文章编号: 1000-6788(2009)04-0135-09

延迟多重休假离散时间的 $Geom^x/G/1$ 可修排队系统的可靠性指标

唐应辉 [1], 李才良 [2], 黄蜀娟 [3], 云 曦 [3]

(1. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066; 2. 成都电子机械高等专科学校 信息与计算科学系, 成都 610032; 3. 电子科技大学 应用数学学院, 成都 610054)

摘 要 首次考虑延迟多重休假离散时间成批到达的 $Geom^x/G/1$ 可修排队系统的可靠性指标, 在假定到达间隔时间和服务台的寿命服从几何分布, 而服务时间、延迟休假时间、休假时间和服务台失效后的修理时间均服从一般离散分布下, 使用一种新的分解方法讨论了服务台如下的可靠性问题: 1) 在时刻 n 服务台处于 "广义忙期" 的概率; 2) 服务台的瞬态和稳态不可用度; 3) 服务台在 $(0,n]$ 时间内的平均失效次数; 4) 服务台在 "广义忙期" 内的平均失效次数. 得到了一系列重要的可靠性结果.

关键词 离散时间排队; $Geom^x/G/1$; 延迟多重休假; 不可用度; 失效次数

中图分类号 O226; O213.2 **文献标志码** A

Some reliability indices in discrete time $Geom^x/G/1$ repairable queueing system with delayed multiple vacations

TANG Ying-hui[1], LI Cai-liang[2], HUANG Shu-juan[3], YUN Xi[3]

(1. School of Mathematics & Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China; 2. Deparment of Information and Computer Science, Chengdu Electron-mechanical College, Chengdu 610032, China; 3. School of Applied Mathematics, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract This paper firstly considers some reliability problems in the discrete time $Geom^x/G/1$ repairable queueing system with delayed multiple vacations. It's assumed that both the inter-arrival times and the life of the service station are independent random variables with geometric distribution, while the service time、the delayed vacation time、the vacation time and the repair time have general discrete distribution. By using a new kind of analytic approach–the decomposition method the following reliability indices of the service station are discussed: 1) The probability that the service station is during the "generalized busy period"; 2)The point unavailability at time$n$and the steady unavailability; 3) The expected failure number during $(0,n]$; 4) The expected failure number during the "generalized busy period". A series of important reliability results are obtained.

Keywords discrete time queue; $Geom^x/G/1$; delayed multiple vacations; unavailability; failure number

1 引言

由于离散时间排队系统在计算机通讯网络中有直接重要的应用, 因此自从 Meisling[1] 在 1958 年首先提

收稿日期: 2007-10-29
资助项目: 国家自然科学基金 (70871084); 教育部高校博士点专项研究基金 (200806360001); 四川省教育厅自然科学基金 ([2006]A067)
作者简介: 唐应辉 (1963–), 博士, 教授, 博士生导师, Email: tangyh@uestc.edu.cn, 主要研究方向为系统可靠性、排队论和决策理论及应用等.

出并研究这类排队系统以来, 平行于连续时间排队系统的经典理论, 离散时间排队系统的理论已经得到了较好的发展 [2–11]. 由于服务台在运行过程中也可能发生故障 [12], 因此考虑服务台可能发生故障且可修的离散时间排队系统就有重要的理论意义和应用价值, 这不仅要研究系统的排队指标, 同时还要研究因服务台故障而产生的可靠性问题. 文 [7] 应用嵌入马尔柯夫链方法和离散随机变量更新报酬过程理论研究了 $Geom/G/1$ 可修排队系统在稳态情况下的排队指标和有关的可靠性指标, 文 [8] 运用矩阵几何解方法讨论了离散时间马尔可夫到达的 $MAP/PH(PH/PH)/1$ 可修排队系统, 而文 [3] 把到达推广到成批到达和服务员采取多级适应性休假机制的情形, 仍然应用嵌入马尔可夫链方法研究了系统在稳态情况下的排队指标, 得到的仅是顾客服务完毕离开系统时队长的概率母函数, 而对可靠性指标也只研究了一个顾客服务期内的故障次数和系统的稳态可用度. 本文在文 [3] 的基础上, 将模型进行推广, 首次考虑了休假延迟的情形, 即当服务员发现系统中没有顾客时, 并不立即开始休假, 而是在经过一段随机准备时间后才开始休假. 值得注意的是, 本文采用了一种不同于文献 [3, 7–8] 的分析技术, 通过引入离散时间服务台的 "广义忙期", 从任意初始状态出发, 研究了服务台的瞬态和稳态不可用度、$(0,n]$ 时间内的平均失效次数等一系列可靠性指标, 有重要的理论意义和应用价值. 本文研究的模型简述如下:

1) 顾客批与批之间的到达间隔时间序列 τ_i, $i \ge 1$ 独立、同几何分布 $P\{\tau_i = j\} = p(1-p)^{j-1}$, $j = 1, 2, \cdots$, $0 < p < 1$. 每批顾客的到达只能发生在 n^- 时刻, 服务的开始和结束都发生在 n^+ 时刻. 每批到达的顾客数为 D_i, $i = 1, 2, \cdots$, 独立、同分布律 $P\{D_i = k\} = e_k$, $k = 1, 2, \cdots$, 并且存在有限均值 e;

2) 服务是单个进行的, 在同批到达的顾客中, 服务顺序是任意的, 在不同批到达的顾客中, 服务顺序按先到先服务的原则. 顾客所需的服务时间序列 $\chi_n, n \ge 1$ 独立、同一般离散分布 $g_j = P\{\chi = j\}$, $j = 1, 2, \cdots$, 且平均服务时间为 $\alpha (1 \le \alpha < \infty)$;

