文章编号:1000-6788(2006)09-0090-09

一种处理语言评价信息的多属性群决策方法

廖貅武,李　垣,董广茂
(西安交通大学管理学院,西安 710049)

摘要:　针对具有语言评价信息的多属性群决策问题,提出了一种新的决策方法.该方法采用二元语义表示模型和计算模型进行语言评价信息的处理,并依据LINMAP法的基本思想,在给出群体一致度和不一致度定义的基础上,构造了一个估计正理想点和属性权重的线性规划模型,通过计算每个方案与正理想点之间的距离来确定最优方案.最后用实例说明了该方法的有效性与合理性.

关键词:　群决策;语言建模;线性规划
中图分类号:　C934　　　　**文献标志码**:　A

A Multi-attribute Group Decision-making Approach Dealing with Linguistic Assessment Information

LIAO Xiu-wu, LI Yuan, DONG Guang-mao
(School of Management, Xian Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract:　A new approach is proposed for dealing with multi-attribute group decision-making problem with linguistic assessment information. In this approach, the 2-tuple linguistic representation and computational model are first used to aggregate the linguistic information. Then group consistency and inconsistency indices are defined and a linear programming model is constructed to determine the positive ideal solution and weights of attributes. The distance of each alternative to the positive ideal solution is calculated to determine the ranking order of alternatives. Finally, a numerical example is given to demonstrate the validity and rationality of the proposed method.

Key words:　group decision-making; linguistic modeling; linear programming

0　引言

科学技术的进步和信息技术的发展使社会、经济生活中的许多决策问题变得越来越复杂,单个决策者通常很难考虑问题的所有相关方面.为减少决策的失误,很多企业和组织的重要决定都是由多个决策者共同参与制定的,这就是所谓的群决策.在群决策过程中,由于决策者的地位、知识和偏好等方面的差异,他们所做的决策有可能不完全一致.如何集成决策者的个人偏好以形成群体偏好是群决策中一个需要解决的问题.目前人们已经提出了一些处理群决策问题的模型和方法[1],当给出了决策阵和属性权重的具体数值后,根据这些模型和方法比较容易做出决策.然而,在许多实际的群决策问题中,由于事物的模糊性和不确定性,用数值标度通常不能够有效地、准确地反映决策者的偏好,而引入模糊集理论,利用语言变量表示决策者的主观判断是一个比较合理和可行的方式.由于这样一类具有语言评价信息的群决策问题具有广泛的实际背景,所以近年来,有关这一问题的理论和应用研究受到了广泛的关注[2~8].

现有的处理具有语言评价信息的群决策问题的决策模型大致可以分为三类[9]:1)基于扩展原理的近似计算模型[10];2)有序语言计算模型[11,12];3)二元语义计算模型[13].其中第一类模型的特点是将语言评价信息转化为模糊数,并依据扩展原理进行模糊数的运算与分析,由于基于扩展原理的模糊算术运算会增加结果的模糊性[9],所以可能造成一定程度上的信息损失或扭曲,另外由于模糊数的集成结果通常还是模糊

收稿日期:2005-03-09
资助项目:国家自然科学基金(70571063);中国博士后科学基金(中博基2003033))资助项目
作者简介:廖貅武(1965 -),男(汉),博士,副教授,目前主要从事决策分析、知识管理方面的研究工作.

数,使用不同的模糊排序方法可能导致方案的优先次序不同;第二类模型的特点是根据语言术语集的顺序结构直接对语言符号进行运算,但进行语言计算后,其结果很难精确地对应到初始的语言评价集中,所以需要寻找一个最贴近的语言短语进行近似,这样就会产生信息的损失[13];第三类模型的特点是使用二元语义表示方式及其运算算子对语言评价信息进行处理,研究结果表明[9,14],采用这样的信息处理方式能有效避免语言评价信息集结和运算中出现的信息损失和扭曲,在计算精度和可靠度等方面明显优于其他的语言信息处理方法. 目前有关第三类群决策模型的研究工作并不多见,文献[13]提出的基于二元语义信息处理的群决策方法是依据传统理想点法(TOPSIS)的基本思想,通过计算每个方案与正、负理想点间的语义距离来确定最优方案,本文则依据 LINMAP 法[15]的基本思想,提出了另一种新的群决策方法. 该方法采用二元语义表示方式及其运算算子进行语言评价信息的处理,在给出群体一致度和不一致度定义的基础上,构造了一个估计正理想点和权重向量的线性规划模型,通过计算每个方案与正理想点之间的距离来确定方案之间的优先次序. 它与文[13]的不同之处是,本文方法中的理想点和权重向量不是事先给定的,而是通过使用决策者对方案的成对比较信息估计出来的. 本文的安排如下:下一节将简要介绍二元语义表示模型和基本运算算子;第二节给出基于二元语义计算的群体多维偏好分析的线性规划模型;第三节将用一个例子说明本文提出的群决策方法,最后是全文的总结.

