文章编号:1000-6788(2006)04-0055-05

# 一种概率意义下收益最大化的动态资金管理方法

汤义峰[1,2],程　兵[1]

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100080;2. 中国科学院研究生院,北京 100080)

**摘要**: 提出基于概率意义上收益最大化的一种动态资金管理方法,得到单变量多期模型下的显式解,以及多变量时求解的方法. 从而能在各种投资活动,尤其是高杠杆的投资活动中,发挥重要的作用.

**关键词**: 动态资金管理;布朗运动;二叉树逼近

**中图分类号**: F22;F83　　**文献标识码**: A

# A Method of Dynamic Money Management Maximizing the Most Possible Return

TANG Yi-feng[1,2], CHENG Bing[1]

(1. Academy of Mathematics and Systems Science, CAS, Beijing 100080; 2. Graduate University of CAS, Beijing 100080)

**Abstract**: This article introduces a method of dynamic money management that maximize the most possible return in investment. In the Intertemporal model of single variable it can get a closed form solution and it introduces an approach to solute the model of multiple variables. so it can be applied in investment, especially in high-leveraged investment.

**Key words**: dynamic money management; Brownian motion; binary tree

## 1　简介

对于价格趋势的预判是为了确定买或卖的方向以期获得正的期望收益,资金管理则是确定买卖的量来减少风险,扩大收益. 在充满不确定性的市场上,资金管理上的失误将会和价格趋势判断上的失误一样,都给投资者带来灾难性的后果. 这一点尤其在高杠杆率的市场上,如期货市场或外汇市场上屡屡得到证实.

投资中的资金管理就是决定在风险资产和现金之间如何配置,在普通的两期模型中,资金管理追求一定风险下的最大期望收益,本文将例证说明这种方法应用在多期模型中有致命的缺陷,并提出应用于多期模型的一种新的动态资金管理方法. 这种方法的本质在于顺应大数定律的作用,通过资金管理,使得在无限次投资以后,几乎必然获得的收益最大化.

基本的资金管理策略分为两大类,基于赌徒谬论(Gambler's fallacy)的等价鞅策略(martingale strategy)和与之相对的反等价鞅策略(anti-martingale)[1]. 赌徒谬论是指在一连串的盈利之后就有一次亏损或在一连串的亏损之后就会有一次盈利的信念. 实践中常用的方法有以下几种[2]:每次交易相同单位的等单元法;每次交易同一品种相同金额的等金额法;每次交易现有资金的固定比例的等比例法;以及控制风险的在险价值上限法等. 市场上流行的止损策略,当投资亏损达到某一目标线时,即兑现部分或全部投资的策略,便是最基本的资金管理策略之一. 与之相对的资金管理策略还有锁定利润的策略,即在投资利润达到某一比例时便兑现部分利润. 以上这些资金管理策略大都来自于投资者在各自的投资经历中积累的丰富的经验或直觉. 在一定程度上粗略回答了"怎样进行资金管理的问题",但未能回答为何要如此管理的问题. 本文将会回答这个问题. 并在回答这个问题的同时,给出有关资金管理的数学模型化的精确表述.

---

**收稿日期**:2005-04-22

**资助项目**:国家自然科学基金重大项目"金融风险的测量和建模"(6280100)

**作者简介**:汤义峰,中科院数学与系统科学研究院博士生,E-mail:yftang@amss.ac.cn;程兵,中科院数学与系统科学研究院研究员,博士生导师.

本文第二、第三、第四章节,分别介绍了多期离散、多期连续、多变量的资金管理模型,多期离散模型中用到了很强的、貌似与实际相差较大的假设,得出了简练的显式解,符合常规假设的连续状态下的投资决策可以分解为该离散模型从而求解.

