文章编号:1000-6788(2006)01-0001-08

建立系统科学基础理论框架的一种可能途径与若干具体思路(之十)

——复杂网络上的自组织临界性模型

范文涛[1],贾　武[2],丁义明[1]
(1. 中国科学院武汉物理与数学研究所,湖北 武汉 430071; 2. 武汉大学系统工程研究所,湖北,武汉 430072)

摘要: 这是总标题下的第十篇.主要内容如副标题所述.主标题下全文的总目的是试图从现代物理、分子生物学与脑神解剖学等学科领域的最新实验事实,以及相应的前沿理论领域围绕着演化概念研究的展开所获得已有理念与成就为基础,按照"由大爆炸理论所描述的物理世界之最初情景出现以来,世界物质总是在其不同时空点具体结构状态下的几种基本相互作用属性形成的制约机制造成的物质——能量结构与分布仍非完全平衡态势的推动下,不断地一层一层完成其全方位整体性进一步精细平衡结构,实现其该层次从无序到有序的起伏演化——这一总体自然法则"的认识主线,提出一种建立系统科学基础理论的定性定量框架思路与若干细节方法. 文中对相互作用、进化、演化、适应性与复杂性等概念进行了分析,并对突变、分歧、吸引子、混沌、协同、分形等基于此种理论作了一种较为直观的诠释. 同时,也将论及信息的本质与其人本意义下的价值概念,特别是她与非线性的密切关系等问题. 当然,这一切均还是初步的,尽管其中一部分我们也已经获得了一些较为严谨的结果.

文章首先利用平均场理论讨论了自组织临界性模型,并与数值模拟的结果进行了比较,进而又在复杂网络的不同拓扑结构的背景下研究了该模型的雪崩动力学. 且在文末阐述了所有这些与统计物理学在实质上的本源关系.

关键词: 自组织临界性;雪崩;临界值;复杂网络;小世界网络;Bak - Sneppen 模型
中图分类号: N94　　**文献标识码**: A

A Possible Approach to the Framework of the Fundamental Theory of System Science: Part Ten

FAN Wen-tao[1], JIA Wu[2], DING Yi-ming[1]
(1. Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. Institute of Systems Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: A qualitative and quantitative framework for the fundamental theory of system sciences as well as some details are given on the basis of some new experimental evidence, ideals and achievements concerning evolution in many fields such as modern physics, molecule biology and brain anatomy, etc. Some concepts such as interaction, evolution, adaptability, and complexity are discussed. Intuitional annotations about catastrophe, bifurcation, attractor, chaos, fractal and synergy are also given. The essence and the value of information, and the closed relation between information and nonlinearity are investigated. It is no doubt that all the works are to be considered in detail, although we have some rigorous results in particular steps.

It is the tenth part of the paper. The self organization model on complex networks is discussed by the mean field theory, and the results are compared with the numerical simulations. The avalanche dynamics of the model are investigated for different topological structures of the small world networks. Moreover, we present the essential relation between the above theory and the statistical physics.

Key words: SOC; avalanche; critical threshold; complex networks; small world network; Bak-Sneppen model

收稿日期:2005-08-26
资助项目:国家自然科学基金(70271076,70571079)
作者简介:范文涛(1938 -),研究员,博士生导师;贾武(1963 -),副教授,博士;丁义明(1972),副研究员,博士.

1 自组织临界性及其模型

复杂性科学的兴起,很大程度上要归功于混沌理论的发展,正是基于混沌理论,人们意识到一些简单的动力系统也会产生极其复杂的行为. 在复杂性科学中,混沌的边缘(edge of chaos)和自组织临界性(self organized criticlality,简称 SOC)是两个很深刻的概念,此二者,同出而异名. 自组织临界性现象,使得我们有了一种把玻尔兹曼和吉布斯的统计物理学与令人激动的非平衡物理的真实世界联系起来的思路. 自组织临界性这一概念是如此有力,可以用来解释自然界中的很多现象,诸如河流形成和股市波动等等.

自组织临界性是由 Bak、Tang 和 Wiesenfeld 于 1987 年提出的[1],它是关于具有时空自由度的复杂动力学系统的时空演化特性的一个概念. 自组织临界性指的是一类开放的、动力学的、远离平衡态的复杂系统通过一个漫长的自组织过程能够演化到一个临界状态,达到这个状态以后,系统的时空动力学行为不再具有特征的时空尺度,因而表现出覆盖整个系统的满足幂律分布的时空关联[2].