1　二元语义表示模型和计算模型

二元语义表示模型是西班牙教授 Herrera[14]提出来的一种信息处理方法. 它的特点是采用二元组表示语言评价信息并进行运算,可有效避免语言评价信息集成和运算过程中出现的信息损失和扭曲问题,从而使语言信息的计算结果更为精确. 二元语义最基本的概念是符号平移,下面在介绍这一概念的基础上,给出二元语义的表示模型,并定义几个与二元语义有关的运算算子[9,14].

设 S 是预先定义好的由奇数个元素构成的有序自然语言评价集,即 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$,一般要求 S 具有如下性质:1) 有序性:当 $i\geq j$ 时,有 $s_i\geq s_j$,符号“$\geq$”表示“优于或等于”;2) 存在逆算子:$Neg(s_i)=s_{g-i}$;3) 极大化运算和极小化运算:当 $s_i\geq s_j$ 时,有 $\max\{s_i,s_j\}=s_i$,$\min\{s_i,s_j\}=s_j$. 例如,一个常用的粒度为 7 的语言评价集可表示为 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_6\}$,其中语言项 s_i $(i=0,1,\cdots,6)$ 对应的语义和模糊数分别为:$s_0=N$(非常低) $=(0,0,0.17)$,$s_1=VL$(很低) $=(0,0.17,0.33)$,$s_2=L$(低) $=(0.17,0.33,0.5)$,$s_3=M$(一般) $=(0.33,0.5,0.67)$,$s_4=H$(高) $=(0.5,0.67,0.83)$,$s_5=VH$(很高) $=(0.67,0.83,1)$,$s_6=P$(非常高) $=(0.83,1,1)$. 中间项表示“近似 0.5”的评价,其余项对称地分布在它的两边. 以下部分提到的语言评价集均指满足这些性质的集合.

定义 1　设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$是一个自然语言术语集,β 是 S 中的元素集成运算的结果,$\beta\in[0,g]$,设 $i=\text{round}(\beta)$(“round”指四舍五入运算) 和 $\alpha=\beta-i$,则 $\alpha\in[-0.5,0.5)$,并称 α 为 s_i 的符号平移.

从定义 1 可以看到,符号平移指的是位于$[-0.5,0.5)$中的一个数值,它表示对 S 中的元素集成运算后得到的 β 与初始语言术语集 S 中最贴近元素 s_i $(i=\text{round}(\beta))$ 之间的差别.

定义 2　设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$是一个自然语言术语集,β 是一个位于$[0,g]$中的数,它是 S 中的元素集成运算的结果,则与 β 对应的二元语义可由下面函数得到:

$$\Delta:[0,g]\rightarrow S\times[-0.5,0.5).$$

$$\Delta(\beta)=(s_i,\alpha)\begin{cases} s_i, & i=\text{round}(\beta) \\ \alpha=\beta-i, & \alpha\in[-0.5,0.5) \end{cases}.$$

命题 1　设 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_g\}$是语言术语集,(s_i,α_i)是一个二元语义,则存在逆函数 Δ^{-1} 将二元语义转换成相应的数值 $\beta\in[0,g]$即

$$\Delta^{-1}:S\times[-0.5,0.5)\rightarrow[0,T],$$

$$\Delta^{-1}(s_i,\alpha_i)=i+\alpha_i=\beta.$$

由定义 1、定义 2 和命题 1 看出,对应于 $s_i(i=0,1,\cdots,g)$的二元语义为$(s_i,0)$.

基于上面的定义,很容易给出二元语义的计算模型,这些模型包括:二元语义的比较、逆算子和集成算子.

1) 二元语义的比较:设(s_i,α_i)和(s_j,β_j)是任意两个二元语义,

如果 $i>j$,那么(s_i,α_i)优于(s_j,α_j),记为$(s_i,\alpha_i)>(s_j,\alpha_j)$;

如果 $i=j$,(a) 当 $\alpha_i>\alpha_j$ 时,有$(s_i,\alpha_i)>(s_j,\alpha_j)$;

(b) 当 $\alpha_i=\alpha_j$ 时,有(s_i,α_i)与(s_j,α_j)相同,记为$(s_i,\alpha_i)=(s_j,\alpha_j)$;

(c) 当 $\alpha_i<\alpha_j$ 时,有(s_i,α_i)劣于(s_j,α_j),记为$(s_i,\alpha_i)<(s_j,\alpha_j)$.