## 2 最简单的资金管理模型

在[2]中提到一个有关资金管理的实验,让 40 个博士玩 100 局简单的计算机游戏. 在这个游戏中有 60 %的可能是赢的,赢的情况下,下注者得到与下注金额同样多的奖赏,输则输掉所有用来下注的钱. 给他们每人 100 元去赌,并且不限定各人每次投注金额. 试验结果是 40 个博士中只有两个人在游戏结束时剩的钱超过 100 元. 这是一个明显的有利于下注者的赌博游戏,但最后的实验结果表明绝大多数人在其中输了钱. 错误的资金管理原则便是他们输钱的关键. 我们剖析一下这个实验中可能用到的资金管理策略.

·策略 1:每次投入壹圆钱,投资一百次,最终结果最大为 200 元,最小为 0,期望值为 120 元.

·策略 2,对策略 1 进行推广,假设每次投入 $x$ 元,不妨设 $100/x$ 为整数:

a. 当 $x \leq \frac{100}{100} = 1$ 时投资最大收益为 $100 + 100x$,最小收益为 $100 - 100x$,期望收益:$100 + 20x$;

b. 当 $x > \frac{100}{100} = 1$ 时完成 $100 - 100/x$ 次投资后,投资者面临不同的可能,部分能按原定投资额继续投资,其他的则不能完成原有投资计划,从而出局. 假设投资者可以通过借贷保证完成规定的投资次数,则投资的期望收益肯定为 $100 + 20x$,在不能借贷的情况下,这种策略的期望收益 $\leq 100 + 20x$.

·策略 3:固定比例投资,投资比例为 1 这种投资策略是很疯狂的,一旦上帝站在该投资者一边,该投资者的财富将是真正的天文数字,但是依据的出现的概率来 $0.6^{100}$ 看,这样几率的事情根本不会发生,所以采取此种投资策略的投资者几乎必然会是一名一文,尽管这种投资策略的期望收益是:$100 * (1.2)^{100}$.

·策略 4:固定投资比例为 $x$, $x < 1$ 在固定投资比例为 $x$ 的情况下,投资每次投资成功的收益率为 $x$,投资失败后的收益率为 $-x$,则投资者投资 100 次后的最后资金为 $100 * (1 + x)^k * (1 - x)^{(100-k)}$,其中 $k$ 为随机变量,取值在 1 到 100 之间,取某一个特定数 $k$ 的概率为 $C_{100}^{k} * (0.6)^k * 0.4^{100-k}$. 故此时投资者最终的期望为:$100 * (1 + 0.2 * x)^{100}$.

从上述实验剖析中看出,采用固定金额的投资策略比较适合在小金额投入时,承受较小的风险,锁定一定的利润,是一种较稳健的防御性策略. 而固定比例的投资策略,适用于在大趋势判断正确的时候,快速扩大利润的同时还能经受波动带来的风险. 一个成功的资金管理策略应该拥有一个正的期望收益,但仅仅具有正的期望收益的资金管理策略是远远不够的(上述固定比例为 1 的策略便是最好的例证). 那么好的资金管理策略是什么样的策略呢?

现假设投资活动满足如下假设 1:

·起始资金量为 1 元

·投资次数为 $n$,在不破产的前提下,投资可无限次进行;

·投资成功概率设为变量 $p$,投资失败概率则为 $1 - p$,且每次投资成败的可能性独立;

·投资成功的盈利为本金的 $a$ 倍,投资失败的损失为本金的 $b$ 倍.

投资者需要做的决策就是在每次投资初决定投资的金额,然后在每一次投资结束盘点剩余金额,当损失大于或等于本金时投资者破产,投资活动结束,否则投资继续进行. 当投资者面临的是无数次的投资决策,且投资收益率独立分布时,投资者每一次投资决策都相当于在投资第一次时所做的决策. 因此投资者每次投资的金额大小只与投资时的所拥有的金额相关. 因此假若每次考虑投资时将投资者的资金量单位化,不同时点上的投资决策问题都变成了求固定的投资比例问题.

