文章编号: 1000-6788(2009)06-0059-09

重尾性操作风险的风险价值置信区间的灵敏度

莫建明 [1,2], 周宗放 [1]

(1. 电子科技大学 经济与管理学院, 成都 610054; 2. 四川交通职业技术学院, 成都 611130)

摘　要 根据操作风险价值不确定度的合成机理, 通过对重尾性操作风险价值解析解的分析, 导出高置信度下重尾性操作风险价值的标准不确定度及置信区间. 进而以弹性分析方法对该置信区间的灵敏度进行理论探讨和实例分析后发现: 随尾指数的增大, 操作风险价值及其置信区间长度同时增大, 且在高置信度下, 尾指数是影响操作风险价值及其置信区间长度灵敏度的关键参数. 据此, 可将尾指数作为操作风险的监控参数, 操作风险监管资本的提取方式可改进为: 以操作风险价值的某一置信区间为监管资本的控制范围. 这在理论上进一步完善了损失分布法在操作风险度量中的应用, 并使操作风险的管理更加合理.

关键词　操作风险; 操作风险价值的置信区间; 不确定性传递理论; 弹性理论

中图分类号　F830　　　**文献标志码**　A

Confidence intervals' sensitivity of heavy-tailed operational VaR

MO Jian-ming[1,2], ZHOU Zong-fang[1]

(1. School of Management and Economics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China;
2. Sichuan Vocational and Technical College of Communications, Chengdu 611130, China)

Abstract Based on the synthesis mechanism of the operational VaR's uncertainty, this paper makes an analysis of the solutions of heavy-tailed operational VaR. And the standard uncertainty and the confidence intervals of operational VaR are obtained at high confidence levels. By the theory research and the numerical example analysis of confidence intervals' sensitivity on the basis of elasticity analysis method, a rule is discovered that the operational VaR and the confidence intervals' length increase with the tail-index, and the tail-index is a key parameter that influences the operational VaR and the confidence intervals' length at high confidence levels. Accordingly, the tail-index can be regarded as a parameter of monitoring the operational risk, and the extraction method of regulatory capital can be mended that the regulatory capital is controlled in a certain confidence interval of operational VaR. This research improves the application of the loss distribution approach to the operational risk measurement, and makes the management of operational risk more reasonable.

Keywords operational risk; confidence intervals of operational VaR; uncertainty propagation theory; elasticity theory

---

收稿日期: 2008-03-10

资助项目: 国家自然科学基金 (70671017); 四川省教育厅 (08SA082)

作者简介: 莫建明 (1970–), 男, 讲师, 博士研究生, 研究方向: 金融工程, 金融风险; 周宗放 (1950–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 信用风险管理, 金融工程, 运筹优化.

1 引言

在 2004 年 6 月发布的新巴塞尔协议正稿[1] 中, 巴塞尔委员会将操作风险列为与信用风险和市场风险并重的三大风险之一, 要求其成员国从 2006 底开始为操作风险提取监管资本. 该协议提出了三种度量方法, 即基本指标法、标准法、高级计量法 (AMA), 这三种方法的复杂性和风险敏感度依次递增.

从巴塞尔委员会所进行的数量影响研究 (四) 的调查结果[2] 看, 目前有 58.33%的金融机构使用 AMA 中的损失分布法[3](Loss Distribution Approach, LDA) 来度量操作风险. 根据巴塞尔委员会的定义, LDA 是指, 在操作损失事件的损失频率和损失强度有关假设基础上, 对业务线/损失事件类型矩阵中的每一类操作损失的损失频率分布和损失强度分布复合成的复合分布分别进行估计, 从而计算出某一时期一定置信度 α 下该类型操作损失复合分布的操作风险价值 (Operational VaR, $OpVaR(\alpha)$) 的方法. 需要指出的是, 由于包括卷积公式算法、稀疏向量算法以及 Panjer 递推等在内的 LDA 的计算方法不能测度 $OpVaR(\alpha)$ 的精度, 从而也不能估计 $OpVaR(\alpha)$ 的置信区间. 对该问题的已有研究大致可概括为如下两个方面.

第一, 研究主要探求 $OpVaR(\alpha)$ 的解析解. LDA 下 $OpVaR(\alpha)$ 的解析解在一般分布情况下是无法获得的, 但在操作损失强度分布呈重尾性 (重尾性操作风险) 的条件下, 当估计该复合分布尾部的 $OpVaR(\alpha)$ 时, LDA 下的 $OpVaR(\alpha)$ 的解析解是存在的[4−6]. 操作风险监管资本 ($OpVaR(\alpha)$) 的度量正好满足 $OpVaR(\alpha)$ 解析解存在的条件, 这是因为: 其一, 已有实证研究表明, 操作损失强度为重尾性分布, 尤其很接近于 Pareto 分布[7−8]; 其二, 新巴塞尔协议规定, 监管资本的度量是在置信度 α 为 99.9%条件下来进行, 即是估计复合分布尾部的 $OpVaR(\alpha)$. 因此, 金融机构当前的重尾性操作风险的监管资本 $OpVaR(\alpha)$ 的解析解是存在的.

第二, 研究主要探究 $OpVaR(\alpha)$ 的精度问题. 首先, 探讨如何提高 $OpVaR(\alpha)$ 精度. 该研究以损失样本门槛 (threshold) 和损失样本不一致性为研究重点[9−13]. 然后, 探究 $OpVaR(\alpha)$ 精度的度量机理. 文献 [14] 提出 $OpVaR(\alpha)$ 的精度可根据不确定性传递理论进行度量. 在上述文献研究的基础上, 文献 [15] 进一步研究了 $OpVaR(\alpha)$ 不确定度[1]的合成机理: 损失样本分布特征参数的不确定度经不确定性传递系数的传递, 合成 $OpVaR(\alpha)$ 的不确定度. 由于损失样本存在不一致性且其门槛具有差异, 这使所估计的分布特征参数的不确定度偏大. 特别是当估计重尾性操作风险尾部的 $OpVaR(\alpha)$ 时, 损失样本的不一致性及其门槛差异将使 $OpVaR(\alpha)$ 的合成不确定度会偏大很多. 进一步, 文献 [15] 假设操作损失强度为 Weibull 分布, 在 $OpVaR(\alpha)$ 的解析解研究和 $OpVaR(\alpha)$ 不确定度的合成机理研究的基础上, 得到 $OpVaR(\alpha)$ 的置信区间, 并对该置信区间的敏感性进行了仿真分析.

