点是:对数据$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$按从大到小的顺序重新排序后加权集成,且元素 a_i 与 ω_i 没有任何联系, ω_i 只与集成过程中的第 i 个位置有关. 然而,OWA 算子只适合对离散型数据进行集成,却不能对连续型数据信息进行处理. 最近,基于 OWA 算子, Yager 教授对连续性数据信息的集成算子进行了研究,提出了一种新的连续区间数据集成算子:

定义 2.2[8] 设$[a, b]$为区间数,且

$$f_\rho([a, b]) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\rho(y)}{\mathrm{d}y}(b - y(b - a))\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中, $\rho: [0,1] \to [0,1]$是具有下列性质的函数:

1) $\rho(0) = 0$;

2) $\rho(1) = 1$;

3) 若 $x > y$,则 $\rho(x) \geq \rho(y)$.

则称 f 为连续区间数据 OWA 算子,简称为 C-OWA 算子. ρ 称为基本的单位区间单调(basic unit-interval monotonic (BUM))函数.

C-OWA 算子具有下列性质[8]:

定理 2.1(有界性) 对任意 BUM 函数 ρ,有

$$a \leq f_\rho([a, b]) \leq b.$$

例如,若取 $\rho(y) = y^r (r \geq 0)$,则有

$$f_\rho([a, b]) = \frac{b + ra}{r + 1}. \tag{3}$$

3 拓展的 C-OWA 算子

虽然 C-OWA 算子能对连续区间数据进行集成,但是,该算子只适合集成某一区间中的所有数据. 下面对 C-OWA 算子进行拓展,以便处理两个或两个以上区间的集成问题.

定义 3.1 设$[a_i, b_i]$$(i = 1, 2, \cdots, n)$为一组区间数,且

$$g_w([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_\rho([a_i, b_i]), \tag{4}$$

其中, $f_\rho([a_i, b_i])$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$由(2)式确定, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 是区间数据组$[a_i, b_i]$$(i = 1, 2, \cdots, n)$的权重向量, $w_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. 则称 g 为加权的 C-OWA 算子,简称为 WC-OWA 算子.

该算子的特点是:先利用 C-OWA 算子对每一个区间$[a_i, b_i]$中的所有数据进行集成,再对集成后的所有数据 $f_\rho([a_i, b_i])$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$进行加权集成.

易证 WC-OWA 算子具有下列性质:

定理 3.1(有界性) 对任意一组区间数$[a_i, b_i]$$(i = 1, 2, \cdots, n)$,有

$$\min_i\{a_i\} \leq g_w([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_\rho([a_i, b_i]) \leq \max_i\{b_i\}. \tag{5}$$

定理 3.2(齐次性) 若对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$,有$[a_i, b_i] = [a, b]$,即 $a_i = a$, $b_i = b$,则

$$g_w([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = f_\rho([a, b]). \tag{6}$$

例 3.1　假设 $[a_1, b_1] = [2, 4]$, $[a_2, b_2] = [3, 5]$, $[a_3, b_3] = [5, 6]$, $[a_4, b_4] = [1, 4]$,该区间数据组的权重向量为 $w = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)^T$,且令 BUM 函数为 $\rho(y) = y^2$,则根据(2)式(或(3)式),可得

$$f_\rho([a_1, b_1]) = \frac{8}{3}, f_\rho([a_2, b_2]) = \frac{11}{3}, f_\rho([a_3, b_3]) = \frac{16}{3}, f_\rho([a_4, b_4]) = 2.$$

再由(4)式,得

$$g_w([a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], [a_4, b_4]) = 0.3 \times \frac{8}{3} + 0.2 \times \frac{11}{3} + 0.4 \times \frac{16}{3} + 0.1 \times 2 = \frac{58}{15}.$$

定义 3.2　设 $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组区间数,且

$$\phi_\omega([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]), \tag{7}$$

其中 $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ 是 $(1, 2, \cdots n)$ 的一个置换,使得

$$f_\rho([a_{\sigma(i-1)}, b_{\sigma(i-1)}]) \geq f_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]), i = 2, \cdots, n, \tag{8}$$