**定理 1** 在满足假设 1 的条件下,最优的固定投资比例为

$$x = \frac{p * (a + b) - b}{a * b}.$$

**证明** 假设投资者每次确定的投资比例为 $x$,则投资成功时,投资收益率为 $x * a$,投资失败时,投资

收益率为 $-b*x$,假定投资成功的次数为 $k$. 则投资者最后的总收益为 $(1+x*a)^{k}*(1-x*b)^{n-k}$,平均到每次投资的收益为 $(1+x*a)^{k/n}*(1-x*b)^{(n-k)/n}$,由于投资决策的目的就是让投资收益最大化,且每一次投资活动都需保证投资不会因当期破产而停止. 所以寻求最佳资金管理比例即为:

$$[\text{problem1}]\quad \max(1+x*a)^{k/n}*(1-x*b)^{(n-k)/n}\quad \text{s.t}\ -1/a<x<1/b. \tag{1}$$

当每次采用固定比例的投资策略时,满足(1)式投资活动显然可以持续进行下去,当 $n$ 趋于无限时,在依据概率论中的大数定律[3]:

$$\lim_{n\to\infty} k/n \to p.$$

上述 problem1 转化为

$$\max(1+x*a)^{p}*(1-x*b)^{1-p}\quad \text{s.t}\ -1/a<x<1/b.$$

根据约束条件,可以对其取对数

$$\max\ p*\ln(1+x*a)+(1-p)*\ln(1-x*b)^{①}. \tag{2}$$

对(2)式求导并转化:

$$\frac{a*p}{(1+a*x)}-\frac{(1-p)*b}{(1-b*x)}=0;$$
$$a*p*(1-b*x)=(1+a*x)*(1-p)*b;$$
$$a*p-a*p*x*b=b-p*b+b*a*x-b*a*x*p;$$
$$p*(a+b)-b=a*b*x;$$
$$x=\frac{p*(a+b)-b}{a*b}. \tag{3}$$

显然

$$-\frac{1}{a}<\frac{p*(a+b)-b}{a*b}<\frac{1}{b}.$$

满足最佳资金比例的约束条件. 故(3)式即为假设 1 下的最优解. 定理 1 成立.

**推论 1**　盈利($a$)和亏损($b$)绝对值相对大小悬殊时的最佳资金管理比例(类似于彩票多次投注,每次投注额的问题)

$$\lim_{a\to\infty} x=\frac{p}{b};\qquad \lim_{b\to\infty} x=\frac{p-1}{a}.$$

**推论 2**　本章提及的试验中的最优投资比例为 0.2,在此比例下最可能的试验结果(60 胜 40 负)得到的最终金额约为 749 元.

将 $a=1$、$b=1$、$p=0.6$ 代入(3)式,得:$x=0.2$,即每次投资 20 %为最佳投资比例. 再将 $x=0.2$、$a=1$、$b=1$、$p=0.6$ 代入

$$r=p*\ln(1+x*a)+(1-p)*\ln(1-x*b),$$

得 $r=0.0201$②所以按每次投资 20 %投资 100 次最有可能的收益率为

$$e^{100*0.0201}-1=6.4899,$$

即最后的资金最可能为 749 元. 对于有限次的投资模型(即 $n$ 有限),采用本投资策略能使最有可能出现的投资结果最优. 因此这种资金管理策略的优势在于:使得投资者最有可能面临的结果是最好的结果.

## 3　连续期的投资模型

以上假定投资品种的收益服从二项分布,因而不具有普遍性,因而本节考虑将其扩展到更普遍的条件

① 此处结果类似利息理论中的连续复利亦称利息力的含义,连续复利的基本公式为:

$$r^{*}=\ln(1+r)$$

其中 $r$ 为某段时间内的利率,$r^{*}$ 为该段时间内的连续利率. 在[4]中两点分布中的连续收益率公式即可写为:

$$r=p*\ln(1+x*a)+(1-p)*\ln(1-x*b)$$

所有定义如前.

② 另将 $a=1$、$b=1$、$x=1$ 代入,得到连续收益率为负无穷,显然是导致资产最终为零得策略,应摒弃该策略.