然而, 文献 [15] 有两方面尚待完善: 一方面, 其操作损失强度的分布假设在目前不常用. Weibull 分布属于经典区组模型, 其最大缺点是不能充分利用损失样本中包含的极值信息. 因此, 在目前操作损失样本量比较少的情况下, Weibull 分布的应用比较少. 另一方面, 利用仿真技术分析 $OpVaR(\alpha)$ 的置信区间, 所得结论不具有一般性, 难以令人信服. 针对上述问题, 本文以目前操作损失样本的实证研究所得分布模型 (操作损失强度为 Pareto 分布) 为分布假设, 对重尾性操作风险的 $OpVaR(\alpha)$ 置信区间及其灵敏度进行理论探讨和实例分析. 首先, 通过分析高置信度下 $OpVaR(\alpha)$ 的解析解, 度量出 $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度, 并估计 $OpVaR(\alpha)$ 的置信区间; 然后, 对该置信区间的灵敏度进行理论探讨, 并以文献 [7] 实证研究所得操作损失频数分布参数值和损失强度分布特征参数值为依据, 对该灵敏度进行实例分析; 最后, 对所得结论的现实意义进行了讨论.

2 操作风险价值的标准不确定度度量及置信区间估计

在操作损失强度为重尾性分布的情况下, 当以 LDA 度量该操作风险复合分布的尾部风险时, 在高置信

1. 根据《测量不确定度评定与表示》(JJF1059-1999), 测量不确定度为: “表征合理地赋予被测量之值的分散性, 与测量结果相联系的参数”, “此参数可以是诸如标准差或其倍数, 或说明了置信水准的区间的半宽度”, “以标准差表示的测量不确定度” 为标准不确定度. “当测量结果是由若干个其他量的值求得时, 按其他各量的方差或 (和) 协方差算得的标准不确定度” 称为合成标准不确定度.

度 α 下 $OpVaR(\alpha)$ 的解析解如下[4−6]:

$$OpVaR_{\Delta t}(\alpha) \cong F^{-1}\left(1-\frac{1-\alpha}{EN(\Delta t)}\right) \tag{1}$$

式中: Δt 表示估计 $OpVaR(\alpha)$ 的目标期间; α 表示由操作损失强度分布和损失频率分布复合成的复合分布的置信度; $F(\cdot)$ 表示操作损失强度累积分布函数; $EN(\Delta t)$ 表示当目标期间为 Δt 时操作损失频数的期望值.

根据文献 [7–8] 的实证研究结果, 设操作损失强度为 Pareto 分布:

$$F(x)=1-\left(1+\xi\frac{x}{\eta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad x>0,\xi>0,\eta>0 \tag{2}$$

式中: x 表示操作损失强度; η 表示 Pareto 分布尺度参数; ξ 表示 Pareto 分布形状参数.

在广义 Pareto 分布中, 当 $\xi=0$ 时, 为指数分布 (Pareto I 型), 当 $\xi>0$ 时, 为 Pareto 分布 (Pareto II 型), 当 $\xi<0$ 时, 为 Beta 分布 (Pareto III 型). 其中 Pareto 分布 (Pareto II 型) 是重尾性分布 (其分布的密度函数以幂函数的速度衰减至 0)[16], 其高阶矩 (大于 $1/\xi$ 阶的矩) 不存在. 在 (2) 式中, 尺度参数 η 表明 Pareto 分布的离散程度, η 越大, 分布的离散程度越大; 形状参数 ξ 表明 Pareto 分布尾部厚度以及拖尾的长度, 又称为尾指数, ξ 越大, 分布拖尾越长, 尾部越厚[17].

将 (2) 式代入 (1) 式, 为讨论方便, 以符号 Λ 替换 $EN(\Delta t)$, 可得

$$OpVaR_{\Delta t}(\alpha) \cong \frac{\eta}{\xi}\left[\left(\frac{\Lambda}{1-\alpha}\right)^{\xi}-1\right], \quad \xi>0,\eta>0,\Lambda\geq 0 \tag{3}$$

显然, 要使 (3) 式有意义, 须有 $(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}>1$ 成立. 又因 $\xi>0$ 且 ξ 不趋于 0(当 ξ 趋于 0 时, 为指数分布), 所以 $\Lambda>1-\alpha$.

根据 $OpVaR(\alpha)$ 不确定度的合成机理[14−15,18], 特征参数 ξ、η 与 Λ 的标准不确定度经不确定性传递系数的传递, 合成 $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度. 因此, 当不考虑 ξ, η 与 Λ 之间的相关性时, 可得 $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度 (即标准差) 如下:

$$\sigma_{OpVaR(\alpha)}=\sqrt{\left(\frac{\partial OpVaR}{\partial\eta}\right)^2\sigma_\eta^2+\left(\frac{\partial OpVaR}{\partial\Lambda}\right)^2\sigma_\Lambda^2+\left(\frac{\partial OpVaR}{\partial\xi}\right)^2\sigma_\xi^2} \tag{4}$$

式中: $\frac{\partial OpVaR}{\partial\xi}$、$\frac{\partial OpVaR}{\partial\eta}$、$\frac{\partial OpVaR}{\partial\Lambda}$ 分别表示参数 ξ、η、Λ 的不确定性传递系数. σ_ξ、σ_η 及 σ_Λ 分别表示 ξ、η 与 Λ 的标准不确定度 (即标准差).

由 (4) 式所得 $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度可知, $OpVaR(\alpha)$ 的置信区间为 $[OpVaR(\alpha)\pm\tau\sigma_{OpVaR}]$, 其中 τ 为某一置信度下的置信系数. 可见, $OpVaR(\alpha)$ 的置信区间受两方面因素影响: 一方面是 $OpVaR(\alpha)$ 的点估计值, 决定置信区间的中心位置. $OpVaR(\alpha)$ 越大, 操作风险越大. 另一方面是置信区间长度, 决定 $OpVaR(\alpha)$ 的估计精度, 由两个量决定: 置信系数 τ 和 $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度. 以下将分别对 $OpVaR(\alpha)$ 的点估计值及其置信区间长度的灵敏度进行探讨.