自组织临界性理论具有这样几个特征[2,3]:第一,它具有时空关联与连通性及时空分形结构;第二,雪崩动力学,复杂系统自发地向自组织临界态演化,在这种临界态,小的事件会引发大小不等的一系列连锁反应. 临界性的特征为:处于临界状态的系统会出现各种大小的雪崩事件,并且雪崩的时空分布服从幂律;第三,这种临界性不同于平衡态统计力学中所指的平衡相变的临界性,平衡系统的相变是通过调节系统的某个参数而达到的. 然而自组织临界性的产生不需要调节系统的参数,完全是系统自身的一种动力学.

长期以来,人们一直在寻找世态万象呈现 $1/f$ 涨落和分形结构的共同机制,因为已有的耗散结构论、协同学理论并没有给出圆满的回答. 耗散结构理论指出了由无序到有序的途径,系统由线性渐近稳定平衡区逐步发展,经过分歧点,进入一种远离平衡态的不稳定的无序状态,然后通过反常涨落(实质上是环境给予一种适当大的控制输入)形成一个新的稳定平衡的有序结构,这个结构由新的稳定平衡点刻划[4]. 协同学的理论表明在由非常多的要素(子系统)构成的系统中,如果系统与外界保持能量物质交换,则在一定条件下,这些子系统可基于协同作用执行很有“规则”的集体运动和功能,以导致“系统的自组织”就如一段软铁被磁化的过程一样[4]. 耗散结构论和协同学解决了耗散结构的动力学系统形成和出现的条件、环境和一般动力学问题,但没有回答系统演化的模式问题. Bak 及其合作者提出的自组织临界性模型对此给出了一个新的解释:许多相互作用的大系统能自发地朝着一种临界状态演化,而 $1/f$ 涨落和分形结构则分别是自组织临界系统的在时间和空间尺度上的“指纹”(fingerprint)[5].

自组织临界现象和混沌现象是不同的. 混沌对初始条件具有很高的敏感性,而自组织临界态并没有对初始条件的极端敏感性. 对于处于自组织临界状态的系统而言,系统处在混沌的边缘演化,这种演化行为也称为弱混沌,是系统的自组织临界性质所导致的. 弱混沌不同于完全混沌,其不确定性增长比混沌行为的不确定性增长缓慢得多. 从密度演化的观点来看,系统的长程关联在混沌现象中是迅速减少的[6,7],而在自组织临界现象中,长程关联逐渐增加[5].

自组织临界性已激起了人们对阈值动力学的强波动性、类似雪崩的时间演化过程的兴趣(即雪崩动力学(avalanche dynamics)). 在这些系统中,达尔文进化论的渐进发展已被长时期的静止状态所取代,而这些静止状态又往往被持续时间较短的突发事件所打断(即断续平衡(punctuated equilibrium)). 波动在这里是如此强烈,以至于系统的走向往往由一次突发事件所决定[8]. 当然,复杂现象在自组织临界性提出之前就引起了人们的关注,但我们可以说,自组织临界性聚焦在一些长期被人们所忽视的机制上(如雪崩动力学、断续平衡和 $1/f$ 涨落等),而这些机制至少在某些种类的复杂行为中起着决定性作用.

自组织临界性模型一般都较为简化,这是由于多体问题本身的复杂,如果模型过于繁杂,问题就难以处理了. 虽然如此,这些模型仍然能体现系统的基本结构和本质的物理机制,具有一定程度的普适性.

在 Bak 和 Sneppen 提出生物演化模型以前(Bak-Sneppen 模型)[9],人们也试图提出过各种自组织临界性模型:1987 年,Bak 及其合作者提出了沙堆模型[5],利用该模型作为实例提出了自组织临界性这一概念. 1990 年,Bak、Chen 和 Curetz 提出了生命游戏模型[10]. 作为对生命现象的早期模型探索,该模型具有重要的意义. Kauffman 和 Johnsen 采纳了生命游戏模型的一些观点,提出了 NKC 模型[11],当物种间的相互作用

的数量增加的时候,NKC 模型能发生从有序到无序的相变,但 NKC 模型不是自组织临界性模型,因为它的临界性需要一些参数的调节. Bak、Chen 和 Tang 于 1990 年提出的森林火灾模型[12],作者的意图是想通过这个简单的模型来演示标度律和分形能量耗散的出现,并帮助人们理解某一类湍流现象. 还有很多著名的自组织临界性模型,它们是关于宇宙[13]、地震[14]、买方与卖方[15]、交通堵塞[5]以及夸克和胶子[16]等方面的,在此不再赘述.

上述所提到的自组织临界性模型大多是非守恒、离散、模拟解、最近邻居的极值模型[5]. 虽然这些模型与实际对象有一定的差距,但它们至少在某种程度上能让我们理解所研究对象的部分性质和行为特征,它们在相应的领域中具有一定的代表性.