3) 服务员采取如下的延迟多重休假规则: 当每次系统变空时, 服务员不是马上去休假, 而是进行一段随机时间的 "休假准备", 称这段 "休假准备" 时间为 "延迟休假时间". 如果有顾客在 "休假准备" 时间内到达, 那服务员必须停止 "休假准备" 而立即为顾客服务, 直到系统再次变空而重新做 "休假准备"; 如果没有顾客在 "休假准备" 时间内到达, 服务员就马上进行一次休假. 如果服务员从休假回来发现系统中没有顾客, 则马上又去做 "休假准备"; 如果服务员从休假回来发现系统中有顾客, 则马上为顾客进行服务, 直到系统再次变空, 然后又开始做 "休假准备". 假定各 "休假准备" 时间 Y_i 独立、同一般离散分布; 每次休假时间 V_i 独立、同一般离散分布;

4) 服务台的寿命为 X, 服从几何分布 $x_j = P\{X = j\} = R(1-R)^{j-1}$, $j = 1, 2, \cdots$, 且只在本文中定义的服务台 "广义忙期" 内发生失效. 失效后立即进行修理, 其修理时间 H 服从一般离散分布 $h_k = P\{H = k\}, k = 0, 1, 2, \cdots$, 平均修理时间为 $\beta, 0 \le \beta < \infty$(文 [3] 假定修理时间 H 的取值从 1 开始). 服务台修复如新, 且假设 $n = 0$ 时服务台是新的. 服务台失效后, 正在接受服务的顾客需要等待其修复. 当服务台修复后, 立即开始工作, 顾客再继续接受服务, 且已服务过的时间仍然有效;

5) 到达、服务、服务台的寿命、服务台的修理时间、服务台的延迟休假时间、服务台的休假时间、每批到达的顾客数是彼此相互独立的, 且各自为一个独立过程;

6) 假定在 $n = 0$ 时, 如果系统没有顾客, 则服务员不进行休假 (但平稳结果与系统的初始状态无关).

2 服务台的不可用度

为了讨论服务台的瞬态和稳态不可用度, 我们先提出顾客的"广义服务时间"、服务台的 "广义忙期" 和 "系统闲期" 的概念, 并讨论在任意时刻 n 服务台处于 "广义忙期" 的概率.

顾客的"广义服务时间": 是指从该顾客开始接受服务的时刻起直到服务结束为止的这段时间, 其中包括了在对该顾客的服务期内由于服务台可能发生失效而进行修复的时间. 如果令 $\tilde{\chi}$ 表示顾客的 "广义服务时间", 且令 $\tilde{g}_j^{[k]} = P\{\tilde{\chi} = j$; 且在 $\tilde{\chi}$ 内服务台发生 k 失效$\}$, $k \ge 0$, 则类似文 [12–14] 在连续时间可修排队系统

中的 "广义服务时间" 分布的讨论, 有

$$\tilde{g}_j^{[k]}=\sum_{l=1}^{j}P\{\chi=l\}\cdot P\left\{\sum_{i=0}^{k}H_i=j-l\right\}\cdot\binom{l}{k}R^k(1-R)^{l-k}$$

于是

$$\tilde{g}_j=P\{\tilde{\chi}=j\}=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{g}_j^{[k]}=\sum_{l=1}^{j}P\{\chi=l\}\cdot\sum_{k=0}^{l}P\left\{\sum_{i=1}^{k}H_i=j-l\right\}\cdot\binom{l}{k}R^k(1-R)^{l-k} \tag{1}$$

其中 H_i 分别表示服务台的第 i 次修理时间, χ 表示顾客的实际服务时间. $\{\tilde{g}_j, j=1,2,\cdots\}$ 的母函数为

$$\tilde{G}(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{g}_j z^j=G\left[zR\cdot h(z)+z\bar{R}\right] \tag{2}$$

其中 $h(z)$ 表示服务台的修理时间的母函数, 即 $h(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{H=k\}z^k$; $\bar{R}=1-R$. 平均 "广义服务时间" 为

$$E[\tilde{\chi}]=E[\chi](1+R\cdot E[H])=\alpha(1+R\beta) \tag{3}$$

服务台的 "广义忙期": 是指从服务台开始工作的时刻起, 直到系统再次变空为止的这段时间, 其中包括了在顾客的服务期内, 服务台可能发生失效而进行修复的时间. 令 $\tilde{b}$ 表示从一个顾客开始的 "广义忙期" 长度, 则类似标准 $Geom^x/G/1$ 排队系统的忙期讨论, 有

引理 1 令 $\tilde{b}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P\left\{\tilde{b}=n\right\}z^n$, $|z|<1$, 则 $\tilde{b}(z)$ 满足方程 $\tilde{b}(z)=\tilde{G}\left[z(\bar{p}+pA(\tilde{b}(z)))\right]$, 并且有均值

$$E[\tilde{b}]=\begin{cases}\dfrac{\alpha(1+R\beta)}{1-\tilde{\rho}}, & \tilde{\rho}<1\\ \infty, & \tilde{\rho}\geq 1\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\tilde{\rho}=p\alpha e(1+R\beta)$; $\bar{p}=1-p$; $A(z)$ 表分布律 $\{e_k, k\geq 1\}$ 的母函数, 即 $A(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}e_k z^k$.

