

文章编号:1000-6788(2006)04-0027-05

# 随机波动模型参数估计的新算法及其在上海股市的实证

刘凤芹<sup>1</sup>, 吴喜之<sup>2</sup>

(1. 北京师范大学社会发展与公共政策研究所, 北京 100875; 2. 中国人民大学统计学院, 北京 100872)

**摘要:** 研究用马尔科夫链蒙特卡罗(MCMC)算法估计随机波动模型的参数问题. 基于“前向滤波, 后向抽样”方法提出一种新算法, 并将新算法同原有算法进行了比较. 然后利用新算法对上海股市进行波动性分析, 发现中国涨跌停板制度对波动的持续性估计有着重要的影响, 忽视这些因素将会导致波动的持续性被高估.

**关键词:** 随机波动模型; 马尔科夫链蒙特卡罗(MCMC); 波动

**中图分类号:** O212; F830

**文献标识码:** A

## A New Algorithm for Estimating Stochastic Volatility Model and the Application in Shanghai Stock Market

LIU Feng-qin<sup>1</sup>, WU Xi-zhi<sup>2</sup>

(1. Institute of Social Development and Public Policy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China; 2. School of Statistics, Renmin University of China, Beijing 100872, China)

**Abstract:** In this paper, A new markov chain monte carlo algorithm for estimating stochastic volatility model is given. And the new algorithm is compared with old algorithms. Then authors apply stochastic volatility model to analyze the volatility of Shanghai stock market by the new algorithm. Empirical results indicate that stochastic volatility model performs well. On the other hand empirical results also indicate that price limit have much effect on the persistence of volatility.

**Key words:** stochastic volatility model; Markov chain Monte Carlo; volatility

### 1 引言

资产收益的波动在许多金融实践中扮演着关键性角色, 它是资本资产定价、期权定价、风险管理和投资组合理论的一个重要变量. 资产收益的波动具有时变和集聚(volatility clustering)等特点, 现在用来刻画这些特点的主要有 ARCH 类模型和随机波动模型. 随机波动模型与 ARCH 类模型相比, 具有更接近实际的优点, 缺点是参数难以估计. 本文所研究随机波动模型的具体形式如下:

$$y_t = \epsilon_t \cdot \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) \cdot \epsilon_t, \quad (1)$$

$$h_t = \phi \cdot h_{t-1} + \epsilon_t,$$

其中  $t=1, 2, \dots, n$ ;  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ ;  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ .  $\epsilon_t$  与  $\epsilon_t$  均为独立序列, 且彼此之间独立.  $y_t$  为所研究资产  $t$  时刻的收益(经过调整, 使其均值为零);  $h_t$  为波动的对数, 是不可观测的隐变量; 参数  $\phi$  刻画了波动的持续性.

记:  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ;  $H = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ , 则模型(1)参数的似然函数为:  $p(Y | \phi, \epsilon) = p(Y | H, \phi, \epsilon) \cdot p(H | \phi, \epsilon) dH$ . 可以看出此似然函数是一个高维积分, 难以用显式表达, 所以它的参数估计一直是一个难点. 最初用来估计随机波动模型的方法有广义矩方法(Generalized Method of Moments). 另一

收稿日期: 2004-04-05

作者简介: 刘凤芹(1975-), 女(汉), 籍贯山东潍坊, 现为北京师范大学社会发展与公共政策研究所讲师, 研究方向为数理统计.