2) 二元语义的逆算子"Neg":

$$Neg((s_i,\alpha_i)) = \Delta(g-(\Delta^{-1}(s_i,\alpha_i))).$$

定义 3 设 $a=\{(b_1,\alpha_1),(b_2,\alpha_2),\cdots,(b_n,\alpha_n)\}$是一组要集成的二元语义,则二元语义算术平均算子 ζ_1 为:

$$\zeta_1[(b_1,\alpha_1),(b_2,\alpha_2),\cdots,(b_n,\alpha_n)] = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta^{-1}(b_i,\alpha_i)}{n}\right) = \Delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right).$$

其中 $\beta_i=\Delta^{-1}(b_i,\alpha_i)=i+\alpha_i$.

定义 4 设 $a=\{(b_1,\alpha_1),(b_2,\alpha_2),\cdots,(b_n,\alpha_n)\}$是一组要集成的二元语义,$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$是相应的权重向量,则二元语义加权平均算子 ζ_2 为:

$$\zeta_2[(b_1,\alpha_1),(b_2,\alpha_2),\cdots,(b_n,\alpha_n)] = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta^{-1}(b_i,\alpha_i)w_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}\right) = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i w_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}\right),$$

其中 $\beta_i=\Delta^{-1}(b_i,\alpha_i)=i+\alpha_i$.

定义 5 设 $a=\{(b_1,\alpha_1),(b_2,\alpha_2),\cdots,(b_n,\alpha_n)\}$是一组要集成的二元语义,$W=\{(r_1,\alpha'_1),(r_2,\alpha'_2),\cdots,(r_n,\alpha'_n)\}$是对应的二元语义权重向量,则相应的二元语义加权平均算子 ζ_3 为:

$$\zeta_3[((b_1,\alpha_1),(r_1,\alpha'_1)),((b_2,\alpha_2),(r_2,\alpha'_2)),\cdots,((b_n,\alpha_n),(r_n,\alpha'_n))]$$
$$=\Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta^{-1}(r_i,\alpha'_i)\times\Delta^{-1}(b_i,\alpha_i)}{\sum_{i=1}^{n}\Delta^{-1}(r_i,\alpha'_i)}\right).$$

定义 6 设 $a=\{(b_1,\alpha_1),(b_2,\alpha_2),\cdots,(b_n,\alpha_n)\}$和 $b=\{(c_1,\beta_1),(c_2,\beta_2),\cdots,(c_n,\beta_n)\}$是两组二元语义,$w=((r_1,\varepsilon_1),(r_2,\varepsilon_2),\cdots,(r_n,\varepsilon_n))$是对应的二元语义权重向量,定义 a,b 之间的加权欧氏距离为:

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta^{-1}(r_j,\varepsilon_j)[\Delta^{-1}(b_j,\alpha_j)-\Delta^{-1}(c_j,\beta_j)]^2}{\sum_{j=1}^{n}\Delta^{-1}(r_j,\varepsilon_j)}}.$$

定义 6 给出了计算两个二元语义间距离的简单而有效的方法. 从定义可以看出,二元语义 a 和 b 相等的充分必要条件是 $d(a,b)=0$. 通过计算,还可以得到如下不等式关系:

$$d(a,b)\le\max_j|\Delta^{-1}(b_j,\alpha_j)-\Delta^{-1}(c_j,\beta_j)|.$$

2 模型和方法

考虑一个由 m 个方案,n 个属性和 K 位决策者组成的多属性群决策(MAGDM)问题:方案集为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}(m\ge2)$,属性集为 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$,决策参与者的集合为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_K\}$. $p_k(k=$

$1,2,\cdots,K$)是决策者 e_k 的重要性权重,满足 $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$. 假设决策者 e_k 给出的具有语言形式的决策矩阵为 $\overline{D}^k = (\overline{x}_{ij}^k)_{m\times n}$, $\overline{x}_{ij}^k$ 为第 k 位决策者从自然语言术语集 S^{jk} 中选择的一个元素,作为方案 x_i 关于属性 c_j 的评价值,其中 $S^{jk} = \{s_0^{jk}, s_1^{jk}, \cdots, s_{g_{jk}}^{jk}\}$ 是预先定义好的由奇数个元素组成的有序自然语言术语集.

通常,评价集 S^{jk} ($j = 1,2,\cdots,n$; $k = 1,2,\cdots,K$) 可能有不同的粒度或语义,为了对评价信息进行处理,有必要将这些多粒度、多语义的语言评价信息转换到一个统一的语言术语集 S_T 上, S_T 通常称为基本语言术语集[16]. 文献[16]给出了如下的选择 S_T 的原则和方法:

1) 当只有一个具有最大粒度的术语集时,则选定该术语集为 S_T;

2) 当有两个或两个以上具有最大粒度的术语集时, S_T 的选择依赖于这些术语集的语义: ①若所有语言术语集有相同的语义,则任选取其中之一; ②当有些语言术语集具有不同的语义时, S_T 为一个语言术语集,其粒度大于决策者所能辨别的术语数.