又令 $\tilde{b}^{\langle k\rangle}$ 表示从 k 个顾客开始的服务员 "广义忙期" 长度, 因为到达间隔是几何分布, 则类似文献 [13] 第 138 页对服务顺序的安排, $\tilde{b}^{\langle k\rangle}$ 可以表示为: $\tilde{b}^{\langle k\rangle}=\tilde{b}_1+\tilde{b}_2+\cdots+\tilde{b}_k$, 且 $\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_k$ 相互独立, 与服务员忙期 $\tilde{b}$ 有相同的分布.

"系统闲期" 是指从系统变空的时刻起, 直到有顾客到达系统为止的这段时间. 若令 $\tilde{\tau}$ 表示系统闲期的长度, 则由于系统闲期是剩余到达间隔, 且到达间隔是参数 p 的几何分布, 得

$$P\{\tilde{\tau}=j\}=p(1-p)^{j-1},\qquad j=1,2,\cdots$$

对任意时刻 n, 令 $\tilde{\eta}(n)=1$ 表示在时刻 n 服务台处于 "广义忙期" 的状态, 且令

$$\tilde{A}_i(n)=P\{\tilde{\eta}(n)=1|N(0)=i\}$$

表示在任意初始状态 $N(0)=i(i=0,1,2,\cdots)$ 下时刻 n 服务台处于 "广义忙期" 的概率.

定理 1 记 $\tilde{a}_i(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_i(n)z^n$, 则对 $|z|<1$, 有

$$\tilde{a}_0(z)=\frac{\tau(z)}{1-z}\left\{1-\frac{A\left(\tilde{b}(z)\right)\left[1-(1-y(z\bar{p}))\tau(z)-y(z\bar{p})v(z)\right]}{1-t(z)}\right\} \tag{5}$$

$$\tilde{a}_i(z)=\frac{1}{1-z}\left\{1-\frac{\tilde{b}^i(z)\left[1-(1-y(z\bar{p}))\tau(z)-y(z\bar{p})v(z)\right]}{1-t(z)}\right\},\quad i\geq 1 \tag{6}$$

且稳态结果为

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{A}_i(n)=\begin{cases}p\alpha e(1+R\beta), & \tilde{\rho}<1\\ 1, & \tilde{\rho}\geq 1\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\tau(z)=\frac{pz}{1-\bar{p}z},\quad t(z)=\tau(z)A\left(\tilde{b}(z)\right)\left[1-y(z\bar{p})\right]+y(z\bar{p})v(\Lambda),\quad \Lambda=z\left(\bar{p}+pA\left(\tilde{b}(z)\right)\right),$$

$$y(z\bar{p})=\sum_{j=0}^{\infty}(z\bar{p})^jP\{Y=j\};\ v(\Lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}(\Lambda)^jP\{V=j\}$$

证明 令

$$s_k=\sum_{i=1}^{k}(V_i+Y_i), l_k=\sum_{i=1}^{k}\tau_i, k\geq 1, s_0=l_0=0$$

则使用全概率分解技术, 得

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0(n)&=P\{\tilde{\eta}(n)=1;\tilde{\tau}_1\leq n|N(0)=0\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}e_kP\left\{\tilde{\tau}_1\leq n<\tilde{\tau}_1+\tilde{b}^{\langle k\rangle}\right\}+\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{j=1}^{\infty}P\left\{s_{j-1}\leq\tilde{\tau}_2<s_{j-1}+Y_j;\tilde{\tau}_1+\tilde{b}^{\langle k\rangle}+\tilde{\tau}_2\leq n;\tilde{\eta}(n)=1\right\}+\\&\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{j=1}^{\infty}P\left\{s_{j-1}+Y_j\leq\tilde{\tau}_2<s_j;\tilde{\tau}_1+\tilde{b}^{\langle k\rangle}+s_j\leq n;\tilde{\eta}(n)=1\right\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}e_k\sum_{i=1}^{n}\left[1-\sum_{j=k}^{n-i}P\left\{\tilde{b}^{\langle k\rangle}=j\right\}\right]p(1-p)^{i-1}+\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}e_i\sum_{u=k}^{n}\sum_{r=1}^{n-u}\tilde{A}_i(n-u-r)\times\\&\left(\sum_{w=2j-2}^{r}P\left\{\sum_{k=0}^{j-1}(V_k+Y_k)=w\right\}-\sum_{w=2j-1}^{r}P\left\{\sum_{k=0}^{j-1}(V_k+Y_k)+Y_j=w\right\}\right)\times\\&P\{\tilde{\tau}=r\}P\left\{\tilde{\tau}+\tilde{b}^{\langle k\rangle}=u\right\}+\\&\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}e_{m_1}\cdots\sum_{m_i=1}^{\infty}e_{m_i}\sum_{u=k}^{n}\sum_{t=2j-1}^{n-u}\sum_{r=0}^{n-u-t}\tilde{A}_{m[i]}(n-u-r-t)\begin{pmatrix}r\\i\end{pmatrix}\times\\&p^i(1-p)^{r-i}(1-p)^t\times P\{V=r\}P\left\{\sum_{i=0}^{j-1}(V_i+Y_i)+Y_j=t\right\}P\left\{\tilde{\tau}+\tilde{b}^{\langle k\rangle}=u\right\}\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $m[k]=m_1+m_2+\cdots+m_k, k\geq 1$.