种方法是拟最大似然 (Quasi-Maximum Likelihood) 方法. 此方法得出的估计量具有一致性和渐进正态性, 但对于有限样本, 特别是小样本, 效果不好. Jacquier, Polson 和 Rossi (1994)<sup>[11]</sup> 利用 MCMC 算法对随机波动模型 (1) 进行贝叶斯分析, 并与广义矩方法和拟最大似然做了比较, 发现: 用 MCMC 方法得到的贝叶斯估计优于别的方法. 此方法的不足之处在于: 对于  $H = (h_1, h_1, \dots, h_n)$  的各个分量是逐个抽取的, 各分量之间较强的相关性使得此算法收敛速度很慢. Kim 等 (1998)<sup>[21]</sup> 提出一种对  $H$  一次性抽取的 MCMC 算法. 此算法的大致思路是: 首先用条件正态线性状态空间模型来近似模型 (1); 在此基础上, 利用卡尔曼滤波和 the Simulation Signal Smoother<sup>[3]</sup> 方法来抽取  $H$  的样本; 最后再对抽取的样本进行“重新加权”来纠正近似带来的误差. Kim 等 (1998) 的算法<sup>[21]</sup> 具有 MC 误差低的优点, 但比较复杂, 特别是在抽取  $H$  时利用了 The Simulation Signal Smoother 方法, 使得计算量比较大. 本文在 Kim 等 (1998)<sup>[21]</sup> 算法的基础上提出一种新的算法, 新算法和原算法的本质不同在如何抽取  $H$  的样本 ( $H$  样本的抽取是随机波动模型推断算法的关键), 新算法利用“前向滤波, 后向抽样”方法来抽取  $H$  的样本, 从而避免了利用 The Simulation Signal Smoother 方法. 随后通过模拟实验与原算法进行比较, 结果表明新算法在保持原算法优点的基础上, 大大降低了计算量. 计算量的降低对 MCMC 算法是很重要的, 因为为了识别假收敛现象, 以及研究推断结果对先验和对初始值的敏感性, 往往需要对所研究的数据反复运行若干次算法.

在应用随机波动模型对中国股市进行实证方面: 王春峰等 (2003)<sup>[4]</sup> 利用随机波动模型对中国股市进行实证分析, 并与 GARCH 模型进行了比较; 苏卫东, 张世英 (2003)<sup>[5]</sup> 用变截距的随机波动模型对上海股市做了实证分析, 认为波动的结构变化可能导致上海股市波动的持续性被高估.

本文的第二节介绍新算法的关键部分, 即如何用“前向滤波, 后向抽样”方法来抽取  $H = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ , 并将新算法与原有算法进行了比较; 第三节利用新算法对上证综合指数进行实证分析, 发现一方面随机波动模型能较好的刻画上海股市的波动特征, 另一方面由于涨跌停板制度的变化, 使得随机波动模型的参数对于不同的样本区间有显著的区别; 第四节对本文进行总结, 并提出了值得进一步研究的问题.

## 2 基于“前向滤波, 后向抽样”方法的 MCMC 算法

### 2.1 模型的转化

模型 (1) 是一个非线性, 非正态的状态空间模型. 现在对此类模型的研究还不完善. 所以现在通常的做法是将其转化为条件正态线性状态空间模型来研究.

$$\text{记: } y_t^* = \log(y_t^2); \quad = \log(\quad^2); \quad Z_t = \log(\quad^2); \quad V_t = (\quad, h_t); \quad W_t = (0, \quad_t); \quad F = (1, 1); \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}.$$

进一步, 用混合正态分布  $\sum_{i=1}^7 p_i \cdot N(m_i, \quad_i)$  来近似  $Z_t$ . 其中  $p_i, m_i, \quad_i, i = 1, 2, \dots, n$  的值见 Titterington, Smith 和 Makov (1985)<sup>[6]</sup>.

则模型可转化为:

$$\begin{aligned} y_t^* &= F \cdot V_t + \sum_{i=1}^7 p_i \cdot N(m_i, \quad_i), \\ V_t &= G \cdot V_{t-1} + W_t. \end{aligned} \tag{2}$$

一般称此类模型为条件正态线性状态空间模型. 根据模型 (2) 待估计的参数转化为  $(\quad, \phi, \quad)$ .

为了便于设计算法, 引进指示变量  $\{S_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ , 在给定  $S_t$  的条件下,  $Z_t$  可以表示为:

$$\begin{aligned} Z_t | S_t = i &\sim N(m_i, \quad_i) \\ \Pr(S_t = i) &= p_i \end{aligned}$$

其中  $i = 1, 2, \dots, 7$ .

