

单轴介质加载鳍线的谱域导抗法

顾长青

(南京航空学院电子工程系, 南京 210016)

摘要 本文通过分析和推导, 将谱域导抗法扩展到单轴介质加载鳍线的特性分析。单轴介质的光轴方向既可平行又可垂直于介质分界面。通过对称双侧鳍线的有效介电常数的数值计算, 验证了本文方法的正确性。

关键词 鳍线; 单轴各向异性; 谱域导抗法; 有效介电常数

一、引言

自1979年T. Itoh提出谱域导抗法^[1]以来, 在各向同性介质构成的各种类微带结构(微带线、槽线、鳍线、微带天线及其阵列等)的特性分析中, 已经得到了广泛应用^[1,2]。但是, 在实际应用中, 理想的各向同性介质几乎是不存在的, 绝大多数介质材料人为或天然地呈现出各向异性。频率低时, 可用各向同性介质近似分析代替, 但随着频率升高, 特别在毫米波、亚毫米波波段, 各向异性的影响越来越大, 就必须计及。因此, 近年来, 对呈现各向异性的晶体、铁氧体和半导体等介质材料构成的各种类微带结构的分析研究引起了人们极大地注视。通常分析方法有谱域法, 其缺点是分析过程特别复杂。也有人将谱域导抗法扩展到一般各向异性介质基片方面做了一定地尝试, 文献[3]分析了蓝宝石、氮化硼和Epsilam-10单轴介质加载单侧鳍线的色散特性。

文献[4]计算了多层单轴介质基片微带天线的谐振频率。但他们只限于讨论单轴介质的光轴垂直于介质分界面的特殊情况。

本文用谱域导抗法分析计算了单轴介质加载对称双侧鳍线的传输特性。鳍线的几何结构以及坐标系, 如图1所示。单轴介质基片厚度为 $2d_2$, 它的光轴方向既可垂直又可平行于介质分界面。槽宽为 w , 矩形波导长、宽分别为 a , b 。在后面分析中, 假设波导中激励的是 TE_{10} 模, 并且导体是无耗的。

本文从麦克斯韦方程出发, 通过傅里叶变换和坐标旋转, 首先推导得到单轴介质中寻常波和非常波被分解成横

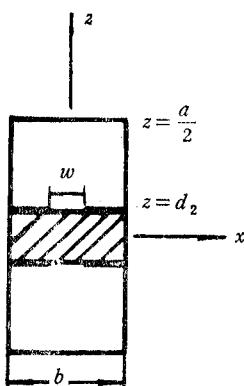


图1 对称双侧鳍线的几何结构

电波和横磁波后的波导纳，然后根据切向场连续的边界条件，在作一定的近似后，给出简单地耦合等值传输线。该等值传输线考虑了模式间的主要耦合，与 T. Itoh 提出的谱域导抗法比较，未增加任何复杂性，但使分析过程大大简化。通过对称双侧鳍线传输特性的数值计算，结果表明本文方法是正确的。

二、单轴介质的波导纳

单轴介质的相对介电常数的并矢形式在主系坐标系 (x, y, z) 中可表示为

$$\bar{\epsilon}_p = \epsilon_{\perp} \bar{I} + (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \hat{c} \hat{c} \quad (1)$$

式中， \bar{I} 为单位并矢， \hat{c} 是光轴方向的单位矢量。

建立新的正交坐标系 (u, v, z) ，其中 v 轴是波传播方向在 xoy 平面上的投影。它与坐标系 (x, y, z) 的关系如图 2 所示，即

$$[u, v, z]^T = \bar{s} \cdot [x, y, z]^T \quad (2)$$

其中，上标 T 表示矢量转置，且

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

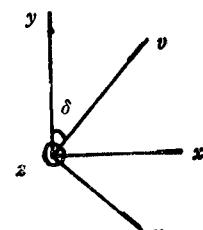


图 2 坐标旋转

旋转角 δ 大小由

$$\delta = \arccos(k_y/k_v) \quad (4)$$

确定，其中， $k_v = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 。

设时间依赖因子为 $\exp(j\omega t)$ ，通过傅里叶逆变换

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(k_x, k_y, z) \exp[-j(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \quad (5)$$