对初始状态 $N(0)=i(\geq 1)$ 时, 类似可得

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i(n)&=1-\sum_{k=i}^{n}P\left\{\tilde{b}^{<i>}=k\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e_m\sum_{s=i}^{n}\sum_{r=1}^{n-s}\tilde{A}_m(n-s-r)\times\\&\left(\sum_{w=2k-2}^{r}P\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(V_j+Y_j)=w\right\}-\sum_{w=2k-1}^{r}P\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(V_j+Y_j)+Y_k=w\right\}\right)\times P\{\tilde{\tau}=r\}P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}=s\right\}+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}e_{m_1}\cdots\sum_{m_j=1}^{\infty}e_{m_j}\sum_{l=i}^{n}\sum_{r=2k-1}^{n-l}\sum_{u=0}^{n-l-r}\tilde{A}_{m[j]}(n-l-r-u)\begin{pmatrix}u\\j\end{pmatrix}\times\\&p^j(1-p)^{u-j}(1-p)^r\times P\{V=u\}P\left\{\sum_{t=1}^{k-1}(V_t+Y_t)+Y_k=r\right\}P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}=l\right\}\end{aligned}\tag{9}$$

对 (8) 和 (9) 式分别关于时刻 n 做 z- 变换, 交换求和顺序并整理得到:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0(z)&=\frac{zp}{(1-z\bar{p})(1-z)}\left[1-A\left(\tilde{b}(z)\right)\right]+\left(\frac{zp}{1-z\bar{p}}\right)^2\frac{[1-y(z\bar{p})]A\left(\tilde{b}(u)\right)}{1-y(z\bar{p})v(z\bar{p})}\sum_{i=1}^{\infty}e_i\tilde{a}_i(z)+\\&\frac{pzA\left(\tilde{b}(z)\right)y(z\bar{p})}{(1-z\bar{p})[1-y(z\bar{p})v(z\bar{p})]}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}e_{m_1}\cdots\sum_{m_i=1}^{\infty}e_{m_i}\tilde{a}_{m[i]}(z)\sum_{r=0}^{\infty}z^r\times\\&\begin{pmatrix}r\\i\end{pmatrix}p^i(1-p)^{r-i}P\{V=r\}\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_i(z)&=\frac{1-\tilde{b}^i(z)}{1-z}+\frac{zp\tilde{b}^i(z)[1-y(z\bar{p})]}{(1-z\bar{p})[1-y(z\bar{p})v(z\bar{p})]}\sum_{m=1}^{\infty}e_m\tilde{a}_m(z)+\\&\frac{y(z\bar{p})\tilde{b}^i(z)}{1-y(z\bar{p})v(z\bar{p})}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}e_{m_1}\cdots\sum_{m_j=1}^{\infty}e_{m_j}\tilde{a}_{m[j]}(z)\sum_{r=0}^{\infty}z^r\begin{pmatrix}r\\j\end{pmatrix}p^j(1-p)^{r-j}P\{V=r\}, i\geq 1\end{aligned}\tag{11}$$

由 (10) 式和 (11) 式得到关系式:

$$\tilde{a}_i(z)=\frac{1}{1-z}\left\{1-\frac{\tilde{b}^i\left(z\right)\left[\tau\left(z\right)-\left(1-z\right)\tilde{a}_0\left(z\right)\right]}{\tau\left(z\right)A\left(b\left(z\right)\right)}\right\},i\geq 1 \tag{12}$$

把 (12) 式代入 (10) 式, 经整理即得 (5) 式. (5) 式再代回 (12) 式即得 (6) 式.

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{A}_i(n)=\lim\limits_{z\uparrow 1^-}(1-z)\tilde{a}_i(z)$, 运用洛必达法则并结合引理 1, 即可完成定理 1 的证明.

又考虑一个离散时间的单部件系统, 其寿命 X 服从几何分布 $x_j=P\{X=j\}=R(1-R)^{j-1}$, $j=1,2,\cdots$, $0<R<1$. 失效后立即进行修理, 修理时间 H 服从一般离散分布, 平均修理时间为 $\beta\,(0\leq\beta<\infty)$, 部件修复如新, 修复后立即转为工作状态, 且假设 $n=0$ 时部件是新的, X 和 H 相互独立. 对 $n\geq 0$, 令

$$\Phi(n)=P\ \{\text{时刻}\ n\ \text{部件失效}\},\ M(n)=E\{\text{在}\ (0,n]\ \text{内部件失效的次数}\}$$

类似连续时间的单部件系统 ([14]), 有如下引理:

引理 2 对 $|z|<1$, 令

$$\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(n)z^n, m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}M(n)z^n$$

则

$$\psi(z)=\frac{zR\cdot[1-h(z)]}{(1-z)\left[1-z+zR\cdot(1-h(z))\right]}\quad,\quad m(z)=\frac{zR}{\left[1-z+zR-zRh(z)\right](1-z)}$$

而且平稳结果为

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n)=\frac{R\beta}{1+R\beta}\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{M(n)}{n}=\frac{R}{1+R\beta}$$

下面讨论在时刻 n 服务台处于失效状态的概率 (不可用度). 令

$\Phi_i(n)=P\{\text{时刻}\ n\ \text{服务台失效}\ |N(0)=i\}\,,i\geq 0$

定理 2 令 $\psi_i(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Phi_i(n)z^n$, 则对 $|z|<1$, 有重要关系式:

$$\psi_i(z)=\psi(z)\cdot[(1-z)\tilde{a}_i(z)],\qquad i=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

其中 $\tilde{a}_i(z)$ 由定理 1 确定, $\psi\left(z\right)$ 由引理 2 确定.