当基本语言术语集 $S_T = \{s_0, s_1, \cdots, s_g\}$ 被选定后,可以将 S^{jk} 中的任一元素 s_i^{jk} ($i = 0,1,\cdots,g_{jk}$) 转化为 S_T 上的一个模糊集合. 转换函数 $\tau_{S^{jk}S_T}$ 定义如下[16]:

$$\tau_{S^{jk}S_T}: S^{jk} \to F(S_T).$$

$$\tau_{S^{jk}S_T}(s_i^{jk}) = \{(s_l, \alpha_l^{ijk}) \mid l \in \{0,1,\cdots,g\}\}, \ \forall s_i^{jk} \in S^{jk}.$$

$$\alpha_l^{ijk} = \max_y \min\{\mu_{s_i^{jk}}(y), \mu_{s_l}(y)\}.$$

其中, $F(S_T)$ 为定义在 S_T 上的所有模糊集的集合, $\mu_{s_i^{jk}}(y)$ 和 $\mu_{s_l}(y)$ 分别为语言术语 s_i^{jk} 和 s_l 的隶属函数.

进一步,模糊集 $\tau_{S^{jk}S_T}(s_i^{jk})$ 能够被转换成 S_T 上的二元语义,转换函数 χ 为[17]:

$$\chi: F(S_T) \to [0.\ g],$$

$$\chi(\tau_{S^{jk}S_T}(s_i^{jk})) = \chi(\{(s_l, \alpha_l^{ijk}), l = 0,1,\cdots,g\}) = \Delta\left(\frac{\sum_{l=0}^{g} l\alpha_l^{ijk}}{\sum_{l=0}^{g} \alpha_l^{ijk}}\right).$$

通过上面的方法, $\overline{D}^k$ ($k = 1,2,\cdots,K$) 能够被转化为一个新的决策矩阵 $D^K = (x_{ij}^k)$, 其中 x_{ij}^k ($i = 1,2,\cdots,m$; $j = 1,2,\cdots,n$; $k = 1,2,\cdots,K$) 是定义在 S_T 上的二元语义.

当决策阵 $D_k = (x_{ij}^k)_{m\times n}$ 被求出后,采用二元语义加权平均算子 ζ_2 将 D_k, $k = 1,2,\cdots,K$ 集成为群体决策阵 $D = (x_{ij}))_{m\times n}$,计算公式如下:

$$x_{ij} = (b_{ij}, \alpha_{ij}) = \zeta_2(x_{ij}^1, x_{ij}^2, \cdots, x_{ij}^K) = \Delta\left(\sum_{k=1}^{K} p_k \Delta^{-1}(x_{ij}^k)\right).$$

进一步假设 $L = \{l_0, l_1, \cdots, l_h\}$ 为评价属性相对重要程度的语言术语集, Θ^k ($k = 1,2,\cdots,K$) 为第 k 位决策者给出的方案之间的偏好关系,记

$$\Theta^k = \{(p,q) \mid x_p \succ x_q, p,q = 1,2,\cdots,m\},$$

其中 $x_p \succ x_q$ 表示第 k 位决策者在比较了方案 x_p 和 x_q 后,认为方案 x_p 至少和 x_q 一样好,记所有决策者偏好关系的集合为 $\Theta = \bigcup_{k=1}^{K} \Theta^k$.

对于集合 Θ 中任意一个有序对 (p,q),它对应的偏好关系为 $x_p \succ x_q$,这一偏好关系可能是其中一位决策者的个人看法,也可能是几位决策者的看法,甚至还可能是所有决策者的意见. 为了区分偏好关系的重要程度,定义

$$\mu_{pq} = \sum_{(p,q)\in\Theta^K} p_k.$$

当仅有 e_k 认为 $x_p \succ x_q$,那么 $\mu_{pq} = p_k$;当所有决策者都认为 $x_p \succ x_q$,那么 $\mu_{pq} = 1$. 特别,当决策者的权重相

同的时候

$$\mu_{pq} = \frac{\#\{e_k \mid (p,q) \in \Theta^k, e_k \in E\}}{K},$$

其中“#”表示集合$\{e_k \mid (p,q) \in \Theta^k, e_k \in E\}$中元素的个数.本文称 μ_{pq}为有序对(p,q)的“重要度”,它反映了偏好关系 $x_p \succ x_q$ 为群体所认同的程度.

