文章编号: 1000-6788(2009)03-0100-06

报童模型的利润与亏损风险平衡分析

杨建奎 [1], 周　清 [1], 杨　磊 [2]

(1. 北京邮电大学 理学院, 北京 100876; 2. 华南理工大学 经济与贸易学院, 广州 510006)

摘　要 研究了单周期报童模型的利润与亏损风险平衡问题. 衡量风险的时候, 经典的方法是对利润的均值方差分析. 但是在实际生活中, 如果利润低于平均值, 也就是有可能"亏损"的时候, 才需要考虑风险. 如果利润高于平均值, 就没有分析风险的必要. 为此, 衡量风险的时候, 采用半方差方法来进行分析更为准确. 与用均值方差度量风险的模型比较, 用半方差方法得到报童模型的最大利润与最小风险, 分别是大于和小于前者的.

关键词 报童问题; 利润; 风险厌恶; 半方差; 最优策略

中图分类号 O221; F224.7　　**文献标志码** A

Trade-off analysis of revenue and risk of loss of the newsvendor model

YANG Jian-kui[1], ZHOU Qing[1], YANG Lei[2]

(1. School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijng 100876, China; 2. School of Economics and Trade, South China University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract This paper mainly concerns with the trade-off analysis of revenue and risk of the single period newsvendor model. When the risk is involved, the classical mean-variance method is to use the variance to describe the risk. However, the risk is taken into consideration in practice only when the stochastic revenue is lower than its expectation. Otherwise, there is no need to consider the risk, since the "profit" is non-negative. Therefore, the so-called semi-variance replaces the variance of the revenue to describe the risk in this paper. In consequence, with the mean-semi-variance method, the newsvendor model obtains larger renevue and smaller risk.

Keywords newsvendor model; revenue; risk aversion; semi-variance; optimal policy

1 引言

随着经济的迅猛发展, 各种消费产品的多样化, 产品的生命周期越来越短, 决策者对市场环境以及顾客需求的不确定性越来越敏感, 决策者通常要尽可能设法规避由这些不确定性带来的风险. 于是, 风险厌恶的企业决策者常常要考虑这样的问题: 如何衡量期望利润, 运作费用以及由于利润波动所引起的风险, 并从中找出某种平衡. 比如要求风险 (利润的方差) 不能过大的情况下, 使期望利润最大, 运作费用最小; 或者当利润或者运作费用一定的情况下, 使得所谓风险最小.

在运作管理领域中, 对这类问题的研究大多是基于报童模型的. 传统的报童模型都是基于决策者是风险中性的. 管理者通过订货来使得自己的期望利润最大化, 其订货量是基于一个临界比率 (Critical ratio), 这个

收稿日期: 2007-11-13
资助项目: 中国博士后科学基金 (20070410553); 国家自然科学基金 (10671205)
作者简介: 杨建奎 (1976–), 男, 汉, 博士, 讲师, 研究方向: 运筹学, 排队论, 风险管理, Email: yangjk@amss.ac.cn.

比率是使得不缺货的最优概率. Porteus[1] 给出了报童模型的很多扩展的综述性描述. 对于决策者是风险厌恶的报童模型, 也有不少文献. Eeckhoudt 等 [2] 研究了当需求比初始订货更高的时候, 风险厌恶的决策者可以增加一个额外的订货, 即使在这种情况下, 他们发现风险厌恶的决策者的订货量也是严格比风险中性的决策者的订货量低. Chen 和 Federgruen[3] 利用均值方差方法对一系列的基本库存模型进行了分析, 他们研究发现均值方差方法是有效的, 并且指出了根据这种方法所得到的最优决策与传统的库存模型的差异. 在近几年中, 有不少关于风险厌恶的库存模型的结果出现, 有兴趣的读者可以参考 Buzacott 等 [4], 以及 Tapiero[5].

