文章编号:1000-6788(2006)01-0107-04

一类异质物品拍卖机制收益等价性及应用

张　娥[1,2] ,汪应洛[2]
(1. 上海财经大学信息管理与工程学院,上海 200433;2. 西安交通大学管理学院,陕西 西安 710049)

摘要:　讨论 Winner-pay 和 All-pay 两种不同支付方式下一类异质物品的一级价格拍卖机制的收益特性,以指导拍卖者选择拍卖机制.这类异质物品拍卖广泛应用于网上广告位拍卖和比赛奖金分配中,其特点是各拍卖物品价值具有相关性,投标者只投 1 个标价,机制根据标价的大小顺序进行物品分配.采用静态贝叶斯博弈分析方法,通过计算两种拍卖方式下拍卖方期望收益,得出两种拍卖机制下拍卖方收益相等的结论;同时,证明了投标者在 Winner-pay 下的期望支付比 All-pay 高.从本文拍卖收益计算的特例,还可计算得到 k 件同质物品拍卖收益等于 $k+1$ 级密封拍卖的收益.

关键词:　异质物品拍卖;收益相等;广告位拍卖
中图分类号:　F224.32;F724.59　　　　**文献标识码**:　A

Unit Demand Auction Mechanisms for Heterogeneous Objects Auction

ZHANG E[1,2] , WANG Ying-luo[2]
(1. Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;2. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract:　Symmetric Bayesin game theory is usually adopted to select a suitable kind of payment from Winner-pay and All-pay for a special case of heterogeneous object auction where different objects have relatedvalue and it is also widely used in Internet advertisement-place auctions and the activities of contest prize allocation. In this paper, we assume that each bidder has only one chance to summit a bid during a heterogeneous object auction. We mainly prove that the seller gains the same expected revenue in Winner-pay and All-pay auctions. However, bidders bid more aggressively in Winner-pay auction than in the other auction. Moreover, we specify our model to the single object auction and multi-unit homogeneous objects auction respectively, and conclude that seller's expected revenue is equal to $k+1$ sealed auction in k unit homogeneous objects auction.

Key words:　heterogeneous objects auction; revenue equivalence; first price auction

1　问题提出的背景

近年来互联网内容提供商(ICP)们纷纷改变了广告的收费方式,推出"竞价广告"[1].利用这种高效、自由、互动的新型广告方式,客户可以自由选择竞价广告发布平台.通过调整每次点击的价格,竞价系统根据价格进行排名.竞价广告使得出价最高的竞标者获得第一位,第二高的获得次高位置,根据价格由高到低进行广告位次分配,出价最低的排在最后.目前,竞价广告主要采用两种收费方式,一种是所有的参与者提交投标后,无论排在哪个位置都要交纳投标价;另一种方式是搜狐等 ICP 最近推出的竞价广告新卖点——不点击不收费,这意味排在最前面的几个广告才可能被点击,而排在后面的等于没有中标.

竞价广告对广告位置的分配是一个典型的异质物品分配问题,其特征是每种异质物品只有 1 件,每个投标者也只需要 1 件,投标者提交 1 个投标价后最终被分配到哪个位置取决于其投标价在总体中所排的位次.现实中像这样的例子还有很多,比如评职称、奖金等.我们称这类拍卖为"单需求异质物品拍卖"(One-bid Unit-demand Auction for Heterogeneous Objects,简称 OUAHO).若获得某件物品的投标者是对该物品

收稿日期:2005-01-05
资助项目:国家自然科学基金(70472036)
作者简介:张娥(1976 -),女,博士,现为上海财经大学信息管理与工程学院讲师,主要研究电子商务与现代物流管理. eezhang@163.com.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

出价最高的投标者,并且支付自己的投标价,则是一级价格拍卖. 对于支付规则,如果所有参与者都要支付自己的投标价,拍卖理论中称之为 All-pay 支付规则;如果只有获胜者才支付自己投标价,则称之为 Winner-pay 支付规则.

异质物品拍卖在实践中常采用平行或者序贯拍卖,而在理论上对此鲜有研究,因为投标者不确定他能否获得哪件物品,且这种拍卖形式在博弈上没有均衡解,难以探究投标者行为与卖方收益. Palfrey 分析了当投标者面对预算约束时,异质物品平行拍卖只有在投标者人数不超过 2 人,物品数量不超过 2 件的情况下才存在纯策略纳什均衡解[2]. 此后,对异质物品最优拍卖的研究几乎没有取得进展. 近几年出现的组合拍卖虽然在实践中可以处理异质物品需求数量大于 1 的问题,但在理论中却证明了确定竞胜标是一个 NP 难题[3]. 对于 OUAHO 问题,理论上还没有一个有效的拍卖机制. 虽然在实践中对投标者只提交 1 个投标时的分配方法进行了探索,但理论上还没有对机制的效率和收益特性进行研究. 因此,本文在理论方面做了一些有益的探索.

