

# 基于偏微分方程的离心泵叶片反设计方法<sup>\*</sup>

张人会 杨军虎 李仁年

(兰州理工大学流体动力与控制学院, 兰州 730050)

**【摘要】** 为实现离心泵叶片的参数化优化设计,将微分方程分别应用于叶轮的轴面设计及叶片空间曲面的生成,首先用4次Bezier曲线控制叶轮轴面,用偏微分方程方法生成轴面流线及准正交线,其次用偏微分方程的方法来生成离心泵叶片空间曲面,根据叶片型线方程,利用控制叶片安放角的分布规律来控制叶片边界上点的圆周角坐标,从而控制微分方程的边界条件,最后达到控制叶片形状的目的。实现了叶片的参数化设计。采用梯度优化的方法将正问题的计算结果用于反问题中对叶片型线的更新,实现了泵叶片的优化设计。应用实例表明提出的离心泵叶片反设计方法是可行的。

**关键词:** 泵叶片 优化设计 反问题 偏微分方程

**中图分类号:** TH311 **文献标识码:** A

## Inverse Design Method of Centrifugal Pump Blade Based on PDE Method

Zhang Renhui Yang Junhu Li Rennian

(College of Fluid Power and Control, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

### Abstract

In order to implement the parametric optimization design of centrifugal pump blade, the partial differential equation was used to design the impeller meridian plane and the 3-D blade surface. Firstly, quartic Bezier curve was employed to design the meridian plane, and then the partial differential equation was introduced to produce the original streamline and meridian quasi-orthogonal lines. Secondly, the partial differential equation was used to generate the centrifugal pump blade surface. According to the blade streamline equation, the angular coordinates of dispersed points on pump blade boundary was calculated from the distributions of blade angle on boundary. Consequently the boundary-value of the partial differential equation was determined. The blades geometries was controlled by adjust the distribution of the blade angle along hub and shroud. The relation between the 3-D model of pump blade and the pump design parameters was built, to achieve the parametric design of pump blade. The gradient optimizing method was introduced to realize the optimization of pump blade. The calculation result of the flow field was used to renew the shape of pump blade. The calculation case shows that the presented inverse method of centrifugal pump blade is rational.

**Key words** Pump blade, Optimization design, Inverse problem, Partial differential equation

### 引言

随着流动模拟技术的发展,离心泵内流的正问题研究发展迅速,已经可以实现叶轮内流的全三维湍流工程计算;但由于反问题的复杂性,反问题的发展仍非常缓慢。目前,流体机械叶片的工程设计方

法仍然采用传统的一元、二元设计理论<sup>[1~4]</sup>,而且设计出的叶轮性能对设计者设计经验有很大的依赖性。目前虽然有一些研究者在叶轮的优化设计及叶片的正反问题迭代等方面进行了研究<sup>[5]</sup>,但是这些方法仍然存在很大的不足,如叶片几何形状的控制、修改不便,计算量大及寻优过程中还可能出现局部

最优的情况等。所以发展叶轮快速、便捷的反设计方法迫在眉睫,本文提出采用偏微分方程(PDE)的方法来设计离心泵叶片,把离心泵叶片的几何设计问题转换为偏微分方程的边值问题来求解。

## 1 反问题的数学模型

用偏微分方程(PDE)构造曲面的方法最早是由英国利兹大学的 Bloor 等人提出的<sup>[6-7]</sup>,它是用一组椭圆偏微分方程来设计曲面。假设在三维空间中, $X = X(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 表示曲面上的点,其中  $u, v$  为参数,而且三维空间上的点满足  $m$  阶微分方程

$$L_{u,v}^m(x) = F(u, v) \quad (1)$$

式中  $L_{u,v}^m$ ——以  $u, v$  为自变量的  $m$  阶微分算子  
 $F(u, v)$ ——以  $u, v$  为自变量的函数

目前大多采用如下的调和方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)^m X(u, v) = 0 \quad (2)$$

其中,  $u, v$  为计算域内的二维曲线坐标。由于该偏微分方程为平衡态方程,加上边界条件即构成了边值问题,由偏微分方程知识可知,只要边界条件足够光滑,则调和方程边值问题的解具有很好的光滑性,其中参数  $a$  用来控制  $u, v$  方向的相对光顺率。