最早提出均值方差方法的是 Markowitz[6], 他因这一方法在金融领域中的广泛应用而获得诺贝尔奖. 不过, 用均值方差方法分析风险厌恶的决策者的决策行为时有一定的不足之处, 当随机利润高于其平均值的时候, 决策者并不厌恶这样的风险; 随机利润低于其平均值的部分, 才是管理者所要担心的风险. 显然, 上述两种情况在用方差分析时都被认作为风险. 而把随机利润高于其平均值这一情况也算作风险似乎并不合适. 本文就是针对这一情况, 舍弃掉那部分决策者并不厌恶的风险, 在报童模型中引入了半方差的概念来刻画风险, 通过对此模型的分析来实现平衡利润与风险的目的, 本文称之为均值半方差方法. 容易证明, 只要随机利润不以概率 1 等于常数, 则半方差严格小于方差. 用方差衡量风险与半方差相比较就会偏高. 当决策者根据一定的风险认知来决定购入货物数额时, 若用方差刻画风险, 会因为方差里边包含了并不需要担心的那部分风险, 导致决策购货量过低而且利润偏低. 如果用半方差, 则可以做出更多购货数量的决策, 从而获得更多利润. 可见半方差刻画风险比方差更准确一些. 但要把这样的风险度量方式纳入到一些经典的效用函数中去分析, 并不容易实现. 因此, 我们直接在风险的有效域当中, 找出使得利润最大的最优解.

本文的其它部分组织如下, 首先介绍报童问题的模型, 用半方差替换方差, 然后找出最优解. 最后比较用方差、半方差两种情况下的最优解, 并给出数值算例.

2 报童模型的均值半方差分析

2.1 模型建立

报童问题是一个最基本的库存模型. 请参考文献 [7]. 管理者要决定购买量 Q 以满足一个周期的需求 D. 假定 D 是非负的连续型随机变量. 其分布密度为 f, 分布函数为 F. μ,σ^2 分别是 D 的期望与方差. s 是单位货物的卖出价格, c 是单位货物的买入价格. 若货物在这一个周期中没有卖出, 称之为剩余货物. 剩余货物的回收价格为 ν, 显然, 实际当中应该有如下关系成立:

$$\nu < c < s$$

下面主要考虑利润与费用的函数, 目标是使得前者最大, 后者最小, 通过一些简单计算, 可以得出供管理者决策的购买方案. 若在上述两个方面（利润与费用）管理者都不喜欢风险, 那么加入风险因素进行综合衡量之后, 就会得出不同的购买方案. 首先引入一些概念与符号定义以便展开后文中的讨论. 对于实数 a,b,

$$a \wedge b = \min\{a, b\},\quad a^+ = \max\{a, 0\},\quad a^- = \max\{-a, 0\}$$

一个周期中卖出的货物数量为 $Q \wedge D$, 剩余量为 $Q - Q \wedge D$, 容易看到, 一个周期的总利润 $\pi(Q)$ 满足如下关系:

$$\pi(Q) = s \cdot (Q \wedge D) + \nu(Q - Q \wedge D) - cQ$$

其中, 前两项为总收入, 最后一项为总费用, 同时,

$$Q \wedge D = Q - (Q - D)^+$$

重新改写 $\pi(Q)$ 如下,

$$\pi(Q) = (s - c)Q - (s - \nu)(Q - D)^+$$

定义 $\pi(Q)$ 的方差为 $V(Q)$, 半方差为 $R(Q)$,

$$R(Q) = \mathsf{E}\left\{[\pi(Q) - \mathsf{E}[\pi(Q)]]^-\right\}^2$$

下文主要围绕这样四个优化问题进行讨论:

$$\begin{aligned} A_1 \doteq {} & \max \mathsf{E}[\pi(Q)] \\ \text{s.t. } & V(Q) \le r_0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} B_1 \doteq {} & \min V(Q) \\ \text{s.t. } & \mathsf{E}[\pi(Q)] \ge p_0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A_2 \doteq & \max \mathsf{E}[\pi(Q)] \\ \text{s.t. } & R(Q) \le r_0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} B_2 \doteq & \min R(Q) \\ \text{s.t. } & \mathsf{E}[\pi(Q)] \ge p_0 \end{aligned} \tag{4}$$