下. 现假设投资品种的价格连续波动,且服从几何布朗运动. 即

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}z,$$

其中 $S$ 为价格,$\mathrm{d}z = \varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$. 由[5]知,连续的布朗运动可以用二叉树模型来逼近. 使得在投资品种的价格变化转化为我们上节讨论的二项分布的形式价格 $s$ 在每一个时间长度为 $\Delta t$ 的时间内,以概率 $p$ 上升到 $uS$,以概率 $1-p$ 下降到 $dS$. 其中

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}};$$

$$d = \frac{1}{u};$$

$$p = \frac{\mathrm{e}^{\mu\Delta t} - d}{u - d}.$$

即若正向投资,当价格上升时,投资者的获利为 $a = u - 1$ 倍,价格下降时,投资着的损失为 $b = 1 - d$ 倍. 将 $p, a, b$ 代入上节资金管理的公式可得:

$$x = \frac{\mathrm{e}^{\mu\Delta t} - 1}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1/\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - 2}. \tag{4}$$

因此,通过二叉树模型将服从布朗运动的价格过程转化为二项分布的极限,最终得出上式为常规假设下的最优资金管理比例的一种近似求解方法.

## 4 多变量模型

投资品种由原来的一个变为两个,设分别为品种 $X$ 和品种 $Y$,依然假设品种 $X$ 和品种 $Y$ 各自在单位时间内的收益率服从两点分布. 而且两个品种之间的收益存在一定的相关性.

现假设投资活动满足如下假设2:

· 起始总资金量为1元;

· 投资次数为 $n$,在不破产的前提下,投资可无限次进行;

· 单独投资品种 $X$ 成功概率设为变量 $p_1$,失败概率则为 $1-p_1$;

· 投资品种 $X$ 成功的收益为本金的 $a_1$ 倍,失败的损失为本金的 $b_1$ 倍;

· 单独投资品种 $Y$ 成功概率设为变量 $p_2$,失败概率则为 $1-p_2$;

· 投资品种 $X$ 成功的收益为本金的 $a_2$ 倍,失败的损失为本金的 $b_2$ 倍;

· 投资品种 $X$ 和 $Y$ 的收益率之间存在一定的相关性,假设其相关系数为 $c$.

若投资者同时投资两个品种,每单位时间结算时就会面临4种可能的情形:

1. $X$ 品种投资成功,$Y$ 品种投资成功; 2. $X$ 品种投资成功,$Y$ 品种投资失败;

3. $X$ 品种投资失败,$Y$ 品种投资成功; 4. $X$ 品种投资失败,$Y$ 品种投资失败.

并假定他们对应的客观概率分别为:$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$. 根据假设,它们的值应该由下面的方程组来决定

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1, \tag{5}$$

$$\pi_1 + \pi_2 = p_1, \tag{6}$$

$$\pi_1 + \pi_3 = p_2, \tag{7}$$

$$\pi_1 a_1 a_2 - \pi_2 a_1 b_2 - \pi_3 b_1 a_2 + \pi_4 b_2 a_2 - (p_1 a_1 - (1-p_1) b_1)(p_2 a_2 - (1-p_2) b_2) = c\sqrt{p_1(1-p_1)(a_1+b_1)^2 p_2(1-p_2)(a_2+b_2)^2}. \tag{8}$$

根据有关线性方程组的解的理论,$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 有且仅有唯一的解.

同时这四种不同情形对应的收益率分别为:

1. $1 + a_1 x + a_2 y$, 2. $1 + a_1 x - b_2 y$,

3. $1 - b_1 x + a_2 y$, 4. $1 - b_1 x - b_2 y$.

设实际投资活动中它们的在总共 $n$ 次投资中出现的次数分别为 $k_1, k_2, k_3, k_4$,显然有 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$.