离心泵叶片的设计实际上可以看作是一个功能曲面设计问题,只要给定边界条件通过求解式(2)就可以构造出叶片曲面。

所以此时叶片设计问题转换为给定边界条件下的偏微分方程的求解问题,而且叶片设计的关键在于控制边界条件,使得所生成的叶片曲面具有较好的水力性能。由于泵叶片的反问题一般都是以叶轮轴面为基础,对于叶轮轴面的设计可以用 4 次 Bezier 曲线来设计前后盖板流线,4 次 Bezier 曲线的 5 个控制点  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$ , 其中  $P_0, P_1, P_2$  三点共线,  $P_2, P_3, P_4$  三点共线。由 Bezier 曲线的性质可知,在首、末控制点处 Bezier 曲线与特征多边形的两边相切,分别在直线段  $\overline{P_0P_2}, \overline{P_2P_4}$  上移动  $P_1, P_3$  点来调整流线形状。利用椭圆偏微分方程的网格技术来离散叶轮轴面生成初始的流线及准正交线  $(z(u, v), r(u, v))$ (图 1)。

$$\nabla^2 \xi_i = P_i \quad (3)$$

而三维空间上的叶片实际上可以表示为  $X = X(z(u, v), r(u, v), \theta(u, v))$ , 所以叶片曲面可表示为叶轮轴面上关于  $\theta$  的  $m$  阶微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)^m \theta(u, v) = 0 \quad (4)$$

边界条件的给定要取决于方程的阶数,通常  $m$  可取

1, 2。  $m = 1$  时,方程为二阶椭圆型偏微分方程,所构造曲面的为  $C^0$  曲面;  $m = 2$  时所构造的曲面为  $C^1$  曲面。取  $m = 1$ , 则边界条件能方便地给出

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \theta(u, v) = 0 \\ \theta(0, v) = \theta_1(v) \\ \theta(u, 0) = \theta_2(u) \\ \theta(1, v) = \theta_3(v) \\ \theta(u, 1) = \theta_4(u) \end{cases} \quad (5)$$

如取  $m = 2$ , 则微分方程为 4 阶偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial u^4} + 2a^2 \frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial v^2} + a^4 \frac{\partial^4}{\partial v^4}\right) \theta = 0 \quad (6)$$

其边界条件除满足式(4)给定的第一类边界条件外,还需给定因变量在边界上 Neumann 边界条件,即圆周角坐标  $\theta$  在边界上的法向导数。

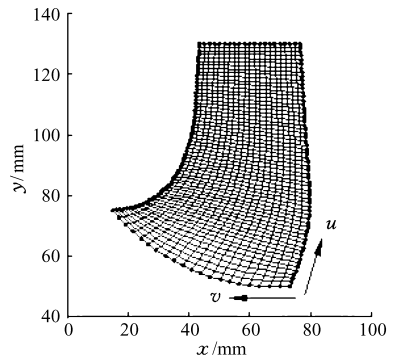


图 1 叶片的轴面图

Fig. 1 Meridian plane of the pump blade

## 2 边界条件及其优化设计

### 2.1 边界条件的确定

由上述叶片数学模型可知,要设计出叶片曲面,必须首先给出微分方程的边界条件,也即在叶片边界上点的圆周角坐标  $\theta$  值。由叶片的型线方程  $d\theta = ds / (r \tan \beta)$  可知,要求前、后盖板上的圆周角的分布,则必须先求出  $r(s)$  和  $\beta(s)$  的分布。由于叶轮轴面已知,所以叶片边界上的  $r(s)$  的关系已知,只要确定前、后盖板流线上的叶片安放角  $\beta$  的分布即可确定其  $\theta$  边值。由叶片设计知识可知一般  $\beta$  分布应单调,这里提出采用如下的分布函数来控制

$$\beta_i = \beta_+ + (\beta_- - \beta_+) \left[ P \frac{s_i}{s} + (1 - P) \frac{\tanh(Qs_i/s)}{\tanh Q} \right] \quad (7)$$

其中控制参数  $P$  用来控制非线性度;  $Q$  用来控制阻尼系数,  $\beta_1, \beta_2$  可由叶轮的水力设计得到,  $s_i, s$  可由叶轮轴面的数值化设计得到,由安放角  $\beta$  的分布及叶片型线方程积分即可得到  $\theta$  的分布,所以叶片包角也由此确定。