且 $f_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}])$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 由(2)式确定. $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 是与函数 ϕ 相关联的加权向量,且 $\omega_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$,它可由下式确定[7,9]:

$$\omega_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right), i = 1, 2, \cdots, n, \tag{9}$$

其中,模糊语义量化函数 Q 由下式给出:

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & r < \alpha \\ \dfrac{r - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq r \leq \beta \\ 1, & r > \beta \end{cases} \tag{10}$$

且 $\alpha, \beta, r \in [0, 1]$. 对应于模糊语义量化准则:"大多数","至少半数","尽可能多"的函数 Q 中参数对分别为 $(\alpha, \beta) = (0.3, 0.8)$, $(\alpha, \beta) = (0, 0.5)$, $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.0)$. 则称 ϕ 为有序加权的 C-OWA 算子,简称为 OWC-OWA 算子.

该算子的特点是:先利用 C-OWA 算子对每一个区间 $[a_i, b_i]$ 中的所有数据进行集成,然后对集成后的所有数据 $f_\rho([a_i, b_i])$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 按从大到小的顺序重新排序后加权集成,且元素 $f_\rho([a_i, b_i])$ 与 ω_i 没有任何联系, ω_i 只与集成过程中的第 i 个位置有关.

易证 OWC-OWA 算子具有下列性质:

定理 3.3(有界性)　对任意一组区间数 $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,有

$$\min_i\{a_i\} \leq \phi_\omega([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) \leq \max_i\{b_i\}. \tag{11}$$

并且有

1) 若 $\omega_i = 1$, $\omega_j = 0$,且 $j \neq i$,则

$$\phi_\omega([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = f_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]), \tag{12}$$

其中 $f_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}])$ 是数据组 $f_\rho([a_i, b_i])$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中第 i 个最大的元素. 特别地,若 $\omega = (1, 0, 0, \cdots, 0)^T$,则

$$\phi_\omega([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \max_i\{f_\rho([a_i, b_i])\}, \tag{13}$$

若 $\omega = (0, 0, \cdots, 1)^T$,则

$$\phi_\omega([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \min_i\{f_\rho([a_i, b_i])\}, \tag{14}$$

2) 若 $\omega = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^T$,则

$$\phi_\omega([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_\rho([a_i, b_i]) \tag{15}$$

定理 3.4(齐次性)　若对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$,有 $[a_i, b_i] = [a, b]$,则

$$\Phi_\omega([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]) = f_\rho([a,b]) \tag{16}$$

定理3.5(置换不变性)

$$\Phi_\omega([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]) = \Phi_\omega([a_1',b_1'],[a_2',b_2'],\cdots,[a_n',b_n']) \tag{17}$$

其中$([a_1',b_1'],[a_2',b_2'],\cdots,[a_n',b_n'])$是区间数据组$([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n])$的任一置换.

例3.2 假设$[a_1,b_1]=[10,15]$,$[a_2,b_2]=[4,8]$,$[a_3,b_3]=[16,19]$,$[a_4,b_4]=[11,13]$,且设BUM函数为$\rho(y)=y^{\frac{1}{2}}$,则根据(2)式(或(3)式),可得

$$f_\rho([a_1,b_1]) = \frac{40}{3}, f_\rho([a_2,b_2]) = \frac{20}{3}, f_\rho([a_3,b_3]) = 18, f_\rho([a_4,b_4]) = \frac{37}{3}.$$

因此,

$$f_\rho([a_{\sigma(1)},b_{\sigma(1)}]) = 18, f_\rho([a_{\sigma(2)},b_{\sigma(2)}]) = \frac{40}{3}, f_\rho([a_{\sigma(3)},b_{\sigma(3)}]) = \frac{37}{3}, f_\rho([a_{\sigma(4)},b_{\sigma(4)}]) = \frac{20}{3}.$$

选择模糊语义量化"至少半数"准则,则由(9)和(10)两式可得$\omega=(0.5,0.5,0,0)^T$.故由(7)式,得

$$\Phi_\omega([a_1,b_1],[a_2,b_2],[a_3,b_3],[a_4,b_4]) = 0.5\times18+0.5\times\frac{40}{3}+0\times\frac{37}{3}+0\times\frac{20}{3} = \frac{47}{3}.$$