关于拍卖机制效率的研究,最经典的是 Vickery 在 1961 年所做的工作,他从卖方的角度研究了机制选择与卖方收益的关系,在单件物品拍卖上得出著名的"收益相等"定理[4]. 1981 年 Myerson 在更一般的条件下证明了"收益相等"定理,认为对于投标者风险中性、持有独立同分布的独立私有价值估价和人数确定的情况下,所有满足下列两个条件的单件物品拍卖机制都可产生相同的收益:1) 物品分配给估价最高的投标者,2) 具有最低估价的投标者期望收益为零[5]. 本文在异质物品的两种一级价格拍卖中同样得到收益相等的结论,本文的工作是对已有结论在异质物品拍卖上的一个推广.

2 模型及假设

在模型中,有如下 4 个基本假设:

1) 拍卖方有 k 件具有顺序价值关系的物品,$g_1, g_2, \cdots, g_k$,其中,第 j 件物品价值大于第 $j+1$ 件物品价值. 用 v^j 表示第 j 件物品价值,则有 $v^j > v^{j+1}$, $j = 1, \cdots, k-1$.

2) 有 n 个风险中性的投标者,他们对第 1 位的物品具有独立私有价值估计,记为 v_i ($i = 1, 2, \cdots, n$),且每个投标者只知道自己的估价. v_i 是[$\underline{v}$,聊]上的随机变量,其分布函数为 $F(v)$,概率密度为 $f(v)$,则 $F(\underline{v}) = 0$, F(聊) $= 1$.

3) 投标者 i 对第 j 位物品价值估计记为 $v_i^j = G_j(v_i)$, $j = 2, 3, \cdots, n$, G_j 为单调函数. 令 $v^{(1)}, \cdots, v^{(n)}$ 表示 v_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 按从大到小的一个排列,则 $v^{(j)}$ 表示对第 1 件物品的价值估计处于第 j 位的顺序统计量.

4) 对称性,每位投标者决策准则都一样,都是以自身期望效用最大化为投标依据,假定投标者效用仅与货币相关. 投标者采用的投标函数为 $b = B(t)$ (其中 t 是投标者对第 1 件物品的价值估计),它是 t 的严格增函数,即估价越高投标价也越高. 投标者之间不存在合谋行为.

模型的目标是,拍卖方最大化期望总收益,而投标者期望以最小的投标价获得最好的物品.

3 All-pay 的一级价格拍卖

由于投标者是对称的,所以只需考虑某一个投标者的投标. 为方便起见,设其对第 1 件物品的估价为 v,投标价为 b,则其期望收益为:

$$\pi = \sum_{j=1}^{k} G_j(B^{-1}(b))\, C_{n-1}^{j-1}[F(B^{-1}(b))]^{n-j}[1 - F(B^{-1}(b))]^{j-1} - b. \tag{1}$$

根据包络定理,

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}v} = \frac{\partial \pi}{\partial v} = \sum_{j=1}^{k} G_j'(B^{-1}(b))\, C_{n-1}^{j-1}[F(B^{-1}(b))]^{n-j}[1 - F(B^{-1}(b))]^{j-1}.$$

上式为给定其他投标者决策规则时该投标者的反应函数. 根据纳什均衡(理性预期)条件,投标者决策规则与投标者的出标行为一致,结合模型的对称性假设,意味着投标者满足(2)式的最优投标必须包含在决策规则内,即在纳什均衡处有 $b = B(v)$. 因此,

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}v} = \sum_{j=1}^{k} G_j'(v)\, C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1}. \tag{3}$$

对(3)式两边同时积分,得

$$\pi\Big|_{\underline{v}}^{v} = \int_{\underline{v}}^{v}\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j-1}\, dG_j(t),$$

即

$$\sum_{j=1}^{k} G_j(t)\, C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1} - b = \int_{\underline{v}}^{v}\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1}\, dG_j(t).$$

根据上式解出 b 并分部积分,得

$$\begin{aligned} b = B(v) &= \sum_{j=1}^{k} G_j(v)\, C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1} - \int_{\underline{v}}^{v}\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j-1}\, dG_j(t) \\ &= \int_{\underline{v}}^{v}\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}\, G_j(t)\, d([F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j-1}) \end{aligned} \tag{4}$$