2　复杂网络

我们可从不同角度去研究自组织临界性模型,比如模型的组元之间的作用方式、网络的拓扑结构、雪崩和精确方程等方面. 本文将主要从网络拓扑结构(即复杂网络)方面入手.

复杂网络是对复杂系统结构和作用机制的一种抽象,它表示具有大量各种相互作用的不同组元的系统. 在复杂网络中,节点代表的是某个个体或团体,节点之间的连接表示它们之间的相互作用. 现实世界中很多系统都可以用复杂网络去描述,比如社会系统、生物系统和交通系统等.

上世纪五十年代末,数字家 Erdös 和 Renyi (ER) 用随机图去描述一个复杂拓扑结构的网络,他们的工作奠定了随机网络理论的基础. 在复杂网络的研究中有两个重要的模型,即小世界网络模型和标度无关网络模型. 1998 年,为了描述从正规图到随机图的转换,Watts 和 Strogatz 引入了小世界网络的概念[17]. 小世界网络具有较小的平均路径长度和较高的集聚系数. 一个很有名小世界效应是所谓的六度分离(six degree separation)原则,它是由社会心理学家 Milgram 在 1960 年提出的[18],虽然该观点还有争论,但小世界模式在许多真实网络中的确无处不在. 通过对因特网等真实网络的考察,Barbarasi 和 Albert 发现许多网络是开放的(增长),他们是在不断地增加新节点的过程中动态形成的;其次是,网络的节点之间的连接具有富者更富的现象(偏好连接),即新节点更易与有更多连接的节点连接. 基于这个思想,他们提出了标度无关网络[19]. 标度无关网络的度分布具有某种幂函数形式,其节点在性质上不相似,很多节点只有很少的连接,而个别节点却有很多的连接. 现实世界中的许许多多的网络都可以用小世界或标度无关网络来描述,如社会网络、食物链网络、因特网、万维网、大型电力网络、交通网络、科研合作网络等等. 复杂网络的研究正从数学和工程技术科学渗透到社会科学、物理学、以及生物学等众多不同学科.

下面给出本文中涉及到的关于网络的一些基本概念. 假设网络的节点数为 N,网络中的两点节点 i, j 的最短路径长度 d_{ij} 指的是连接 i 和 j 的最短路径的边数. 如果 i, j 之间不存在通路,那么记 $d_{ij} = N$. 网络的平均路径长度指的是 d_{ij} 相对于网络上的每对节点 i, j 的平均值. 网络中,节点 i 的度数 k_i 是指连接该节点 i 的边的总数;网络的平均度数是 k_i 相对于 i 的平均数,记为 $\langle k \rangle$. 节点在网络中的分布情况用分布函数 $p(k)$ 表示,$p(k)$ 表示网络中任意节点具有次数 k 的概率. 若一个网络的度分布在一个平均值上达到峰值,并且以指数形式下降,这种网络称为指数网络,也称为齐次网络,因为每个节点有差不多相同的连接数.

3　复杂网络上的自组织临界性模型

在自组织临界性的研究中,我们的重点已不再是在各个应用领域中提出新的模型,而应该把重点放在最基本和最经典的模型研究上,并在这些模型中寻找答案. 本文将主要讨论 Bak-Sneppen 模型的自组织临界性问题.

第一节所提到的自组织临界性模型,对于 Bak-Sneppen 模型的提出具有一定的借鉴作用,但这些模型的行为证据大多是通过数值模拟得到的,普遍缺乏解析手段. 自 1993 年 Bak 和 Sneppen 提出生物演化模型以来(Bak-Sneppen 模型),人们获得了许多精确的结论,并把 Bak-Sneppen 模型和其它的一些自组织临界性模型通过一种新的动力学 ——雪崩动力学(avalanche dynamics)统一起来[2].

Bak-Sneppen 模型的最初意图是粗略模仿生物的宏观进化过程,以解释在化石纪录中所观察到的生物灭绝规模分布问题. 在该模型中,每个物种用一个适应度来表示,每个物种的适应度都要受到同一生态系统中其它物种适应性的影响,物种与物种之间由于某种原因而相互作用(比如通过食物链的形式发生);适应度低的物种容易变异,适应度高的物种在其邻居发生变异的情况下也会发生变异. 一维规则网络上 Bak-Sneppen 模型定义是[9]:将 N 个物种放在一个具有周期边界的一维格点上,每个物种 f_i 的初值取[0,1]区间上的随机数,其中 $i=1,2,\cdots,N$;在每个时间段,找出总体的最小适应度(假如是 f_i),再在[0,1]区间取三个随机数,重新赋给 $i-1,i,i+1$ 这三个位置上的物种. 将上述过程一直重复下去. d 维规则网络上 Bak-Sneppen 模型可以类似地给予定义. 这个简单的模型能展现出很有意义的复杂行为,比如断续平衡现象[9].