### 2.2 基于“前向滤波, 后向抽样”方法的 MCMC 算法

记:  $\quad = (\quad, \phi, \quad)$ . 假定  $\quad$  的联合先验分布为  $p(\quad)$ , 则据贝叶斯定理,  $\quad$  的后验分布为:

$$p(\quad | Y) \propto p(Y | \quad) p(\quad) \propto p(Y | H, \quad) \cdot p(H | \quad) \cdot p(\quad) dH.$$

则  $\quad$  的贝叶斯估计, 即后验均值为:



$$\hat{\theta} = \int \theta \cdot P(\theta | Y) d\theta = \int \left[ p(Y | H, \theta) \cdot P(H | \theta) dH \right] \cdot p(\theta) d\theta .$$

$\hat{\theta}$  为高维积分无法用传统方法计算. 故借助 MCMC 方法. MCMC 方法是一种模拟技术. 它通过建立一个平稳分布为  $p(\theta | Y)$  的马氏链来得到  $p(\theta | Y)$  的样本, 基于这些样本便可以做各种统计推断, 包括计算  $\hat{\theta}$ .  $H$  的存在以及  $Y$  为条件正态分布, 使得难以对后验分布  $p(\theta | Y)$  直接应用 MCMC 算法. 故根据数据增广 (data augmentation) 思想, 将  $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  以及指示变量  $S = (S_1, \dots, S_n)$  添加到参数空间中. 即, 对后验分布  $p(H, S, \theta | Y)$  进行分析. 根据各分量之间的相关性,  $(\theta, H)$  作为一个块分量,  $S$  作为一个块分量,  $\phi, \sigma^2$  各作为一个单元分量. 则本文的 Gibbs 算法为:

- 1) 设定初始值:  $S^0 = (S_1^0, S_2^0, \dots, S_n^0)$ ;  $\phi^0; (\sigma^2)^0$ , 并令  $i = 0$ ;
- 2) 抽取样本:  $(\theta, H)^{i+1} \sim p(\theta, H | Y, S^i, \phi^i, (\sigma^2)^i)$ ;
- 3) 抽取样本:  $S^{i+1} \sim p(S | Y, (\theta, H)^{i+1}, \phi^i, (\sigma^2)^i)$ ;
- 4) 抽取样本:  $\phi^{i+1} \sim p(\phi | Y, (\theta, H)^{i+1}, S^{i+1}, (\sigma^2)^i)$ ;
- 5) 抽取样本:  $(\sigma^2)^{i+1} \sim p(\sigma^2 | Y, (\theta, H)^{i+1}, \phi^{i+1}, S^{i+1})$ ;
- 6) 令  $i = i + 1$ , 并转到第 2 步.

$H$  的抽取是整个算法的关键, 其他变量的抽取比较容易. 本文的算法与原有的算法没有本质的不同. 故下面只介绍本文算法和原有算法不同的地方, 即上述算法的第二步对满条件分布  $p(\theta, H | Y, \sigma^2, \phi, S)$  的抽取, 其他步的做法见 Kim 等 (1998)<sup>[21]</sup>.

本文根据随机波动模型的具体特点, 利用 Carter 和 Kohn (1994)<sup>[7]</sup> 提出的“前向滤波, 后向抽样”思想, 设计了对隐随机向量  $H$  一次性抽取的算法.

基本思路为: 记:  $Y_t^* = (y_1^*, \dots, y_t^*)$ ,  $D_t^* = (Y_t^*, \sigma^2, \phi, S)$ ,  $D_0^* = (\sigma^2, \phi, S)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ . 因为  $V_t = (\theta, h_t)$ , 所以为了抽取  $p(\theta, H | Y, \sigma^2, \phi, S)$  的样本, 可以借助分布  $p(V_0, \dots, V_n | D_n^*)$ . 对后者有等式:  $p(V_0, V_1, \dots, V_n | D_n^*) = p(V_n | D_n^*) \cdot p(V_{n-1} | D_{n-1}^*, V_n) \dots p(V_1 | D_1^*, V_2) \cdot p(V_0 | D_0^*, V_1)$ . 故, 可以首先从  $p(V_n | D_n^*)$  中抽取  $(\theta, h_n)$ , 然后依次对  $t = n - 1, \dots, 2, 1, 0$  从  $p(V_t | D_t^*, V_{t+1})$  中抽取  $V_t$ , 也即: 从  $p(h_t | D_t^*, h_{t+1})$  中抽取  $h_t$  (因为此时  $V_t$  的第一分量  $\theta$  的值对所有的  $t$  都一样).