定义3.3 设$[a_i,b_i](i=1,2,\cdots,n)$为一组区间数,且

$$h_{\omega,w}([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i F_\rho([a_{\sigma(i)},b_{\sigma(i)}]), \tag{18}$$

其中$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$是与函数$h$相关联的加权向量,$\omega_i\in[0,1]$,$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$,且$F_\rho([a_{\sigma(i)},b_{\sigma(i)}])$是一组加权数据$(nw_1f_\rho([a_1,b_1]),nw_2f_\rho([a_2,b_2]),\cdots,nw_nf_\rho([a_n,b_n]))$中第$i$个最大的元素,$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$是$(1,2,\cdots,n)$的一个置换.$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$是区间数据组$[a_i,b_i](i=1,2,\cdots,n)$的权重向量,$w_i\in[0,1]$,$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$,$n$是平衡因子,$f_\rho([a_i,b_i])(i=1,2,\cdots,n)$由(2)式确定,则称$h$为组合的C-OWA算子,简称为CC-OWA算子.

特别地,若$w=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^T$,则CC-OWA算子就退化成OWC-OWA算子;若$\omega=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^T$,则CC-OWA算子就退化成WC-OWA算子.因此,OWC-OWA算子和WC-OWA算子均为CC-OWA算子的特例.CC-OWA算子的特点是:它不仅考虑了每个连续区间数据自身的重要性程度,而且还体现了该数据所在位置的重要性程度.

例3.3 假设$[a_1,b_1]=[0.5,0.6]$,$[a_2,b_2]=[0.2,0.3]$,$[a_3,b_3]=[0.4,0.7]$,$[a_4,b_4]=[0.5,0.9]$,该区间数据组的权重向量为$w=(0.2,0.3,0.1,0.4)^T$,且令BUM函数为$\rho(y)=y^{\frac{1}{3}}$,则根据(2)式(或(3)式),可得

$$f_\rho([a_1,b_1]) = \frac{23}{40}, f_\rho([a_2,b_2]) = \frac{11}{40}, f_\rho([a_3,b_3]) = \frac{5}{8}, f_\rho([a_4,b_4]) = \frac{4}{5}.$$

因此,

$$F_\rho([a_{\sigma(1)},b_{\sigma(1)}]) = \frac{32}{25}, F_\rho([a_{\sigma(2)},b_{\sigma(2)}]) = \frac{23}{50}, F_\rho([a_{\sigma(3)},b_{\sigma(3)}]) = \frac{33}{100}, F_\rho([a_{\sigma(4)},b_{\sigma(4)}]) = \frac{1}{4}$$

选择模糊语义量化"尽可能多"准则,则由(9)和(10)两式可得$\omega=(0,0,0.5,0.5)^T$.故由(18)式,得

$$h_{\omega,w}([a_1,b_1],[a_2,b_2],[a_3,b_3],[a_4,b_4]) = 0\times\frac{32}{25}+0\times\frac{23}{50}+0.5\times\frac{33}{100}+0.5\times\frac{1}{4} = \frac{29}{100}.$$

上述三种拓展的C-OWA算子在人工智能、模式设别、数据挖掘、模糊逻辑、市场研究、不确定决策等诸多领域中均有着良好的应用前景.在下一节中,我们仅对它们在不确定多属性决策领域中的应用进行研究.

4 决策方法

随着社会、经济的发展,人们所考虑问题的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性在不断增强,在实

际决策过程中,决策信息往往以区间数形式来表达[5]. 基于 WC-OWA 算子、OWC-OWA 算子以及 CC-OWA 算子,下面对属性权重确知、且属性值以区间数形式给出的不确定多属性决策方法进行探讨:

4.1　单人决策的情形

在单人决策的情况下,我们给出一种基于 WC-OWA 算子的不确定多属性决策方法,具体步骤如下:

步骤 1　对于某一多属性决策问题,设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为方案集,$\bar{U}=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$为属性集,属性权重向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,其中,$w_i\in[0,1]$,$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$. 决策者对方案 x_i,按属性 u_j 进行测度,得到 x_i 关于 u_j 的属性值 $\tilde{a}_{ij}$(这里,$\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L,a_{ij}^U]$). 从而构成决策矩阵 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$. 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响,可利用文献[5]中介绍的规范化公式对决策矩阵 $\tilde{A}$ 进行规范化处理(注:若量纲相同,则无需规范化处理). 假设规范化后的决策矩阵为 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$,其中,$\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$.