通过改变网络的拓扑结构,已有许多学者对经典的自组织临界性模型做过研究. Kulkarni 在小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型中给出了网络中某个节点与其它节点的关联度(connectence)[20];作者发现,节点的活动情况与关联度密切相关,具有高关联度的物种在网络中由于对环境具有较高的依赖性,因而表现出频繁的进化与灭绝现象. 作者还用该模型解释物种的进化过程. Arcangelis 在二维小世界网络上研究了 Bak 所提出的沙堆模型[21],他发现在这一网络上,雪崩时间和规模都服从幂律分布,并且找到了相应的幂律指数对于重连概率的拟合函数. Yang 研究了随机邻居 Bak-Sneppen 模型[22](相当于某种随机网络上的 Bak-Sneppen 模型),利用方向较短距离和相关函数,作者发现随机邻居模型不是自组织临界性模型. Davidson 用严格的数学方法证明了[23],随机邻居 Bak-Sneppen 模型具有 $1/f^2$ 噪声谱,而不是 $1/f$ 噪声谱,因而不是自组织临界性模型. Head 研究各向异性 Bak-Sneppen 模型[24](相当于加权网络上的 Bak-Sneppen 模型);因为生物演化方式并不象经典 Bak-Sneppen 模型那样是各向同性的,比如在食物链网络中,追逐对于捕食者与被捕食者的意义各不一样. Head 进行数据模拟之后发现,系统的演化方式与各向同性的 Bak-Sneppen 模型本质上没有区别,但从临界指数上来看,属于不同的普适类.

经典 Bak-Sneppen 模型是在规则网络上进行研究的. 然而,正与 Watts、Barabasi 和 Newman 等学者所言[17,19,25],真实网络既不是完全有序的也不是完全无序的,而是处在两种极端情况之间,因此,复杂网络上的 Bak-Sneppen 模型应该与真实的生物进化过程更为接近. 本文首先研究了一维小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型,用平均场方法给出了当小世界网络的重连概率 $p=1$ 时,模型的临界值,并与数值模拟的结论进行了比较,做了误差分析;之后,我们还分析了 Bak-Sneppen 模型的临界值与重连概率 p 之间的关系,发现模型的临界值与网络的平均路径长度密切相关,并与 Bak 的相关结论进行了比较;我们还研究了模型的雪崩动力学. 当 p 值发生微小的变化时,模型的动力学行为会发生很大的变化,并用 Kulkarni 相关结论进行了解释;当 p 值增大到一定的程度时,模型的动力学行为与随机邻居模型相似.

3.1 小世界网络上 Bak-Sneppen 模型

我们首先将 Bak-Sneppen 模型放在由 Watts 和 Strogatz 给出的一维小世界网络上. 一维小世界网络的生成方式是:取一个具有周期边界的一维格,格的每个节点的度为 $2k$,以概率 p(称作重连概率)断开格中的每个边,并将该边的一个端点随机连接到网络中任意选取的一个节点上,上述过程称为小世界网络的断键重连(breaking and rewiring). 小世界网络的断键重连需遵循两个原则:一是每两个节点之间不能多于一条边,二是每个节点不能与自身连接. 根据小世界网络的生成过程,可知小世界网络的平均度仍为 $\langle k\rangle=2k$.

小世界网络上 Bak-Sneppen 模型定义是:在小世界网络上有 N 个物种,第 i 个物种适应度的初值 f_i 取[0,1]区间上随机数,其中 $i=1,2,\cdots,N$;在每个时间段,找出总体的最小适应度(假如是 f_i,并设 S_i 为物种 f_i 的邻居及自身所形成的集合),再在[0,1]区间上任取 $|S_i|$ 个随机数,重新赋给 S_i 中的物种. 将上述过程一直重复下去.

3.2 小世界网络上 Bak-Sneppen 模型的自组织临界性

我们先考虑模型在小世界网络的重连概率 $p=1$ 的情形. 在这种极端的情况下,网络仍然保留着小世界网络生成过程的一些信息,我们不能把这种网络完全等同于随机网络,比如这种网络的每个节点的度数至少为 k[17]. 这种网络每个节点的度值波动不大,是一种指数网络,我们可以采用平均场方法来分析模型

演化到稳态时的临界值.