麦克斯韦方程在坐标系 (u, v, z) 中可表示如下

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}; \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{\omega \epsilon_0} \bar{\epsilon}_p \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) \quad (6)$$

式中

$$\bar{\epsilon}_p = \bar{s} \cdot \bar{\epsilon}_p \cdot \bar{s}^T \quad (7)$$

$$\mathbf{k} = k_v \hat{v} + j \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (8)$$

$\bar{\epsilon}_p$ 是单轴介质在坐标系 (u, v, z) 中相对介电常数的并矢式。

类似文献[5]的推导，得

$$\bar{W}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (9)$$

其中，波矩阵 $\bar{W}(\mathbf{k})$ 为

$$\bar{W}(\mathbf{k}) = (k_0^2 \epsilon_{\perp} - k^2) \bar{I} + \mathbf{k} \mathbf{k} + k_0^2 (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \bar{s} \cdot \hat{c} \hat{c} \cdot \bar{s}^T \quad (10)$$

它的行列式和伴随矩阵分别为

$$\det[\bar{W}(\mathbf{k})] = k_0^2 (k^2 - k_0^2 \epsilon_{\perp}) [\mathbf{k} \cdot \bar{\epsilon}_p \cdot \mathbf{k} - k_0^2 \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}] \quad (11)$$

$$\text{adj}[\bar{W}(\mathbf{k})] = (k_0^2 \epsilon_{\perp} - k^2) [k_0^2 \epsilon_{\parallel} \bar{I} - \mathbf{k} \mathbf{k} - k_0^2 (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \bar{s} \cdot \hat{c} \hat{c} \cdot \bar{s}^T]$$

$$+ k_0^2(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})(\mathbf{k} \times \hat{e} \cdot \hat{s}^T)(\mathbf{k} \times \hat{s} \cdot \hat{e}) \quad (12)$$

由(11)式可以看出, 它是由两项乘积构成。设 q_{\pm} 是行列式等于零时的两个根, 则

$$k_+^2 = k_0^2 \epsilon_{\perp} \quad (13)$$

和

$$\mathbf{k}_- \cdot \hat{\epsilon}_0 \cdot \mathbf{k}_- = k_0^2 \epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \quad (14)$$

这时, $\mathbf{k}_{\pm} = k_0 \delta + q_{\pm} \hat{e}$, 它给出了单轴介质中波的传播方向, 因 k_+ 与波法矢方向无关, 称为寻常波, k_- 与波法矢方向有关, 称为非常波。

在单轴介质中, 电场可表示为^[3]

$$\tilde{\mathbf{E}} = \text{adj}[\bar{\mathbf{W}}(\mathbf{k})] \cdot \mathbf{a} \quad (15)$$

式中, \mathbf{a} 是一任意矢量。

对于寻常波, (12)式变为

$$\text{adj}[\bar{\mathbf{W}}(\mathbf{k})] = k_0^2(\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})(\mathbf{k}_+ \times \hat{e} \cdot \hat{s}^T)(\mathbf{k}_+ \times \hat{s} \cdot \hat{e}) \quad (16)$$

选用 $\mathbf{a} = (\mathbf{k} \times \hat{s} \cdot \hat{e})$, 用(15)式可得到电场方向为

$$\tilde{\mathbf{e}}_+ = \mathbf{k}_+ \times \hat{s} \cdot \hat{e} \quad (17)$$

磁场 \mathbf{H} 的方向由(6)式中第一式确定如下

$$\mathbf{h}_+ = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k}_+ \times \tilde{\mathbf{e}}_+ \quad (18)$$

对于非常波, 利用(12)式并选取 $\mathbf{a} = \hat{s} \cdot \hat{e}$, 则由(15)式得到电场方向为

$$\tilde{\mathbf{e}}_- = k_0^2 \epsilon_{\perp} \hat{s} \cdot \hat{e} = \mathbf{k}_- \cdot (\hat{s} \cdot \hat{e}) \cdot \mathbf{k}_- \quad (19)$$