步骤 2　利用 WC-OWA 算子对各方案 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$的属性值进行集成,求得其综合属性值 $z_i(w)$ $(i=1,2,\cdots,n)$:

$$z_i(w)=g(\tilde{r}_{i1},\tilde{r}_{i2},\cdots,\tilde{r}_{im})=\sum_{j=1}^{m}w_jf_\rho(\tilde{r}_{ij}).\tag{19}$$

其中,$f_\rho(\tilde{r}_{ij})$ $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$由 C-OWA 算子确定:

$$f_\rho(\tilde{r}_{ij})=f_\rho([r_{ij}^L,r_{ij}^U])=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\rho(y)}{\mathrm{d}y}(r_{ij}^U-y(r_{ij}^U-r_{ij}^L))\mathrm{d}y.\tag{20}$$

BUM 函数 ρ 可事先根据决策者的风险态度来确定[8].

步骤 3　利用 $z_i(w)$ $(i=1,2,\cdots,n)$可对所有方案 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$进行排序和择优.

步骤 4　结束.

4.2　群体决策的情形

在现代大型决策或重要决策过程中,为了体现决策的民主性和合理性,往往需要多个决策者的共同参与(即群决策). 下面给出一种基于 WC-OWA 算子和 OWC-OWA 算子的不确定多属性群决策方法,具体步骤如下:

步骤 1　设 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_t\}$为决策者集,$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)^{\mathrm{T}}$为决策者的权重向量,其中,$\lambda_k\in[0,1]$,$k=1,2,\cdots,t$,$\sum_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 设决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in\bar{U}$ 下的属性值 $\tilde{a}_{ij}^{(k)}$(这里,$\tilde{a}_{ij}^{(k)}=[(a_{ij}^L)^{(k)},(a_{ij}^U)^{(k)}]$). 从而构成决策矩阵 $\tilde{A}_k=(\tilde{a}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$. 假设规范化后的决策矩阵为 $\tilde{R}_k=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$,其中,$\tilde{r}_{ij}^{(k)}=[(r_{ij}^L)^{(k)},(r_{ij}^U)^{(k)}]$,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$;$k=1,2,\cdots,t$.

步骤 2　利用 CC-OWA 算子对 t 位决策者给出的方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值 $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,t)$进行集成,得到方案 x_i 在属性 u_j 下的群体属性值 r_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$:

$$r_{ij}=h_{\lambda,\omega}(\tilde{r}_{ij}^{(1)},\tilde{r}_{ij}^{(2)},\cdots,\tilde{r}_{ij}^{(t)})=\sum_{k=1}^{t}\omega_kF_\rho(\tilde{r}_{ij}^{(\sigma(k))}),\tag{21}$$

其中,$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_t)^{\mathrm{T}}$是与函数 h 相关联的加权向量,$\omega_k\in[0,1]$,$\sum_{k=1}^{t}\omega_k=1$,且 $F_\rho(\tilde{r}_{ij}^{(\sigma(k))})$是一组加权数据$(t\lambda_1f_\rho(\tilde{r}_{ij}^{(1)}),t\lambda_2f_\rho(\tilde{r}_{ij}^{(2)}),\cdots,t\lambda_tf_\rho(\tilde{r}_{ij}^{(t)}))$中第 k 个最大的元素,$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(t))$是$(1,2,\cdots,t)$的一个置换,$t$ 是平衡因子,$f_\rho(\tilde{r}_{ij}^{(k)})$ $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,t)$由 C-OWA 算子确定:

$$f_\rho(\tilde{r}_{ij}^{(k)})=f_\rho([(r_{ij}^L)^{(k)},(r_{ij}^U)^{(k)}])=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\rho(y)}{\mathrm{d}y}((r_{ij}^U)^{(k)}-y((r_{ij}^U)^{(k)}-(r_{ij}^L)^{(k)}))\mathrm{d}y,\tag{22}$$

从而得到群决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 3　对群决策矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times m}$中第 i 行的属性值进行加权集成,得到方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(w)$ $(i=1,2,\cdots,n)$:

$$z_i(w) = \sum_{j=1}^{m} w_j r_{ij},\tag{23}$$

其中, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 为属性权重向量, $w_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

步骤 4 利用 $z_i(w)\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 对所有方案 $x_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 进行排序并择优.