为进行分析,我们首先给出 Bak-Sneppen 模型的演化树(evolutionary tree),见图 1. 给定一个辅助参数 b, $0 \le b \le 1$. 演化树的节点指的是,在模型某一步的演化过程中,该节点所代表的物种的适应度小于 b. 在演化树中,若节点 i 在某一步演化中成为系统的最小适应度物种,由于 i 的变异引起自身或邻居物种 j 的适应度小于 b,则物种 i 称为物种 j 的父辈(图 1 中每个节点的左邻). 我们称演化树上的某个节点处在第 t 代,若从该节点出发到达最初引发雪崩的节点所经过的最少节点数.

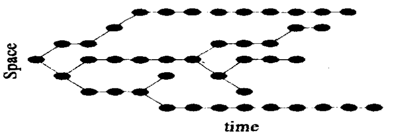

图 1　Bak-Sneppen 模型演化树示意图

假设演化树中的第 t 代物种占系统中全体物种的比例为 $\rho(t)$,则我们有下述平均场方程

$$\Delta_t \rho(t) = \rho(t+1) - \rho(t) = -(1-b)\rho(t) + b\langle k\rangle(1-\rho(t))\rho(t), \tag{1}$$

(1) 式在分析过程中忽略了网络中的节点度数的不一致性,将每个节点的度数都看作是网络的平均度 $\langle k\rangle$. (1) 式中的右边第一项考虑的是,当第 t 代物种变异时,有 $1-b$ 的概率使其适应度大于 b,从而不能成为演化树的第 $t+1$ 代物种. (1) 式右边第二项考虑的是,网络中的非第 t 代物种 $1-\rho(t)$ 平均有 $\langle k\rangle(1-\rho(t))\rho(t)$ 的概率与演化树中的第 t 代物种连接,并以 b 的概率使其适应度小于 b,从而成为演化树的第 $t+1$ 代的物种.

当系统演化到稳态之后,我们有 $\Delta_t \rho(t) = 0$,从而

$$\Delta\rho = \rho(-1 + b + b\langle k\rangle(1-\rho)) = 0, \tag{2}$$

其中,ρ 是 $\rho(t)$ 稳态值. 与[26]类似的分析方法,由方程(2),我们可以得到 $p = 1$ 时的小世界网络上 Bak-Sneppen 模型的临界值

$$b_c = \frac{1}{1 + \langle k\rangle}, \tag{3}$$

当 $b > b_c$ 时,由(2)式我们得到

$$\rho = 1 - \frac{1-b}{b\langle k\rangle}, \tag{4}$$

将(3)式中的 $\langle k\rangle$ 表示成 b_c 的函数,然后代入(4)式,得到

$$\rho = 1 - \frac{(1-b)b_c}{(1-b_c)b} = \frac{b-b_c}{b-bb_c}, \tag{5}$$

当 b 与 b_c 足够接近时,我们可以将(5)式中的分母看作常数,从而

$$\rho \sim b - b_c, \tag{6}$$

由(6)式我们可以看出,辅助参数 b 高出临界值 b_c 越多,系统达到稳态后处于 b 下方的物种数目越多.

为了与分析结论相比较,我们对 $p = 1$ 时的小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型作了模拟,以分析适应度小于 b 的物种比例 ρ 与不同的辅助参数 b 的函数关系(见图 2). 小世界网络上各物种适应度的初值取[0, 1]上的随机数. 对于给定的 b,系统演化到稳态后,ρ 值将趋于一个常数. 模拟结果是在 $p = 1$ 时生成 30 次不同的小世界网络上的平均值,网络上物种个数为 $N = 2000$. 在模拟中,小世界网络的参数 $k = 2$,对应的平均度值 $\langle k\rangle = 4$. 从图 2 中我们发现,$p = 1$ 时的小世界网络上 Bak-Sneppen 模型演化的临界值 $b_c \approx 0.203$,而由(3)式我们可以计算出 $b_c = 1/(1 + \langle k\rangle) = 0.2$;并且当 $b > b_c$ 时,从图 2 中可以看出,ρ 与 $b - b_c$ 几乎成线性关系. 这些说明,我们的模拟结果与(3)、(4)两式的分析非常吻合.