证明 1) 由于在每个 “广义忙期” 内, 服务台的正常和失效形成一个交替更新过程. 于是, 用 $\tilde{b}^{\langle i\rangle}$ 对引理 2 考虑的离散时间单部件可修系统中的指标 $\Phi(n)$ 进行全概率分解, 得

$$\begin{aligned}\Phi(n)&=P\left\{\text{时刻}n\text{部件失效}\right\}\\&=P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}>n\geq 0;\ \text{时刻}n\text{部件失效}\right\}+P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}\leq n;\ \text{时刻}n\text{部件失效}\right\}\\&=Q_i\left(n\right)+\sum_{k=i}^{n}P\left\{\tilde{b}^{\langle i\langle}=k\right\}\cdot P\left\{\text{时刻}n-k\text{失效}\left|\tilde{b}^{\langle i\rangle}=k\right.\right\},i\geq 1\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $Q_i\left(n\right)=P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}>n\geq 0;\ \text{时刻}n\text{部件失效}\right\}$, $i\geq 1$.

因为 “广义忙期”$\tilde{b}^{\langle i\rangle}$ 结束时服务台是正常的, 所以 $\tilde{b}^{\langle i\rangle}$ 的结束时刻必须落在某次寿命长度 X_j 中 (见图 1), 而且 $\tilde{b}^{\langle i\rangle}$ 在 X_j 中的那一部分时间完全由顾客的服务时间构成, 根据服务、运行和修理相互独立的假定, 有 $\tilde{b}^{\langle i\rangle}$ 与 X_j、H_j 相互独立. 又由于服务台的寿命服从几何分布, 所以

$$P\{\text{时刻}n-k\text{系统失效}|\tilde{b}^{\langle i\rangle}=k\}=\Phi(n-k)$$

于是

$$\Phi(n)=Q_i\left(n\right)+\sum_{k=i}^{n}P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}=k\right\}\cdot\Phi(n-k),\quad i\geq 1 \tag{15}$$

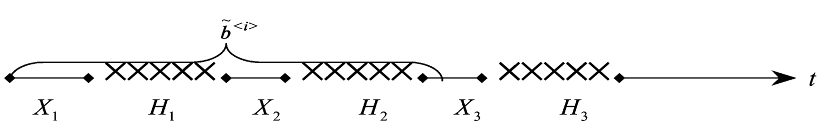

图 1

2) 根据模型的假设, 服务台只可能在服务员的 “广义忙期” 中失效, 而且在每一个 “广义忙期” 的开始和结束时刻服务台都正常, 所以时刻 n 服务台失效当且仅当时刻 n 落入服务员的某个 “广义忙期” 中, 且时刻 n 服务台失效. 于是

$$\begin{aligned}
\Phi_0(n) &= P\{\text{时刻}n\text{服务台失效}, \tilde{\tau}_1 \le n\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e_k \sum_{i=1}^{n} Q_k(n-j) p(1-p)^{i-1} \quad + \sum_{k=1}^{n} e_k \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} e_i \sum_{u=k}^{n}\sum_{r=1}^{n-u} \Phi_i(n-u-r) \times \\
&\left(\sum_{w=2j-2}^{r} P\left\{\sum_{k=0}^{j-1}(V_k+Y_k)=w\right\} - \sum_{w=2j-1}^{r} P\left\{\sum_{k=0}^{j-1}(V_k+Y_k)+Y_j=w\right\}\right) \times \\
&P\{\tilde{\tau}=r\} P\left\{\tilde{\tau}+\tilde{b}^{\langle k\rangle}=u\right\} + \sum_{k=1}^{n} e_k \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty} e_{m_1} \cdots \sum_{m_i=1}^{\infty} e_{m_i} \sum_{u=k}^{n}\sum_{t=2j-1}^{n-u}\sum_{r=0}^{n-u-t} \\
&\Phi_{m[i]}(n-u-r-t) \binom{r}{i} p^i (1-p)^{r-i} (1-p)^t \times \\
&P\{V=r\} P\left\{\sum_{i=1}^{j-1}(V_i+Y_i)+Y_j=t\right\} P\left\{\tilde{\tau}+\tilde{b}^{\langle k\rangle}=u\right\}
\end{aligned} \tag{16}$$

同理可得:

$$\begin{aligned}
\Phi_i(n) =& Q_i(n) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} e_m \sum_{s=i}^{n}\sum_{r=1}^{n-s} \Phi_m(n-s-r) \times \\
&\left(\sum_{w=2k-2}^{r} P\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(V_j+Y_j)=w\right\} - \sum_{w=2k-1}^{r} P\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(V_j+Y_j)+Y_k=w\right\}\right) P\{\tilde{\tau}=r\} P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}=s\right\} + \\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty} e_{m_1} \cdots \sum_{m_i=1}^{\infty} e_{m_i} \sum_{l=i}^{n}\sum_{r=2k-1}^{n-l}\sum_{u=1}^{n-l-r} \Phi_{m[i]}(n-l-r-u) \binom{u}{j} p^i (1-p)^{u-j} (1-p)^r \times \\
&P\{V=u\} P\left\{\sum_{t=1}^{k-1}(V_t+Y_t)+Y_k=r\right\} P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}=l\right\}, \quad i \ge 1
\end{aligned} \tag{17}$$