为简单起见,记 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}) = ((b_{i1}, \alpha_{i1}), (b_{i2}, \alpha_{i2}), \cdots, (b_{in}, \alpha_{in}))$.假设群体最偏好的方案(即不一定能实现的正理想点)为 $x^* = ((b_1, \alpha_1), (b_2, \alpha_2), \cdots, (b_n, \alpha_n))$,群体关于属性的二元语义形式的权重向量为

$$w = ((r_1, \varepsilon_1), (r_2, \varepsilon_2), \cdots, (r_n, \varepsilon_n)),$$

其中 $b_j \in S$, $r_j \in L$, $\alpha_j \in [-0.5, 0.5)$, $\varepsilon_j \in [-0.5, 0.5)$, $j = 1, 2, \cdots, n$.一旦 x^*和 w 确定后,根据定义 6 就能计算 x_i 与正理想点之间的二元语义加权欧氏距离为:

$$V_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^{-1}(r_j, \varepsilon_j)[\Delta^{-1}(b_{ij}, \alpha_{ij}) - \Delta^{-1}(b_j, \alpha_j)]^2}{\sum_{j=1}^{n} \Delta^{-1}(r_j, \varepsilon_j)} \right)^{1/2}. \tag{1}$$

显然 $V_i \in [0, g]$.记 $\omega_j = \frac{\Delta^{-1}(r_j, \varepsilon_j)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta^{-1}(r_j, \varepsilon_j)}$, $\beta_{ij} = \Delta^{-1}(b_{ij}, \alpha_{ij})$, $\beta_j = \Delta^{-1}(b_j, \alpha_j)$有 $\omega_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$, $\beta_{ij}, \beta_j \in [0, g]$,距离公式(1)可简化为:

$$V_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j (\beta_{ij} - \beta_j)^2 \right)^{1/2}.$$

为了计算上的方便,以下选择 V_i^2 来度量 x_i 与正理想点之间的距离:

$$d_i = V_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (\beta_{ij} - \beta_j)^2, i = 1, 2, \cdots, m.$$

当选择了属性权重向量 w 和正理想点 x^*的值之后,可以计算每对方案(p,q)和正理想点之间的距离:

$$d_p = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (\beta_{pj} - \beta_j)^2. \tag{2}$$

$$d_q = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (\beta_{qj} - \beta_j)^2. \tag{3}$$

对于 Θ中的任意一对方案(p,q),如果相应的 $d_q \geq d_p$,也就是方案 x_p 比方案 x_q 更靠近正理想点,因此加权距离模型将和决策者的偏好一致.反之,如果 $d_p \geq d_q$,则加权距离模型将和决策者的偏好不一致.为此定义一个量去度量加权距离模型和有序对(p,q)之间的不一致程度,记这个量为$(d_q - d_p)^-$,公式如下:

$$(d_q - d_p)^- = \begin{cases} 0, & d_q \geq d_p \\ \mu_{pq}(d_p - d_q), & d_q < d_p \end{cases} = \max\{0, \mu_{pq}(d_p - d_q)\}.$$

从公式可以看出:如果 $d_q \geq d_p$,则加权距离模型将和有序对(p,q)一致,作为度量不一致程度的量$(d_q - d_p)^-$ 应为零;如果 $d_p \geq d_q$,则模型和有序对(p,q)不一致,如果 d_p 和 d_q 之间的差越大,则不一致程度越高,考虑到有序对重要度的差异,定义$(d_q - d_p)^-$ 为 $\mu_{pq}(d_p - d_q)$.对 Θ中的所有有序对求和得到群的不一致度为:

$$B = \sum_{(p,q) \in \Theta} (d_q - d_p)^-. \tag{4}$$

以类似的方式可以定义群的一致度为

$$G = \sum_{(p,q) \in \Theta} (d_q - d_p)^+. \tag{5}$$

其中

$$(d_q - d_p)^+ = \begin{cases} \mu_{pq}(d_q - d_p), & d_q \ge d_p \\ 0, & d_q < d_p \end{cases} = \max\{0, \mu_{pq}(d_q - d_p)\}.$$

上面定义的度量 G 反映了加权距离模型和所有决策者偏好一致的程度, G 越大,一致性程度就越高. 由 $(d_q - d_p)^-$ 和 $(d_q - d_p)^+$ 的定义可以得到如下关系式:

$$(d_q - d_p)^+ - (d_q - d_p)^- = \mu_{pq}(d_q - d_p).$$

为了确定正理想点 x^* 和属性权重向量 w,构造如下的规划问题

$$\begin{aligned} &\min B = \sum_{(p,q)\in\Theta} \max\{0, \mu_{pq}(d_p - d_q)\}, \\ &\text{s.t. } G - B \ge h, \\ &\quad \omega_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1, \\ &\quad 0 \le \beta_j \le g, \quad j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{6}$$

规划问题(6)中的 h 是决策者预先给出的一个正数. 对 Θ 中的每一个有序对 (p,q) 令

$$\lambda_{pq} = \max\{0, \mu_{pq}(d_p - d_q)\},$$

则 $\lambda_{pq} \ge 0$, $\lambda_{pq} \ge \mu_{pq}(d_p - d_q)$.