所以 $n$ 次投资结束时,投资者的收益率为:

$$(1+a_1x+a_2y)^{k_1} * (1+a_1x-b_2y)^{k_2} * (1-b_1x+a_2y)^{k_3} * (1-b_1x-b_2y)^{k_4}. \tag{9}$$

平均到每次,求资金管理的最优比例就转化为找到合适的 $x$ 和 $y$ 的优化问题:

$$\max(1+a_1x+a_2y)^{\frac{k_1}{n}} * (1+a_1x-b_2y)^{\frac{k_2}{n}} * (1-b_1x+a_2y)^{\frac{k_3}{n}} * (1-b_1x-b_2y)^{\frac{k_4}{n}}. \tag{10}$$

同样依据大数定律,当 $n\to\infty$,

$$k_1/n\to\pi_1,\ k_2/n\to\pi_2,\ k_3/n\to\pi_3,\ k_4/n\to\pi_4.$$

类似于定理 1 的推导过程:

$$\begin{aligned}\max r = {} & \pi_1\ln(1+a_1x+a_2y)+\pi_2\ln(1+a_1x-b_2y)+\\ & \pi_3\ln(1-b_1x+a_2y)+\pi_4\ln(1-b_1x-b_2y).\end{aligned} \tag{11}$$

为得到使得 $r$ 取最大值的 $x$ 和 $y$,令 $r$ 分别对 $x$ 和 $y$ 求导有:

$$\frac{a_1\pi_1}{1+a_1x+a_2y}+\frac{a_1\pi_2}{1+a_1x-b_2y}-\frac{b_1\pi_3}{1-b_1x+a_2y}-\frac{b_1\pi_4}{1-b_1x-b_2y}=0;$$

$$\frac{a_2\pi_1}{1+a_1x+a_2y}-\frac{b_2\pi_2}{1+a_1x-b_2y}+\frac{a_2\pi_3}{1-b_1x+a_2y}-\frac{b_2\pi_4}{1-b_1x-b_2y}=0.$$

上面两个方程移项化简以后成为两个二元三次方程. 三次方程组可以得到显式解. 即 $x$ 和 $y$ 可以表示为其他变量的函数. 显然,使得 $r$ 最大的 $x$ 和 $y$ 不仅与 $a_1, b_1, a_2, b_2$ 有关还与 $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4$ 有关,得到的 $x$ 和 $y$ 可以表示成 $a, b, p_1, p_2$ 以及 $c$ 的函数. 假若推广到 $N$ 变量模型,依然假设每个品种在单位时间内服从两点分布,则每单位时间结算时收益率有 $2^N$ 种可能的情形. 同样假设这 $N$ 个品种间的协方差阵可由历史数据得出. $N$ 种不同收益率出现的概率可以由线性方程组唯一确定. 最大化 $r$ 的方程将成为由 $N$ 个方程组成的 $N$ 元 $2^N-1$ 次方程组. 当 $N>2$ 时无法得出显式解,只能用数值逼近的方法求出最优投资比例.

## 5　总结

本文从一个有关资金管理的实验出发,提炼出一个简练的多期离散化资金管理模型,得到简洁最优资资金管理比例公式,并证明该结果是概率意义上投资收益最大化的一种资金管理方法,进一步用二叉树分解的方法将这个结果应用到通常假设的连续期的布朗运动中,以及推广到超过一个投资品种的多变量行为. 在此之前的资金管理的相关文献中未发现相同的处理方法.

参考文献:

[1] Ziemba, William. A betting simulation, the mathematics of gambling and investment[J]. Gambling Times, 1987, (80): 46 - 47.

[2] Tharp, Van K. Trade Your Way to Financial Freedom[M]. NY: McGraw-Hill, 2001.

[3] Yan Shijian. Foundation of Probabilities[M]. Beijing: Science Press, 1980.

[4] Friedman C. Conditional value-at-risk in the presence of multiple probability measures[J]. Journal of Risk, 2002, 4(3): 69 - 92.

[5] Hull J M. Options, Futures, and Other Derivatives[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2000.