对 (16) 和 (17) 式关于时刻 n 做 z-变换, 且注意到 $q_i(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_i(n) z^n = \psi(z)\left[1-\tilde{b}^i(z)\right]$, 有

$$\begin{aligned}
\psi_0(z) =& \frac{zp}{1-z\bar{p}} \psi(z) \sum_{k=1}^{\infty} e_k \left[1-\tilde{b}^k(z)\right] + \left(\frac{zp}{1-z\bar{p}}\right)^2 \frac{[1-y(z\bar{p})] A\left(\tilde{b}(u)\right)}{1-y(z\bar{p}) v(z\bar{p})} \sum_{i=1}^{\infty} e_i \psi_i(z) + \\
&\frac{pzA\left(\tilde{b}(z)\right) y(z\bar{p})}{(1-z\bar{p})[1-y(z\bar{p}) v(z\bar{p})]} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty} e_{m_1} \cdots \sum_{m_i=1}^{\infty} e_{m_i} \psi_{m[i]}(z) \sum_{r=0}^{\infty} z^r \binom{r}{i} p^i (1-p)^{r-i} P\{V=r\}
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\psi_i(z) =& \psi(z)\left[1-\tilde{b}^i(z)\right] + \frac{zp\tilde{b}^i(z)[1-y(z\bar{p})]}{(1-z\bar{p})[1-y(z\bar{p}) v(z\bar{p})]} \sum_{m=1}^{\infty} e_m \psi_m(z) + \\
&\frac{y(z\bar{p}) \tilde{b}^i(z)}{1-y(z\bar{p}) v(z\bar{p})} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty} e_{m_1} \cdots \sum_{m_j=1}^{\infty} e_{m_j} \psi_{m[j]}(z) \sum_{r=0}^{\infty} z^r \binom{r}{j} p^j (1-p)^{r-j} P\{V=r\}, \ i \ge 1
\end{aligned} \tag{19}$$

然后类似定理 1 中 $\tilde{a}_0(z)$ 和 $\tilde{a}_i(z)$ 的求解方法可得关系式 (13) 式.

推论 1

$$\psi_0(z) = \frac{zR\cdot[1-h(z)]\tau(z)}{(1-z)[1-z+zR\cdot(1-h(z))]} \cdot \left\{1 - \frac{A\left(\tilde{b}(z)\right)[1-(1-y(z\bar{p}))\tau(z) - y(z\bar{p}) v(z)]}{1-t(z)}\right\}$$

$$\psi_i(z) = \frac{zR\cdot[1-h(z)]}{(1-z)[1-z+zR\cdot(1-h(z))]} \cdot \left\{1 - \frac{\tilde{b}^i(z)[1-(1-y(z\bar{p}))\tau(z) - y(z\bar{p}) v(z)]}{1-t(z)}\right\}, i \ge 1$$

而且稳态结果

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_i(n)=\lim_{z\uparrow 1^-}(1-z)\psi_i(z)=\begin{cases} pe\alpha R\beta, & \tilde{\rho}<1\\ \frac{R\beta}{1+R\beta}, & \tilde{\rho}\ge 1\end{cases}$$

3 服务台的失效次数

令 $M_i(n)=E\left\{\text{服务台在}\,(0,n]\,\text{内失效次数}\,|N(0)=i\right\}$ 表示系统从初始状态 $N(0)=i$ 出发, 服务台在 $(0,n]$ 内失效的平均次数.

定理 3 记 $m_i(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}M_i(n)\cdot z^n$, 则对 $|z|<1$, 有重要关系式:

$$m_i(z)=m\,(z)\cdot[(1-z)\tilde{a}_i(z)],\qquad i=0,1,2,\cdots \tag{20}$$

其中 $m(z)$ 由引理 2 确定.

证明 1) 令

$I_k(n)=E\{(0,n]$ 内服务台的失效次数; $0\le n<\tilde{b}^{<k>}\}$ $J_k(n)=E\{(0,\tilde{b}^{<k>}]$ 内服务台的失效次数; $\tilde{b}^{<k>}\le n\}$

则类似 (15) 式, 用 $\tilde{b}^{<k>}$ 对引理 2 中的指标 $M(n)$ 进行全概率分解, 得

$$I_k(n)+J_k(n)=M(n)-\sum_{j=k}^{n}P\left\{\tilde{b}^{<k>}=j\right\}\cdot M(n-j),\quad k\ge 1 \tag{21}$$