由上述的叶片反问题方法,用二阶椭圆型偏微分方程方法可以构造出叶片表面,叶片加厚时可以将该曲面作为叶片的工作面,由该曲面向叶片的背面加厚,叶片的实际厚度  $\delta$  可由水力设计按流线给定,其加厚时可根据其实际厚度  $\delta$  与圆周厚度  $s_u$  的关系按圆周厚度进行加厚操作,其中  $s_u$  表达式中轴面流线与轴面截线的夹角  $\lambda$  可近似用图 1 所示初始轴面流线与准正交线的夹角来替代,而且由计算流体力学中网格理论可计算其夹角  $\lambda$  满足

$$\cos\lambda = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad (8)$$

其中,张量  $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$  为曲线坐标系的度量张量<sup>[8]</sup>,根据已有的叶轮轴面网格(图 1)能求出其张量  $g_{ij}$ ,所以叶片表面各点的圆周厚度不难求得。根据上述方法,将得到叶轮叶片工作面和背面的离散数据点云导入三维造型软件 Pro/E,进行曲面拟合,即可得到泵叶轮的三维实体造型。

### 2.2 优化设计

根据上述的数值叶片模型,给定微分方程在轴面计算域上的边值条件,就能生成三维叶轮实体,前、后盖板上的边值可由提出的式(7)控制,叶片进口边在同一轴面上,出口边上圆周角从前盖板到后盖板线性变化,这样就可以由 4 个自变量来定义叶片形状,  $\mathbf{X} = [P_s, Q_s, P_h, Q_h]^T$ 。以泵的设计工况点效率最高为目标函数,为保证设计流量点扬程恒定,叶片进、出口安放角由水力设计得到。由于  $\eta = \gamma q H / (M\omega)$ ,所以优化问题的目标是确定叶片前、后盖板流线在进、出口之间最优的安放角分布,使得其叶片在额定转速时产生的水力损失最小,目标函数为极小值问题

$$I_{\min} = 1 - \gamma q H / (M\omega) \quad (9)$$

式中的  $H, M$  均为数值计算结果,沿着目标函数梯度的反方向更新设计变量  $\mathbf{X}$ 。

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n - \lambda \mathbf{G}\mathbf{X}^n \mathbf{E} \quad (10)$$

$$\Delta I = \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{X} \quad (11)$$

设计变量  $\mathbf{X} = [P_s, Q_s, P_h, Q_h]^T$ ,其中  $P_s, Q_s, P_h, Q_h$  为式(7)中的控制参数,分别用来调控前、后盖板流线上的安放角分布,沿梯度方向更新设计变量  $\mathbf{X}$  后,再依据前面提出的微分方程的边值问题的数值解即可达到更新叶片几何形状的目的。目标函数的梯度矢量  $\mathbf{G}^T$  的计算较困难,矢量  $\mathbf{G}^T$  有 4 个分量,每计算一个分量  $G_i (i = 1, 2, 3, 4)$  都要修改一次叶型,并且要计算修改叶片之后的流场,所以计算一次目标函数的梯度就需要多次求解流场,计算量较大。泵叶轮内流的计算可采用现有的商用 CFD 软

件进行流动模拟,计算精度一般均能满足工程要求。计算模型应用三维不可压湍流 Navier - Stokes 方程、RNG  $k - \epsilon$  两方程湍流模型、考虑壁面效应,在近壁处采用壁面函数。这样根据提出的离心泵叶片的微分方程模型进行 CAD 实体造型,并将正问题的计算结果用于反问题中对叶型的修改,实现 CAD/CFD 的紧密结合。

### 3 算例

运用本文提出的反问题方法,对已完成的水力模型设计进行反问题计算,其基本设计参数为:  $Q = 200 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $H = 20 \text{ m}$ ,  $n = 1450 \text{ r}/\text{min}$ ,  $\eta = 79\%$ ,依据上述反设计方法,由泵的水力设计可得到叶轮的轴面图(图 1),叶轮轴面图的生成及其离散均可通过自编软件程序实现,反问题模型的求解也需编制计算程序。最后通过求解二阶椭圆型偏微分方程的边值问题可以构造出叶片的三维实体模型,由该三维叶片模型也可生成叶片背面剪裁图如图 2 所示。利用 Fluent 软件对叶轮内流进行数值计算,得到泵外特性曲线如图 3 所示(叶轮 1),计算效率对设计变量  $\mathbf{X}$  的梯度,并沿着该梯度方向更新叶片实体造型,最后得到离心泵性能曲线如图 3 所示(叶轮 2),得到叶轮的最优设计,计算流程如图 4 所示。最优工况点与设计流量点重合,最高效率达到设计要求。

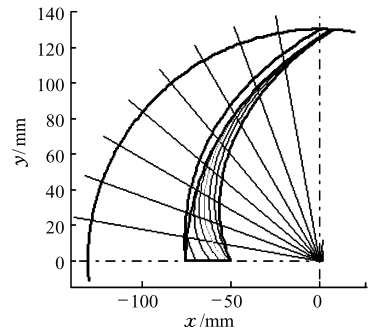


图 2 PDE 方法设计出的叶片剪裁图  
Fig. 2 Clipping drawing of the pump blade designed by PDE method