为何 b_c 的模拟值比理论值要大呢? 这是由于有限规模效应造成的. 假若有节点数为 N 的一个具有周期边界的一维格,根据 Watts 和 Strogatz 给出的小世界的生成方法,当 $p = 1$ 时,(1)式中每个非第 t 代节点的每条边指向演化树中第 t 代节点的概率应为 $(1-\delta)\rho(t)$,而不是 $\rho(t)$. 我们的分析如下:

对于 $\langle k\rangle = 4$ 的一维格,在生成小世界网络时,由于断键重连所遵循的两个原则,第一个节点的两个边中的每条边在寻找重连节点时,由于已存在另外三条边,因而减少了 $3 \times (2/N)$ 的概率与网络中任意一个节点连接;由于第一个节点重连了两条边,故第二个节点的两条边在寻找重连节点时,会减少 $(3 + (2/N))$

$(2/N)$的概率与网络中任意一个节点连接;同样,第 N 个节点的两条边会减少$(3+2(N-1)/N)(2/N)$的概率. 由上述分析,我们有

$$\delta=\frac{(3+(0/N))(2/N)+(3+(4/N))(2/N)+\cdots+(3+2(N-1)/N)(2/N)}{2N}$$

$$=\frac{1}{N^2}\left(3N+\frac{2N(N-1)}{2N}\right)=\frac{4N-1}{N^2}\sim\frac{1}{N}. \tag{7}$$

由(7)可以看出,只有当 N 足够大时,我们才会得到比较满意的模拟值.

我们还研究了小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型的临界指数 f_c 随重连概率 p 的变化情况,见图 3. 小世界网络的节点数 $N=5000$,对于同一个 p 值,我们生成了 10 次不同的小世界网络,系统演化的次数为 500000,所得模拟结果取的是上述数据的平均值.

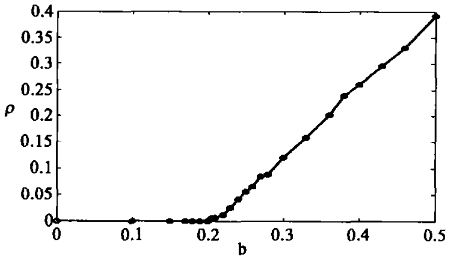

图 2 小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型演化到稳态时,适应度小于 b 的物种比例 ρ 与 b 的关系图

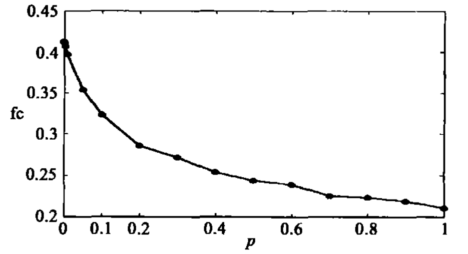

图 3 小世界网络的重连概率 p 与 Bak-Sneppen 模型相应的临界值的关系图

从图 3 我们发现,从规则网络到小世界网络的过程中(即 p 值取 0,0.01 到 0.1),系统的临界值剧减,而当 p 从 0.1 变化到 1 的过程中,临界值却呈缓慢下降趋势. Paczuski 已证实[27],当空间维数增加时,Bak-Sneppen 模型的临界值会减小;可见,小世界网络断键重连,使得每个节点的作用范围增加,起到了类似于增加空间维数的作用. 从规则网络到小世界网络过程中,平均路径长度下降很快(相应作用范围也很快增加),从小世界网络到随机网络的过程中,网络的平均路径长度已经充分减小[17],因此系统的临界值下降速度就出现了象图 3 所描述的情形.

对于不同的 p 值,图 4 给出了小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型相应雪崩时间分布的临界指数 τ. 与 Bak 和 Sneppen 提出的关于经典 Bak-Sneppen 模型的雪崩定义类似[9],本模型的雪崩指的是,当网络中适应度最小的物种的适应度小于 b 时,系统的演化次数(其中 b 是一个小于相应临界值且与临界值非常接近的辅助参数);一旦最小适应度大于 b,雪崩也就结束了. 对于同一个 p 值,我们生成了 20 个不同的网络,并取得了 2000 个雪崩时间数据. 我们发现,当 p 从规则网络到小世界网络时(p 值取 0,0.01 到 0.1),临界指数剧增,系统动力学行为已发生了本质的变化,这与 Kulkarni 及其合作者对小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型的相关结论一致[20]. Kulkarni 及其合作者给出了模型雪崩的时空分布,他们发现,当 $p=0.01$ 时,雪崩时空分布曲线呈现出了新的特征,即出现了两个幂律范围,这是因为小世界网络在 $p=0.01$ 时特殊的拓扑结构引起的,即较高的聚集系数和较小的平均路径长度;Kulkarni 的解释是,当雪崩时间大到一定的程度时,模型在演化过程中突然“感觉”到小世界网络的长程连接(shortcut),从而使模型的动力学行为突然发生改变. 我们还观察到,随着 p 值的进一步增加,临界指数几乎不再增加;当 p 值超过 0.7 时,模型展现出与随机网络上的 Bak-Sneppen 模型类似的动力学行为,其临界指数与文献[28]给出的随机网络相应模型的临界指数 $\tau=1.5$ 相当接近(相差不到 0.06),此时的 Bak-Sneppen 模型不再是 SOC 模型了(关于这一点,文献[22,23]已给出了系统地论证).