对 (21) 式两端关于时刻 n 做 z-变换, 得

$$i_k(z)+j_k(z)=m(z)\left[1-\tilde{b}^k\left(z\right)\right],k\ge 1 \tag{22}$$

2) 类似 (16) 和 (17) 式的分解, 有

$$\begin{aligned}M_0(n)=&\sum_{k=1}^{\infty}e_k\sum_{i=1}^{n}I_k\left(n-j\right)p\left(1-p\right)^{i-1}+\sum_{k=1}^{\infty}e_k\sum_{i=1}^{n}J_k\left(n-j\right)p\left(1-p\right)^{i-1}+\\&\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}e_i\sum_{u=k}^{n}\sum_{r=1}^{n-u}M_i\left(n-u-r\right)\times\\&\left(\sum_{w=2j-2}^{r}P\left\{\sum_{k=0}^{j-1}(V_k+Y_k)=w\right\}-\sum_{w=2j-1}^{r}P\left\{\sum_{k=0}^{j-1}(V_k+Y_k)+Y_j=w\right\}\right)\times\\&P\left\{\tilde{\tau}=r\right\}P\left\{\tilde{\tau}+\tilde{b}^{\langle k\rangle}=u\right\}+\\&\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}e_{m_1}\cdots\sum_{m_i=1}^{\infty}e_{m_i}\sum_{u=k}^{n}\sum_{t=2j-1}^{n-u}\sum_{r=0}^{n-u-t}M_{m[i]}\left(n-u-r-t\right)\times\\&\begin{pmatrix}r\\i\end{pmatrix}p^i\left(1-p\right)^{r-i}\left(1-p\right)^t\times P\left\{V=r\right\}P\left\{\sum_{i=0}^{j-1}(V_i+Y_i)+Y_j=t\right\}P\left\{\tilde{\tau}+\tilde{b}^{\langle k\rangle}=u\right\}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}M_i(n)=&I_i(n)+J_i(n)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e_m\sum_{s=i}^{n}\sum_{r=1}^{n-s}M_m\left(n-s-r\right)\\&\left(\sum_{w=2k-2}^{r}P\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(V_j+Y_j)=w\right\}-\sum_{w=2k-1}^{r}P\left\{\sum_{j=0}^{k-1}(V_j+Y_j)+Y_k=w\right\}\right)\times P\left\{\tilde{\tau}=r\right\}P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}=s\right\}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m_1=1}^{\infty}e_{m_1}\cdots\sum_{m_i=1}^{\infty}e_{m_i}\sum_{l=i}^{n}\sum_{r=2k-1}^{n-l}\sum_{u=0}^{n-l-r}M_{m[i]}\left(n-l-r-u\right)\begin{pmatrix}u\\j\end{pmatrix}p^i\left(1-p\right)^{u-j}\left(1-p\right)^r\times\\&P\left\{V=u\right\}P\left\{\sum_{t=0}^{k-1}(V_t+Y_t)+Y_k=r\right\}P\left\{\tilde{b}^{\langle i\rangle}=l\right\},i\ge 1\end{aligned} \tag{24}$$

对 (23) 式和 (24) 式关于时刻 n 做 z-变换, 且注意到 $i_k(z)+j_k(z)=m(z)\left[1-\tilde{b}^k\left(z\right)\right]$, 然后类似定理 1 中 $\tilde{a}_0(z)$ 和 $\tilde{a}_i(z)$ 的求解方法可得关系式 (20) 式.

推论 2

$$m_0(z)=\frac{zR\tau(z)}{[1-z+zR\cdot(1-h(z))]}\cdot\left\{1-\frac{A\left(\tilde{b}\left(z\right)\right)\left[1-\left(1-y\left(z\bar{p}\right)\right)\tau\left(z\right)-y\left(z\bar{p}\right)v\left(z\right)\right]}{1-t\left(z\right)}\right\}$$

$$m_i(z)=\frac{zR}{[1-z+zR\cdot(1-h(z))]}\cdot\left\{1-\frac{\tilde{b}^i\left(z\right)\left[1-\left(1-y\left(z\bar{p}\right)\right)\tau\left(z\right)-y\left(z\bar{p}\right)v\left(z\right)\right]}{1-t\left(z\right)}\right\},i\geq 1$$

而且有平稳结果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_i\left(n\right)}{n}=\lim_{z\uparrow 1^-}\left(1-z\right)^2m_i\left(z\right)=\begin{cases}pR\alpha e, & \tilde{\rho}<1\\ \frac{R}{1+R\beta}, & \tilde{\rho}\geq 1\end{cases}$$

定理 4 令 $\tilde{N}$ 表示在服务员的 “广义忙期”$\tilde{b}$ 内服务台的失效次数, 则

$$E\left[\tilde{N}\right]=\begin{cases}\dfrac{R\alpha}{1-\tilde{\rho}}, & \tilde{\rho}<1\\ \infty, & \tilde{\rho}\geq 1\end{cases}\tag{25}$$

证明 设 v 表示在广义服务时间 $\tilde{\chi}$ 内到达的顾客批数, 则

$$P\left\{v=k\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}P\left\{\tilde{\chi}=n\right\},\quad k=0,1,2,\cdots\tag{26}$$

且设第 i 批的顾客数为 D_i, $i=1,2,\cdots,v$, 完全类似文 [13] 第 138 页上服务顺序的安排, 服务员 “广义忙期”$\tilde{b}$ 可表示为:

$$\tilde{b}=\tilde{\chi}+\tilde{b}_1+\cdots+\tilde{b}_{D_1}+\tilde{b}_{D_1+1}+\cdots+\tilde{b}_{D_1+D_2}+\cdots+\tilde{b}_{D_1+D_2+\cdots+D_v}$$

其中当 $v=0$ 时, $D_1+D_2+\cdots+D_v=0$, $\tilde{b}=\tilde{\chi}$; 而且 $\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_{D_1+D_2+\cdots+D_v}$ 相互独立, 与 $\tilde{b}$ 有相同的概率分布, 并独立于 $\tilde{\chi}$、$D_1,D_2,\cdots,D_v$ 与 v.

令 $\tilde{N}^*$ 表示在广义服务时间 $\tilde{\chi}$ 内服务台的失效次数,$\tilde{N}_i$ 表示在 $\tilde{b}_i$ 内服务台的失效次数, 则

$$\tilde{N}=\tilde{N}^*+\tilde{N}_1+\cdots+\tilde{N}_{D_1}+\tilde{N}_{D_1+1}+\cdots+\tilde{N}_{D_1+D_2}+\cdots+\tilde{N}_{D_1+D_2+\cdots+D_v}$$