具体实施步骤可以分为以下两步:

第一步: 前向滤波. 在已知指示变量  $S$  的条件下, 对模型 (2) 进行卡尔曼滤波, 并记录由滤波得出的  $V_t$  的均值和方差, 记为  $V_t \sim N(m_t, C_t)$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, n$ .

第二步: 后向抽样. 首先从  $N(m_n, C_n)$  中抽取  $(\theta, h_n)$ . 然后依次对  $t = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$ , 利用已经抽取的  $h_{t+1}$  的值从后验分布  $p(h_t | D_t^*, h_{t+1})$  中抽取  $h_t$  的样本:

$$p(h_t | D_t^*, h_{t+1}) = p(h_{t+1} | h_t, D_t^*) \cdot p(h_t | D_t^*) \cdot \exp\left[-\frac{(h_{t+1} - \phi \cdot h_t)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{(h_t - m_{h_t})^2}{2 \cdot C_{h_t}}\right] \cdot N(\mu_t, \sigma_t^2)$$

其中:  $\sigma_t^2 = \frac{\sigma^2}{\phi^2 + \frac{\sigma^2}{C_{h_t}}}$ ;  $\mu_t = \frac{\phi \cdot h_{t+1} + m_{h_t} \cdot \frac{\sigma^2}{C_{h_t}}}{\phi^2 + \frac{\sigma^2}{C_{h_t}}}$ ;  $\frac{\sigma^2}{C_{h_t}} = \frac{\sigma^2}{2}$ ;  $m_{h_t}, \frac{\sigma^2}{C_{h_t}}$  分别为  $m_t, C_t$  中相应于  $h_t$  的分量.

表 1

真值	$\phi$	$\sigma^2$	$C_{h_t}$
	0.97	0.2	0.648
新算法	0.9804 (6.4e-4)	0.1802 (0.00054)	0.651 (0.00012)
原算法	0.9645 (6.3e-4)	0.1869 (0.00049)	0.667 (0.00024)

表 2

真值	$\phi$	$\sigma^2$	$C_{h_t}$
	0.92	0.45	1.23
新算法	0.926 (6.9e-5)	0.431 (0.00094)	1.12 (0.00032)
原算法	0.913 (5.5e-5)	0.435 (0.00061)	1.131 (0.00035)

### 2.3 算法比较

本部分利用模拟实验来比较本文的算法和 Kim 等(1998)<sup>[2]</sup>的算法. 根据金融实践中常见的情况, 假定参数  $(\phi, \lambda, \sigma)$  真值分别为: (0.97, 0.2, 0.648) 及 (0.92, 0.45, 1.23), 两种情况均抽取 1000 个样本, 并进行 100000 次迭代. 具体比较结果见表 1~2 (括号内的数字为 MC 标准差). 其中 Kim 等(1998)<sup>[2]</sup>的算法利用 Kim 等提供的程序包 SVPack; 而本文的算法通过 C++ 语言编写. 从表中可以看出, 本文的算法和 Kim 等(1998)<sup>[2]</sup>的算法估计的精度基本一致, 但在 Pentium PC 上 Kim 等(1998)<sup>[2]</sup>的算法运行 100000 次需要 30 分钟, 而本文的算法仅需要 19 分钟.