3 操作风险价值点估计值及其灵敏度分析

由 (3) 式可知, 在置信度 α 一定的情况下, $OpVaR(\alpha)$ 由特征参数 (ξ、η、Λ) 决定.ξ、η、Λ 的大小及变化范围差异很大, 因此其变动的绝对值 ($\Delta\xi$、$\Delta\eta$、$\Delta\Lambda$) 所引起的 $OpVaR(\alpha)$ 的变动 ($\Delta OpVaR(\alpha)$) 不能充分反应特征参数对 $OpVaR(\alpha)$ 影响的灵敏度. 只有特征参数的变动程度 ($\Delta\xi/\xi$、$\Delta\eta/\eta$、$\Delta\Lambda/\Lambda$) 所引起的 $OpVaR(a)$ 变动程度 ($\Delta OpVaR(\alpha)/OpVaR(\alpha)$), 才能准确地表示 $OpVaR(\alpha)$ 相对于特征参数 (ξ、η、Λ) 变动的灵敏度. 根据弹性理论: 弹性表示影响某一因变量的因素发生变化时, 该因变量的变动程度. 因此, 以 $OpVaR(\alpha)$ 的特征参数弹性来表示 $OpVaR(\alpha)$ 相对于特征参数变动的灵敏度.

定义 1 $OpVaR(\alpha)$ 的 ξ、η 及 Λ 弹性分别为

$$E_\xi=\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta OpVaR(\alpha)/OpVaR(\alpha)}{\Delta\xi/\xi}, E_\eta=\lim_{\Delta\eta\to 0}\frac{\Delta OpVaR(\alpha)/OpVaR(\alpha)}{\Delta\eta/\eta},$$

$$E_\Lambda=\lim_{\Delta\Lambda\to 0}\frac{\Delta OpVaR(\alpha)/OpVaR(\alpha)}{\Delta\Lambda/\Lambda}$$

即 $OpVaR(\alpha)$ 变化的百分比与 ξ 、η 、Λ 变化的百分比的比值.

3.1 理论探讨

将 (3) 式代入定义 1, 可得

$$E_\eta = 1 \tag{5}$$

$$E_\xi = \frac{(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi}{(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi - 1} \times \xi ln \frac{\Lambda}{1-\alpha} - 1 \tag{6}$$

$$E_\Lambda = \frac{(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi}{(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi - 1} \times \xi \tag{7}$$

由上式可知, 1) E_η 为单位弹性. 表明 $OpVaR(\alpha)$ 相对于损失强度分布离散程度变动的灵敏度始终为单位 1, 即 η 变动 1%, $OpVaR(\alpha)$ 变动始终为 1%. 2) E_ξ、E_Λ 都与 η 无关. 表明损失强度分布离散程度的变动不影响 $OpVaR(\alpha)$ 相对于特征参数 ξ、Λ 变动的灵敏度.

命题 1 在前述假定下, 1) $E_\xi > 0, E_\Lambda > 0$, 且当 $\alpha \to 1$ 时, $E_\xi \to +\infty, E_\Lambda \to \xi$. 2) 当 $1-\alpha < \Lambda < e(1-\alpha)$ 时, $E_\xi < E_\Lambda$; 若 $\Lambda > e(1-\alpha)$, 则, 当 $E_\xi \geq [\ln \frac{\Lambda}{(1-\alpha)e}]^{-1}$ 时, $E_\xi \geq E_\Lambda$, 反之, $E_\xi < E_\Lambda$. 3) $\frac{\partial E_\xi}{\partial \alpha} > 0$, $\frac{\partial E_\Lambda}{\partial \alpha} < 0$.

证明 首先证明 1). 根据 (6) 式, 令 $t = (\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi$, 则 $E_\xi = \frac{t\ln t - t + 1}{t-1}$; 记 $f(t) = t\ln t - t + 1$, 则 $f'(t) = \ln t$; 因 $t > 1$(前述分析结果), 则 $f'(t) > 0$, 即 $f(t)$ 单调递增; 当 $t = 1$ 时, $f(t) = 0$; 因 $t > 1$, 则 $f(t) > 0$; 因此, $E_\xi = \frac{t\ln t - t + 1}{t-1} > 0$. 再根据 (6) 式, $\lim\limits_{\alpha\to 1} E_\xi = +\infty$.

根据 (7) 式, 因 $(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi > 1$ 且 $\xi > 0$, 所以 $E_\Lambda > 0$. 再根据 (7) 式, $\lim\limits_{\alpha\to 1} E_\Lambda = \xi$.

对于 2), 若 $\ln \frac{\Lambda}{1-\alpha} \leq 1$, 即 $\Lambda < e(1-\alpha)$, 因 $E_\Lambda > 0$, 则 $E_\Lambda \ln \frac{\Lambda}{1-\alpha} \leq E_\Lambda$, 所以 $E_\Lambda \ln \frac{\Lambda}{1-\alpha} - 1 \leq E_\Lambda - 1 < E_\Lambda$, 由 (5)–(6) 式, 则有 $E_\xi = E_\Lambda \ln \frac{\Lambda}{1-\alpha} - 1 < E_\Lambda$, 因此, 当 $1-\alpha < \Lambda < e(1-\alpha)$ 时, $E_\xi < E_\Lambda$. 由 $E_\xi - E_\Lambda = E_\xi[1-(\ln \frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}] - (\ln \frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}$ 知: 若 $1-(\ln \frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1} > 0$, 即 $\Lambda > e(1-\alpha)$, 则, 当 $E_\xi \geq [\ln \frac{\Lambda}{(1-\alpha)e}]^{-1}$ 时, $E_\xi \geq E_\Lambda$, 反之, $E_\xi < E_\Lambda$.

对于 3), 根据 (6) 式, 因 $(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi > 1$, 则 $\frac{\partial E_\xi}{\partial \alpha} > 0$. 根据 (7) 式同理可得, $\frac{\partial E_\Lambda}{\partial \alpha} < 0$.