步骤 5 结束.

5 实例分析

考虑某个风险投资公司进行高科技项目投资问题,有 4 个备选企业(方案) $x_i\ (i = 1,2,3,4)$ 可供选择. 从企业能力角度对企业进行评价,首先制定了 7 项评估指标(属性):1) 销售能力(u_1); 2) 管理能力(u_2); 3) 生产能力(u_3); 4) 技术能力(u_4); 5) 资金能力; 6) 风险承担能力(u_5); 7) 企业战略一致性. 属性权重向量为 $w = (0.2, 0.1, 0.15, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)^{\mathrm{T}}$. 现有 3 位决策者 $d_k\ (k = 1,2,3)$,权重向量为 $\lambda = (0.4, 0.3, 0.3)^{\mathrm{T}}$,依据上述各项指标对每个企业 $x_i\ (i = 1,2,3,4)$ 进行打分(范围从 0 分到 100 分),分别得到 3 个决策矩阵,如表 1～表 3 所示. 试确定最佳企业.

表 1 决策者 d_1 给出的决策矩阵 $R_1 = (\tilde{r}_{ij}^{(1)})_{4\times7}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	[84,87]	[90,92]	[95,98]	[60,65]	[70,73]	[80,84]	[90,92]
x_2	[93,95]	[80,83]	[60,62]	[70,74]	[85,90]	[80,83]	[82,86]
x_3	[65,68]	[75,80]	[95,98]	[62,65]	[88,92]	[70,73]	[90,92]
x_4	[75,77]	[78,80]	[55,60]	[95,98]	[85,89]	[82,84]	[84,87]

表 2 决策者 d_2 给出的决策矩阵 $R_2 = (\tilde{r}_{ij}^{(2)})_{4\times7}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	[60,65]	[75,80]	[90,95]	[65,70]	[70,74]	[96,99]	[73,76]
x_2	[85,88]	[60,65]	[66,69]	[65,68]	[95,99]	[75,77]	[88,90]
x_3	[60,64]	[65,67]	[75,80]	[80,86]	[90,95]	[95,97]	[89,93]
x_4	[65,70]	[60,65]	[65,68]	[96,99]	[70,77]	[85,89]	[75,80]

表 3 决策者 d_3 给出的决策矩阵 $R_3 = (\tilde{r}_{ij}^{(3)})_{4\times7}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	[70,73]	[80,84]	[85,90]	[65,70]	[80,90]	[95,96]	[70,74]
x_2	[85,88]	[70,75]	[72,76]	[80,83]	[95,96]	[70,75]	[86,90]
x_3	[90,95]	[85,90]	[80,84]	[84,87]	[95,98]	[85,90]	[80,85]
x_4	[65,70]	[70,80]	[60,67]	[64,70]	[90,95]	[85,88]	[75,80]

考虑到所有指标的量纲一致,为了方便起见,不把决策矩阵规范化. 下面利用本文提出的群决策方法进行求解:

步骤 1 假设 BUM 函数为 $\rho(y) = y^3$,则利用(22)式求得

$f_\rho(\tilde{r}_{11}^{(1)}) = 84.75, f_\rho(\tilde{r}_{12}^{(1)}) = 90.50, f_\rho(\tilde{r}_{13}^{(1)}) = 95.75, f_\rho(\tilde{r}_{14}^{(1)}) = 61.25, f_\rho(\tilde{r}_{15}^{(1)}) = 70.75, f_\rho(\tilde{r}_{16}^{(1)}) = 81.00, f_\rho(\tilde{r}_{17}^{(1)}) = 90.50$