当 $v=0$ 时, $\tilde{N}=\tilde{N}^*$, 而且 $\tilde{N}_1,\cdots,\tilde{N}_{D_1+D_2+\cdots+D_v}$ 相互独立, 与 $\tilde{N}$ 有相同分布, 并独立于 $\tilde{N}^*$、$D_1,D_2,\cdots,D_v$ 与 v, 于是

$$\begin{aligned}E\left[\tilde{N}\right]&=E\left[\tilde{N}^*\right]+\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{v=k\right\}\cdot E\left[\tilde{N}_1+\cdots+\tilde{N}_{D_1+D_2+\cdots+D_k}\right]\\&=E\left[\tilde{N}^*\right]+\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{v=k\right\}\cdot\sum_{m_1=1}^{\infty}e_{m_1}\cdots\sum_{m_k=1}^{\infty}e_{m_k}E\left[\tilde{N}_1+\cdots+\tilde{N}_{m_1+m_2+\cdots+m_k}\right]\\&=E\left[\tilde{N}^*\right]+E\left[\tilde{N}\right]\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{v=k\right\}\cdot ke\\&=E\left[\tilde{N}^*\right]+eE\left[\tilde{N}\right]E\left[v\right]\end{aligned}\tag{27}$$

而在广义服务时间 $\tilde{\chi}$ 内服务台的平均失效次数为 $E\left[\tilde{N}^*\right]=R\alpha$(类似文 [13] 定理 10.1.3, 也可见文 [3] 定理 2), 且

$$\begin{aligned}E\left[v\right]&=\sum_{k=0}^{n}kP\left\{v=k\right\}=\sum_{k=0}^{n}k\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}P\left\{\tilde{\chi}=n\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}pn\sum_{k=0}^{n}k\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}\left(1-p\right)^{n-k}P\left\{\tilde{\chi}=n\right\}\\&=p\sum_{n=1}^{\infty}nP\left\{\tilde{\chi}=n\right\}=pE\left[\tilde{\chi}\right]=p\alpha\left(1+R\beta\right)\end{aligned}\tag{28}$$

于是当 $\tilde{\rho}<1$ 时, 把 (28) 式代回 (27) 式, 并注意当 $\tilde{\rho}\geq 1$ 时 $E[\tilde{b}]=\infty$, 可得到 (25) 式.

参考文献

[1] Meisling T. Discrete time queue theory[J]. Open Res, 1958, 6: 96–105.

[2] 朱翼隽, 胥秀珍. 空竭服务多级适应性休假 $Geom^x/G/1$ 排队系统分析 [J]. 江苏大学学报 (自然科学版), 2005, 26(2): 133–136.
Zhu Y J, Xu X Z. Analysis of the $Geom^x/G/1$ queueing system with exhaustive service and multiple adaptive vacations[J]. J of Jiangsu University, 2005, 26(2): 133–136.
[3] 朱翼隽, 胥秀珍. 空竭服务多级适应性休假 $Geom^x/G/1$ 可修排队系统分析 [J]. 江苏大学学报 (自然科学版), 2005, 26(4): 316–319.
Zhu Y J, Xu X Z. Analysis of the $Geom^x/G/1$ repairable queueing system with exhaustive service and multiple adaptive vacations[J]. J of Jiangsu University, 2005, 26(4): 316–319.
[4] 田乃硕. Geometric/G/1 休假随机服务系统 [J]. 应用数学与计算数学学报, 1993, 2(1): 71–78.
Tian N S. Geometric/G/1 service system with vacations[J]. Communication on Application Mathematics & Computation, 1993, 2(1): 71–78.
[5] 马占友, 徐秀丽, 田乃硕. 多重休假的带启动期–关闭期的 Geom/G/1 离散排队及其在 ATM 网络中的应用 [J]. 运筹与管理, 2004, 13(5): 21–25.
Ma Z Y, Xu X L, Tian N S. Discrete time Geom/G/1 queue with multiple vacations and close-down set-up time and its application in ATM networks[J]. Operations Research & Management Science, 2004, 13(5): 21–25.
[6] 马占友, 田乃硕. 多重休假的带启动期 Geom/G/1 排队 [J]. 运筹与管理, 2002, 11(4): 5–10.
Ma Z Y, Tian N S. The Geom/G/1 queue with multiple vacations and set-up time[J]. Operations Research & Management Science, 2002, 11(4): 5–10.
[7] 侯玉梅. 服务台可修的 Geomtric/G/1 离散时间排队 [J]. 数学的实践与认识, 1996, 26(4): 328–333.
Hou Y M. Discrete time Geomtric/G/1 queue with repairable service station[J]. Mathematics in Practice & Theory, 1996, 26(4): 328–333.
[8] Yu H B. The MAP/PH(PH/ PH)/1 discrete time queuing system with repairable server[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2001(6): 59–63.
[9] Takagi H. Analysis of a discrete time queueing system with time-limited service[J]. Queueing Systems, 1994, 18(2): 183–197.
[10] Tian N, Zhang Z G. The discrete time GI/Geo/1 queue with multiple vacations[J]. Queueing Systems, 2002(40): 283–294.
[11] 田乃硕. 休假随机服务系统 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
Tian N S. Stochastic Service Systems with Vacations[M]. Beijing: Peking University Press, 2001.
[12] 曹晋华, 程侃. 服务台可修的 M/G/1 排队系统分析 [J]. 应用数学学报, 1982, 5(2): 113–127.
Cao J H, Cheng K. Analysis of M/G/1 queueing system with repairable service station[J]. Acta Math Appl Sinica, 1982, 5(2): 113–127.
[13] 唐应辉, 唐小我. 排队论 —— 基础与分析技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
Tang Y H, Tang X W. Queueing Theories—Fundamentals & Techniques[M]. Beijing: Science Press, 2006.
[14] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论 [M]. 北京: 科学出版社. 1986.
Cao J H, Cheng K. Introduction to Reliability Mathematic Theories[M]. Beijing: Science Press, 1986.