命题 1 表明: 随 ξ、Λ 递增, $OpVaR(\alpha)$ 递增. 当 α 趋于 1 时, $OpVaR(\alpha)$ 相对于 ξ 变动的灵敏度趋于 $+\infty$, 而相对于 Λ 变动的灵敏度趋于 ξ. 由于随置信度 α 递增, $OpVaR(\alpha)$ 相对于 ξ 变动的灵敏度递增, 但相对于 Λ 变动的灵敏度递减. 由此, α 越大, 两者差值 $E_\xi - E_\Lambda$ 越大, $OpVaR(\alpha)$ 受 Λ 变动的影响越小, 而受 ξ 变动的影响越大. 当 α 趋于 1 时, $OpVaR(\alpha)$ 的灵敏度主要受 ξ 的影响. 因此, $OpVaR(\alpha)$ 随 ξ 的递增而递增, 在高置信度 α 下, ξ 是影响 $OpVaR(\alpha)$ 灵敏度的关键参数.

3.2 实例分析

Marco Moscadelli [7] 对巴塞尔委员会所收集的操作损失数据进行了实证研究, 并得到操作损失频数分布参数值和损失强度分布特征参数值. 据此, 对命题 1 进行实例分析, 并设 $\alpha = 99.9\%$, 得表 1.

表 1 $\alpha = 99.9\%$ **时** $OpVaR(\alpha)$ **的特征参数弹性及其灵敏度**

业务线	Λ	η	ξ	E_ξ	E_Λ	E_η	$\frac{\partial E_\xi}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial E_\Lambda}{\partial \alpha}$
BL1	1.80	774	1.19	7.9209	1.1902	1	1188.9660	–0.1894
BL2	7.40	254	1.17	9.4241	1.1700	1	1169.7250	–0.0407
BL3	13.00	233	1.01	8.5681	1.0101	1	1009.4011	–0.0714
BL4	4.70	412	1.39	10.7530	1.3900	1	1389.9185	–0.0152
BL5	3.92	107	1.23	9.1782	1.2300	1	1229.6599	–0.0575
BL6	4.29	243	1.22	9.2033	1.2200	1	1219.6670	–0.0552
BL7	2.60	314	0.85	5.6921	0.8511	1	842.6821	–0.9061
BL8	8.00	124	0.98	7.8088	0.9801	1	978.8285	–0.1437

注: 1. 表中参数 η、ξ、Λ 的数值来自文献 [7]; 2. 业务线 BL1-BL8 的分类是以文献 [1] 为分类标准.

由表 1 知:

1) $(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi$ >1 且 $\Lambda > 1-\alpha$ 成立, 因此 (3) 式有意义;

2) $E_\xi > 0$, $E_\Lambda > 0$, 表明随 ξ、Λ 递增, $OpVaR(\alpha)$ 递增;

3) E_η =1, 即 E_η 为单位弹性, 表明 $OpVaR(\alpha)$ 相对于损失强度分布离散程度变动的灵敏度始终为单位 1, 即 η 变动 1% , $OpVaR(\alpha)$ 变动始终为 1% ;

4) $E_\Lambda \cong \xi$, 因 $\alpha = 99.9\%$, 则 $E_\Lambda \to \xi$. 这表明在高置信度 α 下, $OpVaR(\alpha)$ 相对于 Λ 变动的灵敏度由 ξ 的大小决定;

5) 因 Λ 远大于 $e(1-\alpha)$ 且 E_ξ 远大于 $[\ln \frac{\Lambda}{(1-\alpha)e}]^{-1}$, 故 E_ξ 远大于 E_Λ, 表明 $OpVaR(\alpha)$ 相对于 ξ 变动的灵敏度远大于其相对于 Λ 变动的灵敏度;

6) $\frac{\partial E_\xi}{\partial \alpha} > 0$, $\frac{\partial E_\Lambda}{\partial \alpha} < 0$. 这表明 $OpVaR(\alpha)$ 相对于 ξ 变动的灵敏度随置信度 α 的递增而递增, 但相对于 Λ 变动的灵敏度随置信度 α 的递增而递减, 这使得在高置信度 α 下, $OpVaR(\alpha)$ 灵敏度主要受 ξ 变动的影响.

由实例分析可知, 当 $\alpha = 99.9\%$ 时, $OpVaR(\alpha)$ 随 ξ 递增而递增, ξ 是影响 $OpVaR(\alpha)$ 灵敏度的关键参数. 即只要控制了尾指数, 也就控制了操作风险.

4　操作风险价值置信区间长度及其灵敏度分析

操作风险价值置信区间的长度由两个量决定: 置信系数 τ 和 $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度. 置信系数 τ 由主观设定的置信度决定; $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度由特征参数标准不确定度和不确定性传递系数决定. 不确定性传递系数越大, $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度越大, 其置信区间越长. 因此, 在特征参数标准不确定度一定的条件下, 不确定性传递系数相对于特征参数 (ξ、η、Λ) 变化的灵敏度, 反应了 $OpVaR(\alpha)$ 置信区间的长度相对于特征参数 (ξ、η、Λ) 变化的灵敏度. 同前理, 以特征参数的变动程度 ($\Delta\xi/\xi$、$\Delta\eta/\eta$、$\Delta\Lambda/\Lambda$) 所引起的特征参数不确定性传递系数的变动程度 ($\Delta c_\xi/c_\xi$、$\Delta c_\eta/c_\eta$、$\Delta c_\Lambda/c_\Lambda$), 来表示特征参数不确定性传递系数相对于特征参数 (ξ、η、Λ) 变动的灵敏度, 即 $OpVaR(\alpha)$ 置信区间的长度相对于特征参数 (ξ、η、Λ) 变化的灵敏度.