根据投标策略对称性,当有 n 个投标者时,All-pay 下的卖方期望收益为:

$$\begin{aligned} E(nb) &= n\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} b\, dF(v) = n\int_{\underline{v}}^{\bar{v}}\int_{\underline{v}}^{v}\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}\, G_j(t)\, d([F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j-1})\, dF(v) \\ &= n\int_{\underline{v}}^{\bar{v}}\int_{t}^{\bar{v}} dF(v)\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}\, G_j(t)\, d([F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j-1}) \\ &= \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} n[1-F(t)]\cdot\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}\, G_j(t)\{(n-j)\cdot[F(t)]^{n-j-1}[1-F(t)]^{j-1}\cdot \\ &\quad f(t) - (j-1)\cdot[F(t)]^{n-j}\cdot[1-F(t)]^{j-2}\cdot f(t)\}\, dt \\ &= \int_{\underline{v}}^{\bar{v}}\sum_{j=1}^{k} G_j(t)\{C_{n-1}^{j-1}\cdot n\cdot(n-j)[F(t)]^{n-j-1}[1-F(t)]^{j-1} f(t)\, dt - \\ &\quad C_{n-1}^{j-1}\cdot n\cdot(j-1)\cdot[F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j} f(t)\}\, dt. \end{aligned}$$

根据顺序统计量的数学期望公式,上式结果为

$$\sum_{j=1}^{k}[jE\{G_j[v^{(j+1)}]\} - (j-1)E\{G_j[v^{(j)}]\}]. \tag{5}$$

从上式中可以看出,卖方收益是投标者对第 1 件物品估价 v 的顺序统计量的函数.

4　Winner-pay 的一级价格拍卖

对于 Winner-pay 拍卖,我们仍然是考察某个投标者的投标行为,此时,

$$\pi = \sum_{j=1}^{k}(G_j(v) - b)\, C_{n-1}^{j-1}[F(B^{-1}(v))]^{n-j}[1-F(B^{-1}(v))]^{j-1}. \tag{6}$$

类似地,根据包络定理和投标者对称性解得

$$\begin{aligned} B(v) &= \frac{\sum_{j=1}^{k} G_j(v)\, C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1}}{\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1}} - \frac{\int_{\underline{v}}^{v}\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j-1}\, dG_j(t)}{\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1}} \\ &= \frac{\int_{\underline{v}}^{v}\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}\, G_j(t)\, d\{[F(t)]^{n-j}[1-F(t)]^{j-1}\}}{\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1-F(v)]^{j-1}} \end{aligned} \tag{7}$$

Winner-pay 卖方收益是前 k 个投标之和的期望值:

$$E\left(\sum_{j=1}^{k} b^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k}\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} b\cdot\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\cdot[F(v)]^{n-j}\cdot[1-F(v)]^{j-1}\, dF(v)$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$= \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} b \cdot \sum_{j=1}^{k} n \cdot C_{n-1}^{j-1} \cdot [F(v)]^{n-j} \cdot [1 - F(v)]^{j-1} dF(v)$$

$$= n \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \int_{\underline{v}}^{v} \sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1} G_j(t) d\{[F(t)]^{n-j}[1 - F(t)]^{j-1}\} dF(v). \tag{8}$$

注意到,上式与 All-pay 下的卖方期望收益相同.由此,我们得到如下定理.

定理 1 对于物品价值具有确定性关系的异质物品拍卖,All-pay 与 Winner-pay 两种形式下拍卖方的收益相等.

对于投标者在两种拍卖形式下的投标行为,我们有如下定理.

定理 2 在拍卖物品数量远小于投标人数,即 $k \ll n$ 的前提下,Winner-pay 下的投标价大于 All-pay 下的投标价.

证明 我们只需比较 All-pay 和 Winner-pay 两种形式下投标者的出价大小,即比较(4)式与(7)式的大小即可.由于(7)式中分子的表达式与(4)式相同,因此,只要证明(7)式中分母的值小于 1,定理即可得证.对(7)式分母表达式分析如下:

$$\sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j-1}[F(v)]^{n-j}[1 - F(v)]^{j-1} = \sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j}[F(v)]^{n-j-1}[1 - F(v)]^{j}\left[\frac{F(v)}{1 - F(v)} \cdot \frac{j}{n-j}\right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} C_{n-1}^{j}[F(v)]^{n-j-1}[1 - F(v)]^{j} < \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j}[F(v)]^{n-j-1}[1 - F(v)]^{j} = 1.$$

上式中第一个不等式成立是因为 $j \leq k \ll n$,从而 $\frac{F(v)}{1 - F(v)} \cdot \frac{j}{n-j} \leq 1$ 成立.所以,Winner-pay 下的投标价大于 All-pay 下的投标价. 证毕.

5 模型讨论

对于假设 c),若 $v^j = G_j(v) = \alpha^{j-1} v$, $j = 1, \cdots, k$,其中,α 为常数,则说明相邻位次物品的价值呈等比关系.根据(5)式,卖方期望收益为:

$$E = \sum_{j=1}^{k} \alpha^{j-1}[jE(v^{(j+1)}) - (j-1)E(v^{(j)})]. \tag{9}$$

当 $\alpha = 1$ 时,问题退化为 k 件同质物品拍卖模型,则有以下推论成立.