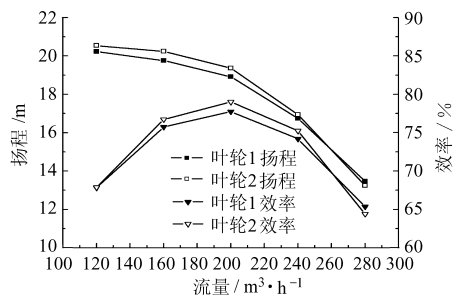


图 3 初始设计及优化设计后离心泵的性能曲线  
Fig. 3 Pump performance for the initialize design and the optimum design

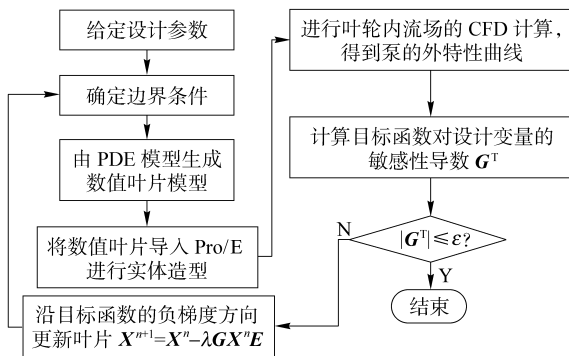


图4 离心泵叶轮反设计计算流程

Fig.4 Flow chart of the inverse design of centrifugal impeller

## 4 结束语

(1)提出了一种基于椭圆型偏微分方程的离心

泵叶片反问题方法,把离心泵叶片设计问题转换为数学上的偏微分方程的边值问题,实例研究表明该提出的方法是可行的。

(2)基于 *PDE* 的叶片设计方法克服了传统设计方法中叶片几何形状的控制、修改等诸多的不便,能够实现叶片的参数化设计,克服了传统设计方法中用烦琐的二维木模图表示三维扭曲叶片时存在的缺陷。

(3)该反设计方法实现了基于效率目标函数梯度的优化设计,将正问题的计算结果用于反问题中对叶型的更新,并将水力机械的水力设计、三维实体造型及流场的 *CFD* 分析三者紧密结合,实现叶片反问题的快速求解,数值试验表明该方法是有效的。

## 参 考 文 献

- 1 Zhang Renhui, Yang Junhu, Liu Yi. Investigation of numerical model of centrifugal pump blade [C] // 8th Asian International Fluid Machinery Conference, Yichang, China, 2005.
- 2 Zangeneh M, Goto A, Harada H. On the role of three dimensional inverse design methods in turbomachinery shape optimization [C] // Proceeding of the Mechanical Engineers, Part C, 1999, 213(1): 27~42.
- 3 M Samkaraiah, Sr Dgm. Automatic generation of pump impeller geometry [J]. World Pumps, 2000(406): 28~30.
- 4 Hideki Ono, Tatsuro Yashiki. Development of the design system for a mixed-flow centrifugal pump impeller [C] // 8th Asian International Fluid Machinery Conference, Yichang, China, 2005.
- 5 余志毅, 曹树良, 彭国义. 运用正反问题迭代法进行叶片式气液混输泵叶轮的水力设计 [J]. 机械工程学报, 2006, 42(4): 135~141.  
Yu Zhiyi, Cao Shuliang, Peng Guoyi. Hydraulic design of a multiphase rotodynamic pump and test verification [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(4): 135~141. (in Chinese)
- 6 Bloor M I G, Wilson M J. Generating blend surfaces using partial differential equations [J]. Computer-aided Design, 1989, 21(3): 165~171.
- 7 MIG Bloor, MJ Wilson. Using partial differential equations to generate free-form surfaces [J]. Computer-aided Design, 1990, 22(4): 202~212.
- 8 刘顺隆, 郑勤. 计算流体力学 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1998.
- 9 何有世, 袁寿其, 郭晓梅, 等. 带分流叶片的离心泵叶轮内三维不可压湍流的三维数值模拟 [J]. 机械工程学报, 2004, 40(11): 153~157.  
He Youshi, Yuan Shouqi, Guo Xiaomei, et al. Numerical simulation for 3-D incompressible turbulent flow in the impeller with splitting vanes of centrifugal pump [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(11): 153~157. (in Chinese)
- 10 王福军. 计算流体动力学分析 - CFD 软件应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.