其中, r_0 是风险上限, p_0 是利润的下限. 问题 (1) 和 (2) 是考虑均值方差问题, 问题 (3) 和 (4) 是考虑均值半方差问题. 要求解上述优化问题, 首先考虑上述指标的表达式和性质. 利润的期望值为:

$$\mathsf{E}[\pi(Q)] = \mathsf{E}[(s-c)Q - (s-\nu)(Q-D)^+] = (s-c)Q - (s-\nu)\mathsf{E}[(Q-D)^+]$$

其中,

$$\mathsf{E}[(Q-D)^+] = \int_0^Q (Q-x)\mathrm{d}F(x) = \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x$$

把它代人 $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 的表达式可得:

$$\mathsf{E}[\pi(Q)] = (s-c)Q - (s-\nu)\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x$$

同时, 方差 $V(Q)$ 为:

$$V(Q) = (s-\nu)^2 \left\{ 2Q\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^Q xF(x)\mathrm{d}x - [\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x]^2 \right\}$$

2.2 最优决策

下面我们将给出在均值方差方法和均值半方差方法分析条件下, 决策者的最优决策. 首先给出一个必要的性质.

性质 1 $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 是凹函数, 并且是渐近线性的, 斜率为 $(\nu-c) < 0$. $V(Q)$ 是非降的, 且 $V(Q) \le (s-\nu)^2\sigma^2$.

证明

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}\mathsf{E}[\pi(Q)] = \lim_{Q\to\infty}[(s-c)-(s-\nu)F(Q)] = (\nu-c) < 0$$

所以, $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 是渐近线性的, 斜率为 $(\nu-c)<0$. $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}Q^2}E[\pi(Q)] = -(s-\nu)f(Q) \le 0$,
所以 $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 是凹函数. $V(Q)$ 为非降函数, 可由下式看出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}V(Q) = 2(s-\nu)^2[1-F(Q)]\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x \ge 0.$$

重写 $V(Q)$:

$$\begin{aligned} V(Q) &= (s-\nu)^2 \left\{ -(Q-\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x)^2 + Q^2 - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x^2 \right\} \\ &= (s-\nu)^2 \left\{ -\left(\int_0^Q (1-F(x))\mathrm{d}x\right)^2 + Q^2(1-F(Q)) + \int_0^Q x^2\mathrm{d}F(x) \right\} \end{aligned}$$

考虑 $V(Q)$ 的上界. 由 $V(Q)$ 的单调性,

$$\begin{aligned} V(Q) \le \lim_{Q\to\infty} V(Q) &= (s-\nu)^2 \left\{ -\left(\int_0^\infty (1-F(x))\mathrm{d}x\right)^2 + \lim_{Q\to\infty} Q^2(1-F(Q)) + \int_0^\infty x^2\mathrm{d}F(x) \right\} \\ &= (s-\nu)^2\sigma^2 + (s-\nu)^2 \lim_{Q\to\infty} Q^2(1-F(Q)) \end{aligned}$$

由于 D 的期望和方差均有限, 故其二阶矩也有限, 且容易看到 $\lim_{Q\to\infty}\int_Q^\infty x^2\mathrm{d}F(x) = 0$. 注意到 $Q^2(1-F(Q)) \le \int_Q^\infty x^2\mathrm{d}F(x)$, 令 Q 趋于无穷, 则有 $\lim_{Q\to\infty} Q^2(1-F(Q)) = 0$. 由此可知 $V(Q) \le (s-\nu)^2\sigma^2$.

由上述性质容易看到, 平均利润 $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 有最大值, 这时候对应的 Q 记为 Q^*, 称之为报童问题解. 它满足如下关系式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}\mathsf{E}[\pi(Q)] = 0, \text{ 即} F(Q) = \frac{s-c}{s-v}$$

在最优订货量 Q^* 处, 决策者的边际利润为 0, 随着购货量的进一步增多, 决策者的边际利润将小于 0. 因为需求有限, 所以会有大量的货物剩余, 尽管以价格 ν 回收, 而该价格低于购买价格 c. 决策者购买的越多, 平均利润就越低. 当购买数量充分大的时候, 边际利润渐进于 $\nu - c$. 此时, 风险也是越来越大.

首先, 我们给出在均值方差方法条件下的优化问题的最优决策, 即问题 (1) 和 (2) 的最优解.