上面的问题可以转化为如下的数学规划:

$$\begin{aligned} &\min B = \sum_{(p,q)\in\Theta} \lambda_{pq}, \\ &\text{s.t. } G - B \ge h, \\ &\quad \mu_{pq}(d_p - d_q) - \lambda_{pq} \le 0, \quad (p,q) \in \Theta, \\ &\quad \omega_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1, \\ &\quad 0 \le \beta_j \le g, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ &\quad \lambda_{pq} \ge 0, \quad (p,q) \in \Theta. \end{aligned} \tag{7}$$

使用公式(1)～(5),并设 $v_j = \omega_j\beta_j\ (j = 1,2,\cdots,n)$,可以将(7)改写成如下形式:

$$\begin{aligned} &\min B = \sum_{(p,q)\in\Theta} \lambda_{pq} \\ &\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} \omega_j \Big[\sum_{(p,q)\in\Theta} \mu_{pq}(\beta_{qj}^2 - \beta_{pj}^2) \Big] - 2\sum_{j=1}^{n} v_j \Big[\sum_{(p,q)\in\Theta} \mu_{pq}(\beta_{qj} - \beta_{pj}) \Big] \ge h, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j [\mu_{pq}(\beta_{pj}^2 - \beta_{qj}^2)] - 2\sum_{j=1}^{n} v_j [\mu_{pq}(\beta_{pj} - \beta_{qj})] - \lambda_{pq} \le 0, \quad (p,q) \in \Theta, \\ &\quad \omega_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1, \\ &\quad 0 \le v_j \le g\omega_j, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ &\quad \lambda_{pq} \ge 0, \quad (p,q) \in \Theta. \end{aligned} \tag{8}$$

上面是一个比较典型的线性规划问题. 由 $v_j = \omega_j\beta_j$ 和 $\beta_j \in [0, g]$, $j = 1,2,\cdots,n$ 很容易得到(8)中的约束条件 $0 \le v_j \le g\omega_j$, $j = 1,2,\cdots,n$. 求解上面的线性规划得到最优解

$$(\omega_1^*, \omega_2^*, \cdots, \omega_n^*, v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*),$$

从而正理想点为:

$$x^{*} = ((b_1, \alpha_1), (b_2, \alpha_2), \cdots, (b_n, \alpha_n)) = \left(\Delta\left(\frac{v_1^{*}}{\omega_1^{*}}\right), \Delta\left(\frac{v_2^{*}}{\omega_2^{*}}\right), \cdots, \Delta\left(\frac{v_n^{*}}{\omega_n^{*}}\right)\right).$$

根据公式 $d_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{*} [\Delta^{-1}(b_{ij}, \alpha_{ij}) - \Delta^{-1}(b_j, \alpha_j)]^2$ 计算各方案离正理想点的距离,并以此排列方案间的优先次序,值越小意味着方案越优.

综合上述分析,整个决策过程可以由如下六步构成:

Step1:信息的获取:通过问卷调查获得决策者 $e_k(k = 1, 2, \cdots, K)$ 提供的决策阵 $\overline{D}^k = (\overline{x}_{ij}^k)$ 和方案的偏好关系集 Θ^k;

Step2:选择基本语言术语集 S_T,使用函数 τ 和 χ 将 $D^k = (x_{ij}^k), k = 1, 2, \cdots, K$ 中的元素 x_{ij}^k 转换成 S_T 上的二元语义形式.

Step3:采用二元语义计算模型将 $D_k, k = 1, 2, \cdots, K$ 集成为群体决策阵 D;

Step4:计算 $\Theta = \bigcup_{k=1}^{K} \Theta^k$ 中的所有有序对的重要度;

Step5:求解线性规划问题(8)得到正理想点 x^{*} 和属性权重向量 w;

Step6:计算各方案离正理想点的距离,确定方案间的优先次序.

3 算例

ERP 是一种集成化的企业信息系统.企业是否能成功地实施 ERP 项目受到很多因素的影响,而系统的正确选择是项目成功的基础和关键.如果选择到错误的 ERP 系统,将可能对企业的业绩造成负面影响.由于 ERP 系统的多样性、技术上的复杂性以及信息的有限性,选择合适的 ERP 系统是一件比较困难、比较费时的事情.设某企业在 ERP 系统的选择过程中需要比较四套系统 x_1, x_2, x_3, x_4 的功能和技术,该公司聘请了三位专家 e_1, e_2, e_3 参与决策,其重要性权重相同.他们选择了"可靠性和质量(c_1)"、"扩充和升级(c_2)"、"功能的适应性(c_3)"以及"界面友好(c_4)"等四个指标来对这些系统进行评价,设决策者选定的语言评价术语集均为

$$S = L = \{s_0, s_1, \cdots, s_6\},$$

其中语言项 $s_i(i = 0, 1, \cdots, 6)$ 对应的语义和模糊数在第一节中已经给出.