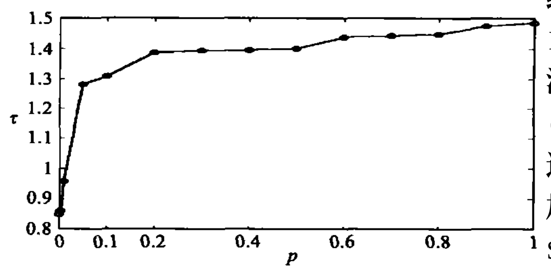

图 4 对于小世界网络上的 Bak-Sneppen 模型,重连概率 p 与雪崩时间分布的临界指数 τ 的关系图

4　结语与进一步的工作

本文的目的是试图阐明自组织临界性,包括所谓的复杂网络与其相伴的复杂网络动力学的稳态性质.在自组织临界性模型研究问题上,核心内容可认为是雪崩动力学与幂律,复杂网络动力学亦复如此.我们一直试图将复杂网络与一些著名的自组织临界性模型用统计物理学的观点加以解释.Richmond 和 Solonom 的工作则进一步给了我们很有力的启示[29,30].事实上,通过推广的 Lotka-Volterra (GLV) 方程以及推广的朗之万方程解的最一般结论,他们已经证明了财富的分布服从 Pareto 形式的幂律,以及幂律实际上是另一种形式的波尔兹曼律.这就表明,幂律作为复杂网络系统的临界点的"指纹",并不神秘,而是具有统计物理学背景的,二者具有同一个物理的本质.从这个意义上说,可以认为,所谓复杂网络的思想与方法,是提供了另一个新的从碰撞的动态演化机理分析直觉出发计算系统的概率分布的方法.从而也为我们所提出的系统科学或复杂性研究的基础理论打开了另一条寻找算法的途径.无论就普适性而言,还是作为基础性出发点,都因为它是范畴在统计物理的本质内涵之下的.虽然看起来它不如所求解分布所满足的吉布斯——波尔兹曼方程那么美,也不一定比统计物理原有的方法具有可比较的简易性,但毕竟我们是多了一条新路.另外,这一方法也有助于我们如何直观的理解所谓的自组织之谜.这也是具有重要的理性意义的.

本文只是对 Bak-Sneppen 模型的网络动力学进行了研究,还有很多著名的自组织临界性模型的相关问题需要我们去研究,比如,森林火灾模型、买方与卖方经济模型、地震模型以及宇宙演化模型等等.

一般而言,自组织临界性模型都是针对具体对象进行研究的,实际上我们可以把有关模型的作用机制推广到其它系统中去.比如,Bak-Sneppen 模型的组元是生物物种,物种之间的作用关系通常可以理解为食物链.Yamano 利用 Bak-Sneppen 模型的动力学说明了市场也能展现自组织临界性,并在无外部调节和有外部调节的情况下得到了很多细致的结论[31];Marcel 利用 Bak-Sneppen 模型的动力学研究了经济实体在不同的经济环境中的演化问题[32].这说明自组织临界性模型具有广泛的应用前景.这也是摆在我们面前的一个重要的课题.

另外,虽然我们已经对 Bak 所提出沙堆模型和高速公路上的交通阻塞模型做了一些尝试性的工作,并力图从自催化(auto-catalytic)和竞争(competing)的角度作为切入点而展开,但仍有待于进一步的深入.

参与文献:

[1] Bak P, Tang C, Wiesenfield K. Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise [J]. Physical Review Letters, 1987, 59: 381 - 384.

[2] 李炜. 演化的标度行为与雪崩动力学[D]. 武汉:华中师范大学博士学位论文,2002.
Li W. The scaling behavior and avalanche dynamics in evolutions [D]. Wuhan: The Doctoral Dissertation of Huazhong Normal University,2002.

[3] 梅可玉. 论自组织临界性与复杂系统的演化行为[J]. 系统辩证学学报,2004, 12(4):38 - 41.
Mei K Y. On the self organized criticality and the evolutionary behavior of complex systems[J]. Journal of System Dialectics,2004, 12(4):38 - 41.