### 3 实证分析

本文采用上证综合指数从开市到 2002 年 9 月 20 日的收盘价的日数据. 考虑到我国股票市场经历了涨跌停板制度的实施、取消、再实施的反复过程, 政府监管措施的变化必将会对股市的波动产生重要的影响. 故根据涨跌停板制度的变化将样本区间分为四部分. 这四部分分别为: 第一: 开市到 1992 年 5 月 20 日; 第二: 1992 年 5 月 21 日到 1996 年 12 月 16 日; 第三: 1996 年 12 月 17 日到 2002 年 9 月 20 日; 第四: 1992 年 5 月 21 日到 2002 年 9 月 20 日. 这样分阶段的研究一方面可以减小不同的交易制度给模型拟合带来的影响, 另一方面又可以研究随机波动模型在不同情况下的表现. 本节分别对这四部分子数据和全部数据进行研究. 资产收益的计算公式为:

$$r_t = 100 \left\{ (\log(p_t) - \log(p_{t-1})) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log(p_i) - \log(p_{i-1})) \right\},$$

其中  $p_t$  为  $t$  时刻的收盘价.

表 3 给出了全部样本区间和四个子样本区间的峰度以及随机波动模型的参数估计结果(为了和原模型一致, 表中列出  $\hat{\sigma}$  的值, 而不是  $\sigma$ , 两者关系为:  $\hat{\sigma} = \exp(\sigma^2/2)$ ). 作者计算了拟合残差  $y_t / (\hat{\sigma} \exp(h_t/2))$  用来检验模型的拟合效果, 其中  $\hat{\sigma}$  为表 3 中的后验均值  $|Y$ ;  $h_t = \frac{1}{n-m} \sum_{i=m}^n h_{ti}$ ,  $h_{ti}$  的值可以直接从 MCMC 算法的运行结果中得到. 图 1 分别是各个不同样本区间(顺序同表 3)的拟合残差与正态分布的 Q-Q 图, 表 4 为各个残差的基本统计特征. 从这些图表中可以看出除从开市到 1992 年 5 月 20 日这段区间拟合不好外, 其余的残差基本上与标准正态分布吻合. 这说明随机波动模型较好的拟合了这些数据. 实证结果表明上海股市波动具有较高的持续性, 波动的幅度较大. 这与中国股市的发展阶段是相一致的.

表 3 不同样本区间的参数估计结果和峰度

时间段	$\hat{\sigma}   Y$	$\sigma   Y$	$\lambda   Y$	峰度
1992. 5. 21 ~ 2002. 9. 20	0.9246 (0.9001, 0.9457)	0.5439 (0.4650, 0.6132)	1.709 (1.404, 1.958)	19.66
1990. 12. 19 ~ 2002. 9. 20	0.9514 (0.9328, 0.9667)	0.4589 (0.3957, 0.5186)	1.512 (0.9321, 1.871)	127.57
1990. 12. 19 ~ 1992. 5. 20	0.9715 (0.9214, 0.9987)	0.4880 (0.3658, 0.6011)	0.817 (0.1302, 1.458)	9.289
1992. 5. 21 ~ 1996. 12. 16	0.8841 (0.8445, 0.9354)	0.5921 (0.4714, 0.7069)	2.452 (1.747, 2.92)	13.04
1996. 12. 17 ~ 2002. 9. 20	0.9174 (0.8687, 0.9507)	0.4164 (0.3189, 0.5128)	1.221 (0.8215, 1.621)	9.36

表 4 拟合残差的基本统计特征

时间段	均值	方差	峰度
1992. 5. 21 ~ 2002. 9. 20	-0.0509	0.6921	2.585
1990. 12. 19 ~ 2002. 9. 20	-0.0118	0.7378	2.670
1990. 12. 19 ~ 1992. 5. 21	-0.2098	0.6732	2.354
1992. 5. 21 ~ 1996. 12. 16	-0.0357	0.6803	2.554
1996. 12. 16 ~ 2002. 9. 20	0.0077	0.7637	2.714

从表 3 可以看出: 不同样本区间的拟合模型是有显著差异的. 主要原因是涨跌停板制度的变化, 另外还有宏观经济及突发事件影响. 对 1992 年 5 月 21 日到 1996 年 12 月 16 日的拟合结果与 1996 年 12 月 17 日到 2002 年 9 月 20 日的拟合结果比较可以看出: 刻画波动平均幅度大小的量从 2.452 降低到 1.221, 而表示波动持续性的量则