1) 三位决策者给出的具有语言形式的决策矩阵和方案的偏好关系分别为:

$$\overline{D}_1 = \begin{bmatrix} s_5 & s_4 & s_3 & s_2 \\ s_4 & s_5 & s_4 & s_3 \\ s_5 & s_6 & s_3 & s_3 \\ s_3 & s_4 & s_4 & s_2 \end{bmatrix}, \overline{D}_2 = \begin{bmatrix} s_5 & s_2 & s_3 & s_2 \\ s_3 & s_2 & s_3 & s_3 \\ s_5 & s_4 & s_2 & s_2 \\ s_4 & s_2 & s_3 & s_2 \end{bmatrix}, \overline{D}_3 = \begin{bmatrix} s_5 & s_2 & s_2 & s_1 \\ s_4 & s_3 & s_3 & s_3 \\ s_5 & s_5 & s_3 & s_3 \\ s_3 & s_3 & s_4 & s_1 \end{bmatrix}.$$

$$\Theta^1 = \{(3,1), (3,4), (2,4)\}, \Theta^2 = \{(3,4), (3,2), (1,4)\}, \Theta^3 = \{(3,1), (2,4), (3,2), (2,1)\}.$$

2) 将决策阵转化为二元语义形式,然后采用二元语义算术平均算子将它们集结成群的决策矩阵 D,结果如下:

$$D = \begin{bmatrix} (s_5, 0.00) & (s_3, -0.33) & (s_3, -0.33) & (s_2, -0.33) \\ (s_4, -0.33) & (s_3, 0.33) & (s_3, 0.33) & (s_3, 0.00) \\ (s_5, 0.00) & (s_5, 0.00) & (s_3, -0.33) & (s_3, -0.33) \\ (s_3, 0.33) & (s_3, 0.00) & (s_4, -0.33) & (s_2, -0.33) \end{bmatrix}.$$

3) 决策者提供的所有偏好关系的集合 Θ 为:

$$\Theta = \{(3,2), (3,4), (2,4), (1,4), (3,1), (2,1)\}.$$

Θ 中所有有序对的重要度分别为:

$$\mu_{32} = \frac{2}{3}, \mu_{34} = \frac{2}{3}, \mu_{24} = \frac{2}{3}, \mu_{14} = \frac{1}{3}, \mu_{31} = \frac{2}{3}, \mu_{21} = \frac{1}{3}.$$

4) 设决策者给出 $h = 1$,求解下列线性规划问题

$$\min B = \lambda_{32} + \lambda_{34} + \lambda_{24} + \lambda_{14} + \lambda_{31} + \lambda_{21}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ & -19.34\omega_1 - 33.94\omega_2 + 9.25\omega_3 - 10.75\omega_4 + 4.68v_1 + 8.66v_2 - 2.9v_3 + 7.34v_4 \geq 1 \\
& 7.69\omega_1 + 9.27\omega_2 - 2.64\omega_3 - 1.25\omega_4 - 1.77v_1 - 2.23v_2 + 0.88v_3 + 0.44v_4 - \lambda_{32} \leq 0 \\
& 9.27\omega_1 + 10.67\omega_2 - 4.23\omega_3 + 2.89\omega_4 - 2.23v_1 - 2.67v_2 + 1.33v_3 - 1.33v_4 - \lambda_{34} \leq 0 \\
& 1.59\omega_1 + 1.39\omega_2 - 1.59\omega_3 + 4.14\omega_4 - 0.45v_1 - 0.44v_2 + 0.45v_3 - 1.77v_4 - \lambda_{24} \leq 0 \\
& 4.64\omega_1 - 0.62\omega_2 - 2.11\omega_3 - 1.11v_1 + 0.22v_2 + 0.67v_3 - \lambda_{14} \leq 0 \\
& 11.91\omega_2 + 2.89\omega_4 - 3.11v_2 - 1.33v_4 - \lambda_{31} \leq 0 \\
& -3.84\omega_1 + 1.32\omega_2 + 1.32\omega_3 + 2.07\omega_4 + 0.89v_1 - 0.44v_2 - 0.44v_3 - 0.89v_4 - \lambda_{21} \leq 0 \\
& \omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0, \omega_3 \geq 0, \omega_4 \geq 0 \\
& \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1 \\
& 0 \leq v_1 \leq 6\omega_1, 0 \leq v_2 \leq 6\omega_2, 0 \leq v_3 \leq 6\omega_3, 0 \leq v_4 \leq 6\omega_4 \\
& \lambda_{32} \geq 0, \lambda_{34} \geq 0, \lambda_{24} \geq 0, \lambda_{14} \geq 0, \lambda_{31} \geq 0, \lambda_{21} \geq 0
\end{aligned}$$

求解上面线性规划,得最优值为 0,最优解为:

$$\omega_1^* = 0.1520, \omega_2^* = 0.2546, \omega_3^* = 0.1430, \omega_4^4 = 0.4503,$$

$$v_1^* = 0.7582, v_2^* = 1.3842, v_3^* = 0.1511, v_4^* = 2.4313.$$

所以 $\beta_1 = 4.99, \beta_2 = 5.44, \beta_3 = 1.06, \beta_4 = 5.40$. 从而正理想点为

$$x^* = \{(s_5, -0.01), (s_5, 0.44), (s_1, 0.06), (s_5, 0.4)\}$$

5) 计算各方案离正理想点的平方距离为 $d_1 = 8.5892$, $d_2 = 4.7289$, $d_3 = 3.7760$, $d_4 = 9.1737$,所以方案之间的优势关系为 $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$. 也就是第三套 ERP 系统应成为首选,很容易看出,决策结果比较合理.