推论 1 k 件同质物品一级价格密封拍卖时,Winner-pay 与 All-pay 两种形式下卖方收益相等.

推论 2 k 件同质物品一级价格密封拍卖与 $k+1$ 级密封拍卖收益相等.

证明 对于 k 件同质物品一级价格密封拍卖,令 $v^j = G_j(v) = v$, $j = 1, \cdots, k$ 并代入(9)式,得到:

$$E\left(\sum_{j=1}^{k} b^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k}[jE(v(j+1)) - (j-1)E(v^{(j)})]$$

$$= E(v^{(2)}) - 0 + 2E(v^{(3)}) - E(v^{(2)}) + \cdots + kE(v^{(k+1)}) - (k-1)E(v^{(k)})$$

$$= k \cdot E(v^{(k+1)}). \tag{10}$$

即拍卖方的期望收益为 $k \cdot E(v^{(k+1)})$,等于 $k+1$ 密封拍卖的期望收益. 证毕.

推论 2 支持了 Harris 和 Raviv 在文献[6]中的研究结论.

当 $\alpha = 1$ 且 $k = 1$ 时,问题退化为单一物品拍卖.根据(10)式得到拍卖方的期望收益为 $E(v^{(2)})$,这与文献[7]的结论是相同的.

6 结论

本文研究了一类异质物品拍卖.这类拍卖广泛应用于网上竞价广告、职称和奖金分配等问题.本文研究得出,采用 Winner-pay 或 All-pay 形式对于拍卖方的期望收益没有影响.从而,从理论上解释了为什么搜狐等 ICP 出台“不点击不收费”广告政策.表面上该政策对客户有很大的优惠,而实际上由于这种情况下投标者出标价更高,因而拍卖方的收益并没有减少.

(下转第 122 页)

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的时间短得多. 在大型的交通网络中进行服务设施的选址决策时 ,考虑固定需求的服务半径和路径需求的服务半径 ,运用启发式算法来解决该 NP - hard **问题 ,有一定的现实意义. 在今后的研究中 ,我们将考虑随机需求以及各个服务设施的服务半径不同的情况下的混合** FCLM **问题.**

参考文献:

[1] Hodgson J. A Flow-capturing location allocation model [J]. Geographical Analysis, 1990, 22(3): 270 - 279.

[2] Berman O, Fouska N, Larson R C. Optimal location of discretionary service facilities [J]. Transportation Science, 1992, 26(3): 201 - 211.

[3] Berman O, Bertsimas D, Larson R C. Locating discretionary service facilities Ⅱ: Maximizing market, minimizing inconvenience [J]. Operations Research, 1995, 43: 623 - 632.

[4] Berman O, Hodgson J, Krass D. Flow interception problem. In: Drezner, Z(Ed.), Facility Location: A Survey of Application and Methods[M]. Springer, Berlin, 1995, 389 - 426.

[5] Berman O, Krass D, Xu C W. Locating discretionary service facilities based on probabilistic customer flows[J]. Transportation Science, 1995, 29: 276 - 290.

[6] Hodgson M J, Rosing K E. Applying the flow capturing location-allocation model to an authentic network: Edmonton, canada [J]. European Journal of Operational Research 1996, 90: 427 - 443.

[7] Mirchandani P B, Rebello R, Agnetis A. The inspection station location problem in hazardous materials transportation: some heuristics and bound [J]. INFOR, 1995, 33: 100 - 113.

(**上接第** 110 **页**)

参考文献:

[1] **竞价广告颠覆传统媒体广告**[N]. **互联网周刊**, 2004-6-28, 65.
Online advertisement auction challenge traditional advertisement[N]. Internet Weekly, 2004-6-28, 65.

[2] Palfrey, T. R. Multiple-object, discriminatory auctions with bidding constraints: a game-theory analysis[J]. Management Science, 1980, 26(9): 935 - 946.

[3] Tuomas Sandholm. Approaches to winner determination in combinatorial auctions[J]. Decision Support Systems, 2000, 28(1): 165 - 176.

[4] Vickery W. Counter speculation, auctions and competitive sealed tenders[J]. Journal of Finance, 1961, 41: 8 - 37.

[5] Myerson, Roger B. Optimal auction design[J]. Mathematics of Operation Research, 1981, 6(1): 58 - 73.

[6] Harris M, Raviv A. A theory of monopoly pricing schemes with demand uncertainty[J]. American Economics Review, 1981, 49(6): 1477 - 1499.

[7] **王彦, 李楚霖. 拍卖机制理论中的收益等价性及应用**[J]. **系统工程理论与实践**, 2004, 24(4): 88 - 91.
Wang Yan, Li Chulin. A revenue equivalence theorem of the auction theory and its application[J]. System Engineering - Theory and Practice, 2004, 24(4): 88 - 91.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net