$f_\rho(\tilde{r}_{21}^{(1)}) = 93.50, f_\rho(\tilde{r}_{22}^{(1)}) = 80.75, f_\rho(\tilde{r}_{23}^{(1)}) = 60.50, f_\rho(\tilde{r}_{24}^{(1)}) = 71.00, f_\rho(\tilde{r}_{25}^{(1)}) = 86.25, f_\rho(\tilde{r}_{26}^{(1)}) = 80.75, f_\rho(\tilde{r}_{27}^{(1)}) = 83.00$

$f_\rho(\tilde{r}_{31}^{(1)}) = 65.75, f_\rho(\tilde{r}_{32}^{(1)}) = 76.25, f_\rho(\tilde{r}_{33}^{(1)}) = 95.75, f_\rho(\tilde{r}_{34}^{(1)}) = 62.75, f_\rho(\tilde{r}_{35}^{(1)}) = 89.00, f_\rho(\tilde{r}_{36}^{(1)}) = 70.75, f_\rho(\tilde{r}_{37}^{(1)}) = 90.50$

$f_\rho(\tilde{r}_{41}^{(1)}) = 75.50, f_\rho(\tilde{r}_{42}^{(1)}) = 78.50, f_\rho(\tilde{r}_{43}^{(1)}) = 56.25, f_\rho(\tilde{r}_{44}^{(1)}) = 95.75, f_\rho(\tilde{r}_{45}^{(1)}) = 86.00, f_\rho(\tilde{r}_{46}^{(1)}) = 82.50, f_\rho(\tilde{r}_{47}^{(1)}) = 84.75$

$f_\rho(\tilde{r}_{11}^{(2)}) = 61.25, f_\rho(\tilde{r}_{12}^{(2)}) = 76.25, f_\rho(\tilde{r}_{13}^{(2)}) = 91.25, f_\rho(\tilde{r}_{14}^{(2)}) = 66.25, f_\rho(\tilde{r}_{15}^{(2)}) = 71.00, f_\rho(\tilde{r}_{16}^{(2)}) = 96.75, f_\rho(\tilde{r}_{17}^{(2)}) = 73.75$

$f_\rho(\tilde{r}_{21}^{(2)}) = 83.75, f_\rho(\tilde{r}_{22}^{(2)}) = 61.25, f_\rho(\tilde{r}_{23}^{(2)}) = 66.75, f_\rho(\tilde{r}_{24}^{(2)}) = 65.75, f_\rho(\tilde{r}_{25}^{(2)}) = 96.00, f_\rho(\tilde{r}_{26}^{(2)}) = 75.50, f_\rho(\tilde{r}_{27}^{(2)}) = 88.50$

$f_\rho(\tilde{r}_{31}^{(2)})=61.00, f_\rho(\tilde{r}_{32}^{(2)})=65.50, f_\rho(\tilde{r}_{33}^{(2)})=76.25, f_\rho(\tilde{r}_{34}^{(2)})=81.50, f_\rho(\tilde{r}_{35}^{(2)})=91.25, f_\rho(\tilde{r}_{36}^{(2)})=95.50, f_\rho(\tilde{r}_{37}^{(2)})=90.00$

$f_\rho(\tilde{r}_{41}^{(2)})=66.25, f_\rho(\tilde{r}_{42}^{(2)})=61.25, f_\rho(\tilde{r}_{43}^{(2)})=65.75, f_\rho(\tilde{r}_{44}^{(2)})=96.75, f_\rho(\tilde{r}_{45}^{(2)})=71.75, f_\rho(\tilde{r}_{46}^{(2)})=86.00, f_\rho(\tilde{r}_{47}^{(2)})=76.25$

$f_\rho(\tilde{r}_{11}^{(3)})=70.75, f_\rho(\tilde{r}_{12}^{(3)})=81.00, f_\rho(\tilde{r}_{13}^{(3)})=86.25, f_\rho(\tilde{r}_{14}^{(3)})=66.25, f_\rho(\tilde{r}_{15}^{(3)})=82.50, f_\rho(\tilde{r}_{16}^{(3)})=95.25, f_\rho(\tilde{r}_{17}^{(3)})=71.00$