定义 2　不确定性传递系数是指特征参数 (ξ、η、Λ) 的标准不确定度 (σ_η、σ_ξ 及 σ_Λ) 合成到 $OpVaR(\alpha)$ 的标准不确定度中去的比例. 特征参数 ξ、η、Λ 的不确定性传递系数分别为

$$c_\xi = \frac{\partial OpVaR(\alpha)}{\partial \xi}, \quad c_\eta = \frac{\partial OpVaR(\alpha)}{\partial \eta}, \quad c_\Lambda = \frac{\partial OpVaR(\alpha)}{\partial \Lambda}$$

将 (3) 式代入定义 2, 可得

$$c_\eta = \frac{1}{\xi}\left[\left(\frac{\Lambda}{1-\alpha}\right)^\xi - 1\right] \tag{8}$$

$$c_\Lambda = \frac{\eta}{\Lambda}\left(\frac{\Lambda}{1-\alpha}\right)^\xi \tag{9}$$

$$c_\xi = \frac{\eta}{\xi}\left(\frac{\Lambda}{1-\alpha}\right)^\xi \ln\left(\frac{\Lambda}{1-\alpha}\right) - \frac{\eta}{\xi^2}\left[\left(\frac{\Lambda}{1-\alpha}\right)^\xi - 1\right] \tag{10}$$

4.1　理论探讨

定义 3　c_η 的特征参数 ξ、η 及 Λ 弹性为

$$E_\xi^{c_\eta} = \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta c_\eta/c_\eta}{\Delta\xi/\xi}, \quad E_\eta^{c_\eta} = \lim_{\Delta\eta\to 0}\frac{\Delta c_\eta/c_\eta}{\Delta\eta/\eta}, \quad E_\Lambda^{c_\eta} = \lim_{\Delta\Lambda\to 0}\frac{\Delta c_\eta/c_\eta}{\Delta\Lambda/\Lambda}$$

将 (8) 式代入定义 3 可得, 1)$E_\eta^{c_\eta} = 0$, 即损失强度分布离散程度的变动不影响 c_η 的大小; 2)$E_\xi^{c_\eta} = E_\xi$, $E_\Lambda^{c_\eta} = E_\Lambda$, 即 $E_\xi^{c_\eta}$、$E_\Lambda^{c_\eta}$ 的变动规律同命题 1. 因此, c_η 随 ξ 的递增而递增, 且在高置信度 α 下, ξ 是影响 c_η 灵敏度的关键参数.

定义 4　c_Λ 的特征参数 ξ、η 及 Λ 弹性为

$$E_\xi^{c_\Lambda} = \lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta c_\Lambda/c_\Lambda}{\Delta\xi/\xi}, \quad E_\eta^{c_\Lambda} = \lim_{\Delta\eta\to 0}\frac{\Delta c_\Lambda/c_\Lambda}{\Delta\eta/\eta}, \quad E_\Lambda^{c_\Lambda} = \lim_{\Delta\Lambda\to 0}\frac{\Delta c_\Lambda/c_\Lambda}{\Delta\Lambda/\Lambda}$$

将 (9) 式代入定义 4, 可得

$$E_{\eta}^{c_\Lambda}=1 \tag{11}$$

$$E_{\xi}^{c_\Lambda}=\ln\left(\frac{\Lambda}{1-\alpha}\right)^{\xi} \tag{12}$$

$$E_{\Lambda}^{c_\Lambda}=\xi-1 \tag{13}$$

由上式可知, 1) $E_{\eta}^{c_\Lambda}$ 为单位弹性. 即 c_Λ 相对于损失强度分布离散程度变动的灵敏度始终为单位 1, η 变动 1%, c_Λ 变动始终为 1%; 2) $E_{\xi}^{c_\Lambda}$ 与 η 无关, 即损失强度分布离散程度的变动不影响 c_Λ 相对于尾指数变动的灵敏度; 3) $E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$ 与 η、Λ、α 无关, 只与 ξ 有关, 即不仅损失强度分布离散程度和损失频数的变动不影响 c_Λ 相对于频数参数变动的灵敏度, 而且置信度 α 的变动也不会影响该灵敏度.

命题 2 在前述假定下, 1) $E_{\xi}^{c_\Lambda}>0$, 当 $\alpha\to 1$ 时, $E_{\xi}^{c_\Lambda}\to+\infty$; 当 $\xi\geq 1$ 时, $E_{\Lambda}^{c_\Lambda}\geq 0$, 反之, $E_{\Lambda}^{c_\Lambda}<0$. 2) 当 $\Lambda>e(1-\alpha)$ 时, $E_{\xi}^{c_\Lambda}\geq E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$; 若 $1-\alpha<\Lambda<e(1-\alpha)$, 则, 当 $\xi\leq[\ln\frac{(1-\alpha)e}{\Lambda}]^{-1}$ 时, $E_{\xi}^{c_\Lambda}\geq E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$, 反之, $E_{\xi}^{c_\Lambda}<E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$. 3) $\frac{\partial E_{\xi}^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}>0$, $\frac{\partial E_{\Lambda}^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}=0$.

证明 首先证明 1). 因 $(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}>1$, 则由 (12) 式可得 $E_{\xi}^{c_\Lambda}>0$. 再根据 (12) 式, $\lim\limits_{\alpha\to 1}E_{\xi}^{c_\Lambda}=+\infty$. 由 (13) 式, 当 $\xi\geq 1$ 时, $E_{\Lambda}^{c_\Lambda}\geq 0$, 反之, $E_{\Lambda}^{c_\Lambda}<0$.

对于 2), 由 $E_{\xi}^{c_\Lambda}-E_{\Lambda}^{c_\Lambda}=\xi(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha}-1)+1$ 知: 若 $\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha}-1\geq 0$, 即 $\Lambda>e(1-\alpha)$, 因 $\xi>0$, 则 $\xi(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha}-1)+1>0$, 即有 $E_{\xi}^{c_\Lambda}>E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$; 若 $\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha}-1<0$ 且 $\Lambda>1-\alpha$, 即 $1-\alpha<\Lambda<e(1-\alpha)$, 则, 当 $\xi\leq[\ln\frac{(1-\alpha)e}{\Lambda}]^{-1}$ 时, $E_{\xi}^{c_\Lambda}\geq E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$, 反之, $E_{\xi}^{c_\Lambda}<E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$.

对于 3), 由 (12) 式可得, $\frac{\partial E_{\xi}^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}>0$. 由 (13) 式可得, $\frac{\partial E_{\Lambda}^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}=0$.