4　结束语

本文针对具有语言评价信息的多属性群决策(MAGDM)问题,提出了一种新的群决策方法. 该方法的主要特点如下:1) 采用二元语义表示方式及其运算算子进行语言评价信息的处理,有效避免了语言评价信息集结和运算中出现的信息损失和扭曲,在计算精度和可靠度等方面优于其他的语言信息处理方法;2) 依据 LINMAP 法的基本思想,在给出群体一致度和不一致度定义的基础上,构造了一个估计正理想点和属性权重向量的线性规划模型. 本文方法与文献[13]的区别在于:在文献[13]中,权重向量是事先给定的,正理想点和负理想点可直接从决策阵得到;在本文提出的方法中,权重向量和正理想点是事先未知的,它是基于决策者提供的方案成对比较信息来产生正理想点和权重向量.

参考文献:

[1] Hwang C L, Lin M J. Group Decision Making Under Multiple Criteria [M]. Spring-Verlag: New York, 1987.

[2] Ölcer A İ, Odabaşi A Y. A new fuzzy multiple attributive group decision making methodology and its application to propulsion/manoeuvring system selection problem [J]. European Journal of Operational Research, 2005, 166:93 - 114.

[3] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A sequential selection process in group decision making with linguistic assessment [J]. Information Science, 1995, 85: 223 - 239.

[4] Wang R C, Chuu S J. Group decision-making using a fuzzy linguistic approach for evaluating the flexibility in a manufacturing system [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 154: 563 - 572.

[5] 王欣荣,樊治平. 群决策中基于语言信息处理的一种理想点法[J]. 中国管理科学,2002, 10(6): 84 - 87.

Wang X R , Fan Z P. A TOPSIS method with linguistic information for group decision making [J]. Chinese Journal of Management Science , 2002 , 10(6) : 84 - 87.

[6] Li D F, Yang J B. Fuzzy linear programming technique for multiattribute group decision making in fuzzy environments [J]. Information Sciences , 2004 , 158 : 263 - 275.

[7] Xu Z S. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations [J]. Information Science , 2004 , 166 : 19 - 30.

[8] Huynh V N , Nakamori Y. A satisfactory-oriented approach to multiexpert decision-making with linguistic assessments [J]. IEEE Transactions on Systems , Man and Cybernetics , 2005 , 35(2) :184 - 196.

[9] Herrera F , Martinez L. The 2-tuple linguistic computational model. Advantages of its linguistic description , accuracy and consistency [J]. International Journal of Uncertainty , Fuzziness and Knowledge - Based Systems , 2001 , 9 : 33 - 48.

[10] Delgado M , Verdegay J L , Vila M A. A model for linguistic partial information in decision making problem [J]. International Journal of Intelligent Systems , 1994 , 9 : 365 - 378.

[11] Bordogna G, Fedrizzi M , Passi G. A linguistic modelling of consensus in group decision making based on OWA operators [J]. IEEE Transactions on Systems , Man and Cybernetics , 1997 , 27 : 126 - 132.

[12] Herrera F , Herrera-Viedma E. Aggregation operators for linguistic weighted information [J]. IEEE Transactions on Systems , Man , and Cybernetics , 1997 , 27 : 646 - 656.

[13] 王欣荣 ,樊治平. 基于二元语义信息处理的一种语言群决策方法[J]. 管理科学学报 , 2003 ,6(5) :1 - 5.
Wang X R. Fan Z P. Method for group decision making based on two-tuple linguistic information processing [J]. Journal of Management Science in China , 2003 , 6(5) :1 - 5.

[14] Herrera F , Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic represent model for computing with words [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems , 2000 , 8(6) :746 - 752.

[15] Srinvasan V ,Shocker A D. Linear programming techniques for multidimensional analysis of preference [J]. Psychometrica , 1973 , 38 , 337 - 370.

[16] Herrera F , Herrera-Viedma E , Martínez L. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making [J]. Fuzzy Sets and Systems , 2000 , 114 : 43 - 58.

[17] Herrera F , Martínez L , Sánchez P J. Managing non-homogeneous information in group decision making [J]. European Journal of Operational Research , 2005 , 166 :155 - 132.