$f_\rho(\tilde{r}_{21}^{(3)})=85.75, f_\rho(\tilde{r}_{22}^{(3)})=71.25, f_\rho(\tilde{r}_{23}^{(3)})=73.00, f_\rho(\tilde{r}_{24}^{(3)})=80.75, f_\rho(\tilde{r}_{25}^{(3)})=95.25, f_\rho(\tilde{r}_{26}^{(3)})=71.25, f_\rho(\tilde{r}_{27}^{(3)})=87.00$

$f_\rho(\tilde{r}_{31}^{(3)})=91.25, f_\rho(\tilde{r}_{32}^{(3)})=86.25, f_\rho(\tilde{r}_{33}^{(3)})=81.00, f_\rho(\tilde{r}_{34}^{(3)})=84.75, f_\rho(\tilde{r}_{35}^{(3)})=95.75, f_\rho(\tilde{r}_{36}^{(3)})=82.50, f_\rho(\tilde{r}_{37}^{(3)})=81.25$

$f_\rho(\tilde{r}_{41}^{(3)})=66.25, f_\rho(\tilde{r}_{42}^{(3)})=72.50, f_\rho(\tilde{r}_{43}^{(3)})=61.75, f_\rho(\tilde{r}_{44}^{(3)})=65.50, f_\rho(\tilde{r}_{45}^{(3)})=91.25, f_\rho(\tilde{r}_{46}^{(3)})=85.75, f_\rho(\tilde{r}_{47}^{(3)})=76.25$

选择模糊语义量化"大多数"准则,则由(9)和(10)两式可得 $\omega=(1/15,10/15,4/15)^T$.再利用(21)式对 3 位决策者给出的方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值 $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ $(i=1,2,3;j=1,2,\cdots,7;k=1,2,3)$ 进行集成,得到方案 x_i 在属性 u_j 下的所有群体属性值 r_{ij} $(i=1,2,3;j=1,2,\cdots,7)$,从而得到群决策矩阵 $R=(r_{ij})_{3\times7}$:

$$R=\begin{bmatrix} 63.930 & 74.140 & 83.110 & 60.550 & 72.200 & 87.390 & 68.530 \\ 79.510 & 63.910 & 64.660 & 69.910 & 87.360 & 68.860 & 80.620 \\ 72.715 & 73.570 & 74.560 & 74.845 & 86.470 & 82.130 & 80.740 \\ 61.690 & 64.480 & 58.770 & 81.430 & 78.850 & 78.780 & 70.830 \end{bmatrix}$$

步骤 2　对群决策矩阵 R 中第 i 行的属性值进行加权集成,得到方案 x_i $(i=1,2,3,4)$ 的群体综合属性值:

$$z_1(w)=71.9580, z_2(w)=73.1010, z_3(w)=77.0935, z_4(w)=70.6725.$$

步骤 3　利用 $z_i(w)$ $(i=1,2,3,4)$ 对方案 x_i $(i=1,2,3,4)$ 进行排序:

$$x_3\succ x_2\succ x_1\succ x_4$$

因此,最佳方案(企业)为 x_3.

6　结束语

本文研究了数据信息集成问题.提出了一些拓展的 C-OWA 算子,如:加权的 C-OWA(WC-OWA)算子、有序加权的 C-OWA(OWC-OWA)算子和组合的 C-OWA(CC-OWA)算子.并把它们应用于属性权重确知、且属性值以区间数形式给出的不确定多属性决策.这些算子在其它诸多领域,如:人工智能、模式设别、数据挖掘、模糊逻辑、市场研究等也有着良好的应用前景.

参考文献:

[1] Xu Z S, Da Q L. An overview of operators for aggregating information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 953-969.

[2] Yager R R, Kacprzyk J. The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications [M]. Norwell, MA: Kluwer, 1997.

[3] Bouchon-Meunier B, Yager R R, Zadeh L A. Information, Uncertainty, Fusion [M]. Norwell, MA: Kluwer, 2000.

[4] Torra V. Information Fusion in Data Mining [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[5] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用[M].北京:清华大学出版社,2004.
Xu Zeshui. Uncertain Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[6] Harsanyi J C. Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility [J]. Journal of Political Economy, 1955, 63: 309-321.

[7] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18: 183-190.

[8] Yager R R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, 2004, 34: 1952-1963.

[9] Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. Multiperson decision making based on multiplicative preference relations [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129: 372-385.