由命题 2 表明: c_Λ 随 ξ 的递增而递增; 当置信度 α 趋于 1 时, c_Λ 相对于 ξ 变动的灵敏度趋于 $+\infty$, 且大于相对于 Λ 变动的灵敏度; c_Λ 相对于 ξ 变动的灵敏度随置信度 α 的递增而递增, 但其 c_Λ 相对于 Λ 变动的灵敏度不受 α 变动的影响, 始终等于 $\xi-1$; 由此, 随置信度 α 的递增, 两者的差值 $E_{\xi}^{c_\Lambda}-E_{\Lambda}^{c_\Lambda}$ 也递增, 在高置信度 α 下, c_Λ 的变动主要受 ξ 的影响. 因此, c_Λ 随 ξ 的递增而递增, 且在高置信度 α 下, ξ 是影响 c_Λ 灵敏度的关键参数.

定义 5 c_ξ 的特征参数 ξ、η 及 Λ 弹性为

$$E_{\xi}^{c_\xi}=\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta c_\xi/c_\xi}{\Delta\xi/\xi},E_{\eta}^{c_\xi}=\lim_{\Delta\eta\to 0}\frac{\Delta c_\xi/c_\xi}{\Delta\eta/\eta},E_{\Lambda}^{c_\xi}=\lim_{\Delta\Lambda\to 0}\frac{\Delta c_\xi/c_\xi}{\Delta\Lambda/\Lambda}$$

将 (10) 式代入定义 5, 可得

$$E_{\eta}^{c_\xi}=1 \tag{14}$$

$$E_{\xi}^{c_\xi}=\frac{(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}[\ln(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}]^2}{(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}\ln(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}-(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}+1}-2 \tag{15}$$

$$E_{\Lambda}^{c_\xi}=\frac{\xi(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}\ln(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}}{(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}\ln(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}-(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}+1} \tag{16}$$

由上式可知, 1)$E_{\eta}^{c_\xi}$ 为单位弹性, 表明 c_ξ 相对于损失强度分布离散程度变动的灵敏度始终为单位 1, 即 η 变动 1%, c_ξ 变动始终为 1%; 2)$E_{\xi}^{c_\xi}$、$E_{\Lambda}^{c_\xi}$ 都与 η 无关, 表明损失强度分布离散程度的变动不影响 c_ξ 相对于特征参数 ξ、Λ 变动的灵敏度.

命题 3 在前述假定下, 1) $E_{\xi}^{c_\xi}>0$, $E_{\Lambda}^{c_\xi}>0$, 且当 $\alpha\to 1$ 时, $E_{\xi}^{c_\xi}\to+\infty$, $E_{\Lambda}^{c_\xi}\to\xi$; 2) 当 $1-\alpha<\Lambda<e(1-\alpha)$ 时, $E_{\xi}^{c_\xi}<E_{\Lambda}^{c_\xi}$; 若 $\Lambda>e(1-\alpha)$, 则, 当 $E_{\xi}^{c_\xi}\geq 2[\ln\frac{\Lambda}{(1-\alpha)e}]^{-1}$ 时, $E_{\xi}^{c_\xi}\geq E_{\Lambda}^{c_\xi}$, 反之, $E_{\xi}^{c_\xi}<E_{\Lambda}^{c_\xi}$. 3)$\frac{\partial E_{\xi}^{c_\xi}}{\partial\alpha}>0$, $\frac{\partial E_{\Lambda}^{c_\xi}}{\partial\alpha}<0$.

证明 首先证明 1). 令 $t=(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{\xi}$, 根据 (15) 式, 有 $E_{\xi}^{c_\xi}=\frac{t(\ln t)^2-2(t\ln t-t+1)}{t\ln t-t+1}$; 记 $h(t)=t(\ln t)^2-2(t\ln t-t+1)$, 因 $t>1$, 则 $h'(t)=(\ln t)^2>0$, 即 $h(t)$ 单调递增; 当 $t=1$ 时, $h(t)=0$, 因 $t>1$, 则 $h(t)>0$; 又由命题 1 知 $t\ln t-t+1>0$, 因此 $E_{\xi}^{c_\xi}>0$. 再由 (15) 式可得, $\lim\limits_{\alpha\to 1}E_{\xi}^{c_\xi}=+\infty$. 根据 (16) 式, 因 $t>1$ 且 $t\ln t-t+1>0$, 则 $E_{\Lambda}^{c_\xi}>0$. 再由 (16) 式, $\lim\limits_{\alpha\to 1}E_{\Lambda}^{c_\xi}=\xi$.

对于 2), 由 $E_\xi^{c_\xi}-E_\Lambda^{c_\xi}=E_\xi^{c_\xi}[1-(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}]-2(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}$ 知: 当 $1-(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}<0$ 时, 因 $\Lambda>1-\alpha$ 且 $E_\xi^{c_\xi}>0$, 则 $E_\xi^{c_\xi}[1-(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}]-2(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}<0$, 因此, 当 $1-\alpha<\Lambda<e(1-\alpha)$ 时, $E_\xi^{c_\xi}<E_\Lambda^{c_\xi}$; 若 $1-(\ln\frac{\Lambda}{1-\alpha})^{-1}>0$, 即 $\Lambda>e(1-\alpha)$, 则, 当 $E_\xi^{c_\xi}\geq 2[\ln\frac{\Lambda}{(1-\alpha)e}]^{-1}$ 时, $E_\xi^{c_\xi}\geq E_\Lambda^{c_\xi}$, 反之, $E_\xi^{c_\xi}<E_\Lambda^{c_\xi}$.

对于 3), 根据 (15)−(16) 式, 因 $(\frac{\Lambda}{1-\alpha})^\xi>1$ 且 $\Lambda>1-\alpha$, 则 $\frac{\partial E_\xi^{c_\xi}}{\partial\alpha}>0$, $\frac{\partial E_\Lambda^{c_\xi}}{\partial\alpha}<0$.

命题 3 表明: c_ξ 随 ξ、Λ 递增而递增; 当 α 趋于 1 时, c_ξ 相对于 ξ 变动的灵敏度趋于 $+\infty$, 而相对于 Λ 变动的灵敏度趋于 ξ; 由于随置信度 α 递增, c_ξ 相对于 ξ 变动的灵敏度递增, 但相对于 Λ 变动的灵敏度递减; 由此, 随置信度 α 递增, 两者的差值 $E_\xi^{c_\xi}-E_\Lambda^{c_\xi}$ 也递增, 当 α 趋于 1 时, c_ξ 的变动主要受 ξ 的影响. 因此, c_ξ 随尾指数的递增而递增, 在高置信度 α 下, ξ 是影响 c_ξ 灵敏度的关键参数.