定理 1 对于优化问题 (1), 如果 $V(Q^*) \le r_0$, 则最优购货量就是 Q^*, 否则, 最优购货量小于 Q^*, 且为下述方程的解:

$$V(Q) = r_0$$

对于优化问题 (2), 若利润下限 $p_0 \in [0, \mathsf{E}[\pi(Q^*)]]$, 则必然存在 Q_1 和 Q_2 满足如下方程:

$$\mathsf{E}[\pi(Q)] = p_0$$

并且其最优订货量为 $Q_1 \wedge Q_2$. 若利润下限 $p_0 \in (-\infty, 0]$, 则最优购货量为 0.

证明 首先考虑优化问题 (1). 如果 Q^* 满足了 (1) 的约束条件, 那么最优订货量显然就是 Q^*. 如果不满足约束条件, 由 $V(Q)$ 的单调性可知, 最优购货量必然要小于 Q^*. 进一步, 由性质 1 可知, 当 Q 在区间 $[0, Q^*]$ 中取值的时候, 如果 Q 增长, $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 和 $V(Q)$ 都增长. 这时候订货量越大, 利润就越大. 能够满足约束条件的 Q 最大可能取值为下述方程的解:

$$V(Q) = r_0$$

故可知该解就是最优的购货量. 然后考虑优化问题 (2). 由于 $\mathsf{E}[\pi(0)] = V(0) = 0$, 所以当利润下限为负数时, 最优购货量显然为 0. 根据性质 1 可知,

$$\lim_{Q\to\infty} \mathsf{E}[\pi(Q)] \to -\infty$$

当利润下限 $p_0 \in [0, \mathsf{E}[\pi(Q^*)]]$ 时, 从而必然存在 Q_1 和 Q_2, 其中 $Q_1 \le Q^* \le Q_2$, 使得 $\mathsf{E}[\pi(Q_i)] = p_0$ 对于 $i = 1, 2$ 成立. 故可行的购货量 Q 是区间 $[Q_1, Q_2]$ 中的一点. 由于 $V(Q)$ 是个增函数, 从而其在区间 $[Q_1, Q_2]$ 上的最小值必然在 Q_1 点取得.

在考虑基于均值半方差方法的优化问题 (3) 和 (4) 之前, 我们先考察一下半方差的性质.

性质 2 半方差 $R(Q)$ 是严格增函数, 并且满足不等式 $R(Q) \le V(Q) \le (s-\nu)^2\sigma^2$, 只有当 $\pi(Q)$ 和 $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 以概率 1 相等时, $R(Q) = V(Q)$.

证明 由于

$$\begin{aligned}[\pi(Q) - \mathsf{E}[\pi(Q)]]^- &= \{-(s-\nu)\left[(Q-D)^+ - \mathsf{E}[Q-D]^+\right]\}^- \\ &= \begin{cases} (s-\nu)\left(Q - D - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x\right), & 0 \le D \le Q - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x \\ 0, & Q - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x \le D < \infty \end{cases}\end{aligned} \tag{5}$$

可得

$$R(Q) = (s-\nu)^2 \int_0^{Q-\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x} \left[Q - x - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x\right]^2 \mathrm{d}F(x)$$

由于 $\{[\pi(Q) - \mathsf{E}[\pi(Q)]]^-\}^2 \le [\pi(Q) - \mathsf{E}[\pi(Q)]]^2$, 所以 $R(Q) \le V(Q) \le (s-\nu)^2\sigma^2$. 而 $R(Q) = V(Q)$ 则等价于 $\mathsf{E}\left[[\pi(Q) - \mathsf{E}[\pi(Q)]]^+\right]^2 = 0$. 该等式等价于 $\pi(Q) \le \mathsf{E}[\pi(Q)]$ 以概率 1 成立. 则 $\mathsf{E}[\pi(Q) - \mathsf{E}[\pi(Q)]]^- = \mathsf{E}[\mathsf{E}[\pi(Q)] - \pi(Q)] = 0$. 故有 $\pi(Q) \ge \mathsf{E}[\pi(Q)]$ 以概率 1 成立. 综上所述, 只有当 $\pi(Q)$ 和 $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 以概率 1 相等时, $R(Q) = V(Q)$.