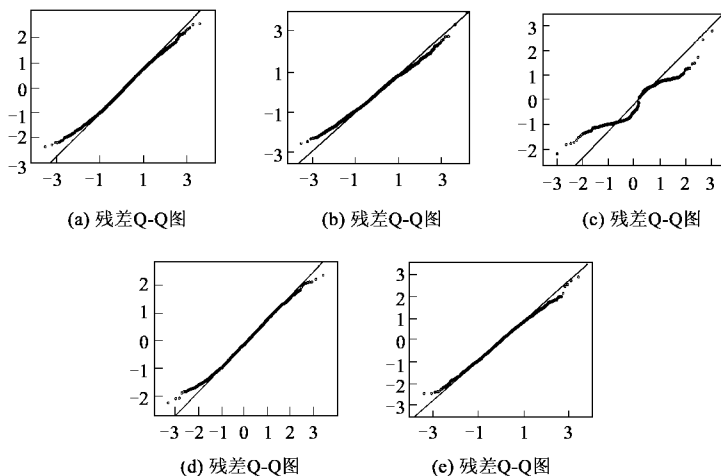


图 1

从 0.884 升高到 0.917,说明涨跌停板制度降低了波动的幅度,增加了波动的相关性。从开市到 1992 年 5 月 21 日这段时间股市处于初期阶段,各项政策不完善,变化较快,使得这期间资产收益的统计性质很不好。进一步比较全部样本的模型参数和峰度与去掉这一部分后得到的模型参数和峰度可以发现:这段时期的样本会扭曲其他样本原来的统计特征,使得参数估计得到虚假的结果。例如:1992 年 5 月 21 日到 2002 年 9 月 20 日样本的峰度值为 19.66,添加这段样本后峰度值猛增到 127.57。鉴于随机波动模型对样本区间的这种敏感性,在应用随机波动模型进行实证分析时,应根据所研究的实际问题,选择合理的样本区间。

#### 4 结论

本文在 Kim 等(1998)算法的基础上提出一种随机波动模型参数估计的新算法,并利用新算法对上海股市进行实证分析。本文所研究的是基本的随机波动模型,此模型较好的刻画了金融数据的主要特征<sup>[8]</sup>,但对杠杆效应这种股市中常见的现象,尚不能刻画。具有杠杆效应的随机波动模型<sup>[9]</sup>比基本的随机波动模型更具有实际应用价值,但如何对其进行高效的统计推断一直是一个难点。因此具有杠杆效应随机波动模型的推断算法成为值得进一步研究的问题。

#### 参考文献:

- [1] Jacquier E, Pilon N G, Rossi P E. Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion) [J]. Journal of Business and Economic Statistics, 1994, 12, 371 - 417.
- [2] Kim S, Shephard N, Chib S. Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models [J]. Review of Economic Studies, 1998, 65, 361 - 393.
- [3] Jong P, Shephard N. The simulation smoother for time series models [J]. Biometrika, 1995, 82, 339 - 350.
- [4] 王春峰, 蒋祥林, 李刚. 基于随机波动性模型的中国股市波动估计 [J]. 管理科学学报, 2003, 6(4): 63 - 72.  
Wang Chunfeng, Jiang Xianglin, Li Gang. Estimating volatility of Chinese stock market by stochastic volatility model [J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(4): 63 - 72.
- [5] 苏卫东, 张世英. 变截距 SV 模型及其在上海股市的实证 [J]. 系统工程理论方法应用, 2003, 12(3): 57 - 63.  
Su Weidong, Zhang Shiyong. Intercept change SV model and its empirical evidence in Shanghai stock market [J]. Systems Engineering Theory Methodology Applications, 2003, 12(3): 57 - 63.
- [6] Titterton D M, Smith A F M, Markov U E. Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions [M]. Chichester: John Wiley, 1985.
- [7] Carter C K, Kohn R. On Gibbs sampling for state space models [J]. Biometrika, 1994, 81, 3, 541 - 553.
- [8] Taylor S J. Modeling Financial Time Series [M]. Chichester: John Wiley, 1986.
- [9] Harvey A C, Ruiz E, Shephard N. Multivariate stochastic variance models [J]. Review of Economic Studies, 1994, 61: 247 - 264.