通过对不确定性传递系数灵敏度的理论探讨可知, 在高置信度 α 下, 不确定性传递系数 c_ξ、c_η、c_Λ 都随 ξ 的递增而递增, 且在高置信度 α 下, ξ 是影响 c_ξ、c_η、c_Λ 灵敏度的关键参数, 这意味着 $OpVaR(\alpha)$ 置信区间长度随 ξ 的递增而递增, 且在高置信度 α 下, ξ 是影响 $OpVaR(\alpha)$ 置信区间长度灵敏度的关键参数.

4.2 实例分析

由表 1 中参数 η、ξ、Λ 的数值以及 (11)−(13) 式可得表 2.

表 2 当 $\alpha=99.9\%$ 时频数参数不确定性传递系数的弹性

业务线	$E_\xi^{c_\Lambda}$	$E_\Lambda^{c_\Lambda}$	$E_\eta^{c_\Lambda}$	$\frac{\partial E_\xi^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}$	$\frac{\partial E_\Lambda^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}$	$\frac{\partial E_\eta^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}$
BL1	8.9197	0.19	1	0.0012	0	0
BL2	10.4238	0.17	1	0.0012	0	0
BL3	9.5674	0.01	1	0.001	0	0
BL4	11.7529	0.39	1	0.0014	0	0
BL5	10.1768	0.23	1	0.0012	0	0
BL6	10.2041	0.22	1	0.0012	0	0
BL7	6.6838	–0.15	1	0.0009	0	0
BL8	8.8075	–0.02	1	0.001	0	0

由表 2 可知,

1) $E_\xi^{c_\Lambda}>0$, c_Λ 随 ξ 递增而递增;

2) 当 $\xi\geq 1$(即 BL1-BL6) 时, $E_\Lambda^{c_\Lambda}\geq 0$, c_Λ 随 Λ 递增而递增; 当 $\xi<1$(即 BL7-BL8) 时, $E_\Lambda^{c_\Lambda}<0$, c_Λ 随 Λ 递增而递减;

3) $E_\eta^{c_\Lambda}=1$, 即 $E_\eta^{c_\Lambda}$ 为单位弹性, c_Λ 随 η 递增而递增, 且 η 变动 1% , c_Λ 变动始终为 1% ;

4) 因 Λ 远大于 $e(1-\alpha)$, 故 $E_\xi^{c_\Lambda}$ 远大于 $E_\Lambda^{c_\Lambda}$, 表明 c_Λ 相对于 ξ 变动的灵敏度远大于相对于 Λ 变动的灵敏度;

5) $\frac{\partial E_\xi^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}>0, \frac{\partial E_\Lambda^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}=0, \frac{\partial E_\eta^{c_\Lambda}}{\partial\alpha}=0$, 表明 c_Λ 相对于 ξ 变动的灵敏度随置信度 α 递增而递增, 而 c_Λ 相对于 Λ、η 变动的灵敏度与置信度 α 变动无关. 因此, 在高置信度 α 下, c_Λ 的灵敏度主要受 ξ 的影响.

因此, 当 $\alpha=99.9\%$ 时, c_Λ 随 ξ 递增而递增, ξ 是影响 c_Λ 灵敏度的关键参数.

由表 1 中参数 η、ξ、Λ 的数值以及 (14)−(16) 式可得表 3.

由表 3 可知,

1) $E_\xi^{c_\xi}>0$, $E_\Lambda^{c_\xi}>0, c_\xi$ 随 ξ、Λ 递增而递增;

2) $E_\eta^{c_\xi}$ =1, 即 $E_\eta^{c_\xi}$ 为单位弹性, c_ξ 随 η 递增而递增, 且 η 变动 1%, c_ξ 变动始终为 1% ;

3) $E_\Lambda^{c_\xi}\cong\xi$, 因置信度 $\alpha=99.9\%$ 趋于 1, 则 $E_\Lambda^{c_\xi}\to\xi$. 这表明在高置信度 α 下, c_ξ 相对于 Λ 变动的灵敏度由 ξ 的大小决定;

4) 因 Λ 远大于 $e(1-\alpha)$ 且 $E_\xi^{c_\xi}$ 远大于 $2[\ln\frac{\Lambda}{(1-\alpha)e}]^{-1}$, 故 $E_\xi^{c_\xi}$ 远大于 $E_\Lambda^{c_\xi}$, 表明在高置信度 α 下, c_ξ 相对于 ξ 变动的灵敏度远大于相对于 Λ 变动的灵敏度;

5) $\frac{\partial E_\xi^{c_\xi}}{\partial\alpha}>0$, $\frac{\partial E_\Lambda^{c_\xi}}{\partial\alpha}<0$, $\frac{\partial E_\eta^{c_\xi}}{\partial\alpha}=0$, c_ξ 相对于 ξ 变动的灵敏度随 α 递增而递增, 相对于 Λ 变动的灵敏度随 α 递增而递减, 而相对于 η 变动的灵敏度与 α 变动无关. 因此, 在高置信度 α 下, c_ξ 的灵敏度主要受 ξ 的

影响.

因此, 当 $\alpha=99.9\%$ 时, c_ξ 随 ξ 递增而递增, ξ 是影响 c_ξ 灵敏度的关键参数.

通过上述对不确定性传递系数相对于特征参数变动的灵敏度的理论探讨与实例分析可知, $OpVaR(\alpha)$ 置信区间长度随 ξ 递增而递增, 在高置信度 α 下, ξ 是影响 $OpVaR(\alpha)$ 置信区间长度的关键参数.