下面考虑 $R(Q)$ 的单调性.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}R(Q) &= (s-\nu)^2 \int_0^{Q-\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x} 2\left(-x + Q - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x\right)(1 - F(Q))\,\mathrm{d}F(x) \\ &= 2(s-\nu)^2(1-F(Q)) \int_0^{Q-\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x} \left(-x + Q - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}F(x) \\ &\ge 2(s-\nu)^2(1-F(Q)) \int_0^{(Q-\int_0^Q F(x)\mathrm{d}x)/2} \left(-x + Q - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}F(x) \\ &\ge (s-\nu)^2(1-F(Q))\left(Q - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x\right) F\left(\left(Q - \int_0^Q F(x)\mathrm{d}x\right)/2\right) \\ &> 0\end{aligned}$$

从直观上, 随着购货量的增加, 风险应该加大, 描述风险的半方差也应该是增函数. 半方差因为舍弃了利润高于其期望的部分的风险, 所以比用均值方差分析的风险要小.

定理 2 对于优化问题 (3), 如果 $R(Q^*) \le r_0$, 则最优购货量就是 Q^*, 否则, 最优购货量小于 Q^*, 且为下述方程的解:

$$R(Q) = r_0$$

最优购货量和最大利润 A_2 均比优化问题 (1) 的大,

对于优化问题 (4), 最优购货量与优化问题 (2) 相同, 但是风险 $B_2 \le B_1$.

证明 优化问题 (3) 半方差的约束条件与问题 (1) 中的方差的约束相同, 目标函数也相同. 由性质 2 可知 $R(Q), V(Q)$ 具有相同的单调性, 从而易见定理中最优购货量的算法. 其证明与定理 1 类似.

同时, 由性质 2 可知, $R(Q) \le V(Q)$, 问题 (3) 的可行域比问题 (1) 的大. 从而易见 $A_2 \ge A_1$.

若 $R(Q^*) \le r_0$, 则问题 (3) 的最优购货量为 Q^*, 而此时, 问题 (1) 的最优购货量不会超过 Q^*. 若 $R(Q^*) > r_0$, 由于 $R(Q) \le V(Q)$ 以及单调性, 方程

$$R(Q) = r_0, \quad V(Q) = r_0$$

各自的解显然是前者较大. 综合两种情况, 问题 (3) 的最优购货量比问题 (1) 大.

对于优化问题 (4), 因为约束条件完全相同, 且 $R(Q) < V(Q)$, 所以结论是显然的.

2.3 两种方法下最优决策的比较

由定理 2 容易看到, 用均值半方差方法分析风险, 当管理者所能容忍的风险下限一定的情况下, 需要购买的货物、能够得到的利润多于用均值方差方法分析所得; 当管理者期望的最低利润一定的情况下, 实际问题具有的风险, 要小于用均值方差方法分析所得. 因此, 在实际生活当中, 管理者使用均值半方差方法来分析风险, 能够得到更好的效果. 下面的数值算例充分说明了这一点.

3 数值算例

取需求 D 的分布为如下的均匀分布: $F(x) = x, x \in [0,1]$, $F(x) = 1, x > 1$. 限制购货量 Q 的取值在 [0,1] 区间. 设定 $s = 3, c = 2, \nu = 1, r_0 = 0.08, p_0 = 15/64$. 则上述报童问题的一些指标函数具体表达式如下:

$$\begin{aligned}
&Q^* = 0.5\\
&\mathsf{E}[\pi(Q)] = (s-c)Q - (s-\nu)Q^2/2 = Q - Q^2\\
&V(Q) = 4(Q^3/3 - Q^4/4)\\
&R(Q) = 4\int_0^{Q-Q^2/2} (x - Q + Q^2/2)^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}(Q - Q^2/2)^3
\end{aligned}$$

故容易算得: $V(0.5) \approx 0.104$, $R(0.5) \approx 0.07$. $\mathsf{E}[\pi(0.5)] = 0.25$. 方程 $V(Q) = 0.08$ 的解约为 0.45, 方程 $\mathsf{E}[\pi(Q)] = 15/64$ 的解 3/8, 5/8. 从而 $B_1 = 0.05, B_2 = 0.038$. 上述数值汇总在表 1 中.