[4] 范文涛, 丁义明, 龚小庆. 建立系统科学基础理论框架的一种可能途径与若干具体思路(之四)[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(8): 17 - 21.
Fan W T, Ding Y M, Gong X Q. A possible approach to the framework of the fundamental theory of system science (part four) [J]. System Engineering: Theory and Practice,2002,22(8):17 - 21.

[5] Bak P. How Nature Works: The Science of Self-organized Criticality [M]. Berlin: Springer, 1996.

[6] 丁义明, 范文涛, 龚小庆. 建立系统科学基础理论框架的一种可能途径与若干具体思路(之七)[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(5): 1 - 14.
Ding Y M, Fan W T, Gong X Q. A possible approach to the framework of the fundamental theory of system science (part seven) [J]. System Engineering: Theory and Practice,2003,23(5):1 - 14.

[7] 丁义明, 范文涛. 一簇 Lorenz 映射的混沌行为与统计稳定性[J]. 数学物理学报,2001, 21A(4): 559 - 569.
Ding Y M, Fan W T. The chaotic behavior and statistical stability of a cluster of Lorenz mapping[J]. Acta Mathematica Scientia, 2001,21A(4):559 - 569.

[8] Jensen H J. Self-organized criticality [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[9] Bak P, Sneppen K. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution [J]. Physical Review Letters, 1993, 71: 4083 - 4086.

[10] Bak P, Chen K, Creutz M. Self-organized criticality in the game of life [J]. Nature, 1989, 342: 780 - 781.

[11] Kauffman S A, Johnsen S. Coevolution to the edge of chaos: coupled fitness landscapes, poised states, and coevolutionary avalanches [J]. Journal of Theoretical Biology, 1991, 149: 467 - 505.

[12] Bak P, Chen K, Tang C. A forest-fire model and some thoughts on turbulence [J]. Physical Letters A, 1990, 147: 297 - 300.

[13] Chen K, Bak P. Is the universe operating at a self-organized critical state? [J]. Physical Letters A, 1989, 140: 299 - 309.

[14] Olami Z, Feder H J S, Chritensen K. Self organized criticality in a continuous, nonconservative celluar automation modeling earthquakes [J]. Physical Review Letters, 1992, 68: 1244 - 1247.

[15] Bak P, Chen K. Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: Self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics [J]. Ricerche Economiche, 1993, 47: 3 - 30.

[16] Meng T C, Rittel R, Zhang Y C. Inelastic diffraction and color singlet gluon clusters in high-energy hadron-hadron and lepton-hadron collisions [J]. Physical Review Letters, 1999, 82: 2044 - 2047.

[17] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small world networks [J]. Nature, 1998, 393: 440 - 442.

[18] Milgram S. The small world problems [J]. Psychology Today, 1967, 2: 60 - 67.

[19] Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999, 286: 509 - 512.

[20] Kulkarni R V, Adams E, Stroud D. Evolutionary dynamics in the Bak-Sneppen model on small world network [J]. Physical Letters A, 1999, 263: 341 - 345.

[21] Arcangelis L D, Hermann H J. Self-organized criticality on small world networks [J]. Physica A, 2002, 308: 545 - 549.

[22] Yang C B, Cai X. Jump of the minimal site and a new compellation function in Bak-Sneppen model [J]. European Physics Journal B, 2001, 22: 375 - 379.

[23] Davidson J, Liithje N. Common on $1/f$ noise in the Bak-Sneppen model [J]. Physical Review E, 2001, 63: 101 - 102.

[24] Head D A. Anisotropic Bak-Sneppen model [J]. Journal of Physica A, 1998, 31: 3977 - 3982.

[25] Newman M E J. The structure and function of complex networks [J]. SIAM Review 45: 167 - 256.

[26] Boguna M, Satorras R. Epidemic spreading in correlated complex networks [J]. Physical Review E, 2002, 66: 047104.

[27] Paczuski M, Maslov S, Bak P. Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models [J]. Physical Review E, 1996, 53: 414 - 443.

[28] Boer J D, Jackson A D, Wettig T. Criticality in simple models of evolution [J]. Physical. Review E, 1995, 51: 1059 - 1074.

[29] Richmond P, Solomon S. Power-laws are boltzman laws in disguise [J]. Available at: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0010222, 2000.

[30] Solomon S. Generalized Lotka-Volterra models of stock markets [J]. Advances in Complex Systems, 2000, 3: 301 - 322.

[31] Yamano T. Regulation effects on market with Bak-Sneppen model in high dimension [J]. International Journal of Modern Physics C, 2001, 12(9): 1329 - 1333.

[32] Marcel A. Evolution of economic enforces under heterogeneous political environment condition within a Bak-Sneppen like dynamics [J]. Physica A, 2004, 332: 394 - 402.