表 3 当 $\alpha=99.9\%$ 时形状参数不确定性传递系数的弹性

业务线	$E_\xi^{c_\xi}$	$E_\Lambda^{c_\xi}$	$E_\eta^{c_\xi}$	$\frac{\partial E_\xi^{c_\xi}}{\partial\alpha}$	$\frac{\partial E_\Lambda^{c_\xi}}{\partial\alpha}$	$\frac{\partial E_\eta^{c_\xi}}{\partial\alpha}$
BL1	10.0904	1.3402	1	1.73E+03	–22.5468	0
BL2	12.0054	1.2941	1	1.69E+03	–15.4088	0
BL3	8.8031	1.1279	1	1.02E+03	–13.8871	0
BL4	18.4949	1.5193	1	3.19E+03	–16.7084	0
BL5	12.5321	1.364	1	1.99E+03	–17.9571	0
BL6	12.4269	1.3525	1	1.93E+03	–17.5619	0
BL7	4.9789	0.9993	1	5.98E+02	–22.14	0
BL8	7.7324	1.1055	1	9.22E+02	–15.7318	0

综上所述, 当操作损失强度为重尾分布 (Pareto 分布) 时, 尾指数 ξ 越大, 分布越厚尾, $OpVaR(\alpha)$ 及其置信区间长度都同时增大, 在高置信度 α 下, 尾指数 ξ 是影响 $OpVaR(\alpha)$ 及其置信区间长度的关键参数.

该结论的意义在于: 1) 明确了操作风险的监控参数, 简化了监控系统. 由于尾指数 ξ 是反应操作风险大小变动的关键参数, 因此控制了尾指数 ξ, 即控制了操作风险. 2) 以该结论为依据, 可改进操作风险监管资本的提取方式, 即以某一置信度下 $OpVaR(99.9\%)$ 的置信区间为监管资本的控制范围. 新巴塞尔协议规定, 以置信度 α=99.9%下的操作风险价值 $OpVaR(99.9\%)$ 的点估计值来确定监管资本. 根据本文所得结论, 在 $OpVaR(99.9\%)$ 的点估计值与其置信区间长度同时随尾指数的递增而递增的情况下, 巴塞尔协议的监管资本提取方式可能存在不合理性. 若同时考虑监管资本及相应度量精度变化, 即监管资本越多, 其控制范围也随之增大, 操作风险的监管将更加合理, 使被监管机构在资本配置上具有一定的灵活性.

5 结束语

本文假设操作损失强度为 Pareto 分布, 并对该重尾性操作风险在高置信度 α 下的风险价值的置信区间及其灵敏度进行了理论探讨和实例分析. 基于此, 本文建立了当操作损失强度为 Pareto 分布时的重尾性操作风险价值置信区间的估计模型, 并对该置信区间的灵敏度进行了理论探讨, 发现了在高置信度 α 下操作风险价值及其置信区间长度变化的一般规律: 尾指数 (形状参数) 越大, 操作风险价值及其置信区间长度同时增大, 尾指数是影响操作风险价值及其置信区间长度变动灵敏度的关键参数. 实例分析进一步验证理论探讨所得命题. 这些工作在理论上进一步完善了损失分布法在操作风险度量中的应用, 为操作风险监控和监管提供了有价值的改进意见. 操作风险价值及其置信区间关键灵敏因子的发现, 明确了操作风险的监管参数, 为操作风险监管资本的提取方式提供了有价值的参考建议.

参考文献

[1] Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework[S]. Bank for International Settlements, 2004.

[2] Federal Reserve System, Office of the Comptroller of the Currency, Office of Thrift Supervision and Federal Deposit Insurance Corporation. Results of the 2004 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk[Z]. 2005.

[3] Hans B. Mathematical Methods in Risk Theory[M]. Germany: Springer-Verlag Heidelberg, 1970.

[4] Bocker K, KlÄuppelberg C. Operational VaR: A closed-form approximation[J]. Risk of London, 2005, 18(12): 90–93.

[5] Bocker K, Sprittulla J. Operational VaR: Meaningful means[J]. Risk of London, 2006, 19(12): 96–98.

[6] Bocker K. Operational risk analytical results when high-severity losses follow a generalized Pareto distribution (GPD)[J]. Risk of London, 2006, 8(4): 117–120.

[7] Moscadelli M. The modelling of operational risk: Experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee[R]. Italy, Banca D'Italia, Termini di discussione Number 517, 2004.

[8] Chapelle A, Crama Y, Hübner G, et al. Practical methods for measuring and managing operational risk in the financial sector: A clinical study[J]. Journal of Banking & Finance, 2008, 32(6): 1049–1061.

[9] Baud N, Frachot A, Roncalli T. How to avoid over-estimating capital charge for operational risk?[R]. Operational Risk-Risk's Newsletter, 2003.

[10] Frachot A, Moudoulaud O, Roncalli T. Loss Distribution Approach in Pratice, in Micheal Ong, The Basel Handbook: A Guide for Financial Practitioners[M]. Risk Books, 2007: 503–565.

[11] Shih J, Samad-Khan A H, Medapa P. Is the size of an operational loss related to firm size?[J]. Operational Risk, 2000, 2(1): 21–22.

[12] Na H S. Analysing and scaling operational risk[D]. Master Thesis, Erasmus University Rotterdam, Netherlands, 2004.

[13] Na H S, Van Den Berg J, Miranda L C, et al. An econometric model to scale operational losses[J]. Operational Risk, 2006, 1(2): 11–31.

[14] King J L. Operational Risk: Measurement and Modelling [M]. New York: John Wiley&Sons, Ltd, 2001.

[15] 莫建明, 周宗放. LDA 下操作风险价值的置信区间估计及敏感性 [J]. 系统工程, 2007, 25(10): 33–39.
Mo J M, Zhou Z F. Confidence interval and sensitivity of the operational VaR in LDA[J]. Systems Engineering, 2007, 25(10): 33–39.

[16] Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance[M]. Berlin: Springer, 1997: 705–729.

[17] 史道济. 实用极值统计方法 [M]. 天津: 天津科学技术出版社, 2006.
Shi D J. Applied Method of Extremes Statistics[M]. Tianjin: Tianjin Science and Technology Press, 2006.

[18] 中华人民共和国国家质量技术监督局. 测量不确定度评定与表示 (JJF1059-1999)[M]. 北京: 中国计量出版社, 1999.
State Quality and Technical Supervision of the People's Republic of China. Evaluation and Expression of Uncertainty in Measurement[M]. Beijing: China Metrology Publishing House, 1999.