在图 1 中, 直线 $r_0 = 0.08$ 是风险厌恶的管理者所能容忍的风险上限, 不妨把它看作是一条风险的警戒线. 它与 $V(Q), R(Q)$ 分别交于 B, C 两点. 显然, 采用半方差而不是方差作为风险度量方式, 在同样风险上限 $r_0 = 0.08$ 的条件下, 前者的最优购货量, 实际利润要高于后者. 若该警戒线向上浮动, 经过 A 点之后, 用均值半方差和均值方差分析风险所得的最优购货量与实际利润是相同的, 也就是说管理者容忍的风险足够大, 方差与半方差的差距是微不足道的. 若该警戒线向下滑落, 经过 G 点之后, 均值半方差分析风险也无法得到报童问题的解 Q^*, 但总比均值方差分析所得最优购货量、利润大. 对于利润下限 $p_0 = 15/16$, 与 $\mathsf{E}[\pi(Q)]$ 交于两点. 位于其上升区间的交点为 D. 此时对应的两种风险分别是 E 点和 F 点. 显然, 不管利润下限这条直

表 1

问题	最优购货量	实际利润A_i	实际风险B_i	风险上限r_0	利润下限p_0
(1)	0.449	0.247	0.08	0.08	–
(3)	0.500	0.250	0.07	0.08	–
(2)	3/8	0.234	0.05	–	15/64
(4)	3/8	0.234	0.038	–	15/64

线上下怎么变动, E 点总是在 F 点上方. 也就是说, 均值半方差方法对应的风险总是小.

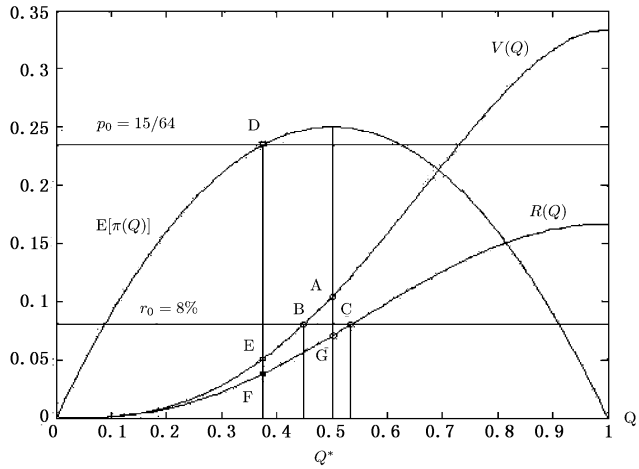

图 1

4　结论

本文考虑了单周期的风险厌恶报童模型, 由于现实生活中事件的不确定性, 所以考虑风险具有较强的现实意义. 文章引入了方差、半方差风险度量方法, 得到了在这两种风险度量准则下的最优订货决策, 并作了比较, 进一步扩展了传统的报童模型. 在未来工作中我们将深入探讨如何建立多周期以及多级供应链风险模型的最优策略问题.

参考文献

[1] Porteus E. Foundations of Stochastic Inventory Theory[M]. Stanford University Press, 2002.

[2] Eeckhoudt L, Gollier C, Schlesinger H. Risk-averse (and prudent) newsboy[J]. Management Science, 1995, 41(5): 786–794.

[3] Chen F, Federgruen A. Mean-variance analysis of basic inventory models[D]. Columbia University, 2000.

[4] Buzacott J, Yan H, Zhang H. Optimality criteria and risk analysis in inventory models with demand forecast updating[R]. 2001.

[5] Tapiero Charles S. Value at risk and inventory control[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 163: 769–775.

[6] Markowitz H. Portfolio Selection: Efficientient Diversification of Inverstment[M]. Cowls Foundation Monograph, 1959, 16, Yale University Press, New Haven.

[7] 徐光辉. 运筹学基础手册 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
Xu G H. Handbook of Operations Research Fundamentals[M]. Beijing: Science Press, 1999.