磁场 \mathbf{H} 的方向仍由(18)式确定。

当 $\hat{e} = \hat{z}$ 时, 由(13)和(14)式得到寻常波和非常波沿 z 方向的传播常数

$$q_+ = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{\perp} - k_v^2}, \quad \text{Im}(q_+) < 0; \quad q_- = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{\perp} - \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} k_v^2}, \quad \text{Im}(q_-) < 0 \quad (20)$$

利用(17)~(19)式, 可求出如下波导纳表达式

$$Y_+^h = \frac{\tilde{h}_{e+}}{\tilde{\epsilon}_{e+}} = \frac{q_+}{\omega \mu_0}; \quad Y_-^e = - \frac{\tilde{h}_{e-}}{\tilde{\epsilon}_{e-}} = - \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\perp}}{q_-} \quad (21)$$

式中, 上标 h, e 分别表示 TE 和 TM 模。可以看出, 寻常波是 TE 波, 非常波是 TM 波。它们之间不存在模式耦合。上面导出的波导纳公式完全与文献[3, 4]相同。

当 $\hat{e} \perp \hat{z}$ 时, 可设光轴方向 \hat{e} 在主系坐标系 (x, y, z) 中为

$$\hat{e} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \quad (22)$$

其中, φ 是光轴和 x 轴的夹角。由(13)、(14)式得到寻常波和非常波沿 z 方向的传播常数

$$\left. \begin{aligned} q_+ &= \sqrt{k_0^2 \epsilon_{\perp} - k_v^2}, \quad \text{Im}(q_+) < 0 \\ q_- &= \frac{1}{\epsilon_{\perp}} \sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} (k_0^2 \epsilon_{\perp} - k_v^2) + \epsilon_{\perp} (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) k_v^2 \cos^2(\delta + \varphi)}, \quad \text{Im}(q_-) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

利用(17)~(19)式, 可求出如下波导纳表达式

$$Y_+^h = \frac{\tilde{h}_{e+}}{\tilde{\epsilon}_{e+}} = \frac{q_+}{\omega \mu_0}; \quad Y_-^e = - \frac{\tilde{h}_{e-}}{\tilde{\epsilon}_{e-}} = - \frac{\tilde{h}_{e+}}{\tilde{\epsilon}_{e+}} = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\perp}}{q_+} \quad (24)$$

$$Y^k = \frac{\tilde{h}_{u-}}{\tilde{e}_{u-}} = \frac{q_-}{\omega \mu_0}; \quad Y^e = -\frac{\tilde{h}_{u-}}{\tilde{e}_{u-}} = \frac{\omega \epsilon_0 \sigma_+ q_-}{q_+^2} \quad (25)$$

此时，寻常波和非常波既包含 TE 波又包含 TM 波。不能简单地将它们分开。

三、谱域导抗法

由于图 1 的缝隙结构关于 x 轴对称，所以 $z = 0$ 的平面可用一磁壁代替，如图 3 所示。根据 $x = \pm b/2$ 的边界条件可求得 k_x 有下列离散值

$$k_{xn} = \begin{cases} 2n\pi/b, & n = 0, 1, 2, \dots, E, \text{ 为奇模} \\ (2n-1)\pi/b, & n = 1, 2, 3, \dots, E, \text{ 为偶模} \end{cases} \quad (26)$$

在 I 区的空气介质中，电、磁场在 (u, v) 方向的分量用 $(\tilde{E}_u^{(I)}, \tilde{E}_v^{(I)})$ 和 $(\tilde{H}_u^{(I)}, \tilde{H}_v^{(I)})$ 表示。在 II 区的单轴介质中，电、磁场在 (u, v) 方向的分量用 $(\tilde{E}_u^{(II)}, \tilde{E}_v^{(II)})$ 和 $(\tilde{H}_u^{(II)}, \tilde{H}_v^{(II)})$ 表示，并且 II 区的电场有下列关系式

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_u^{(II)} \\ \tilde{E}_v^{(II)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{u+} & e_{u-} \\ e_{v+} & e_{v-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+ \\ C_- \end{bmatrix} \quad (27)$$

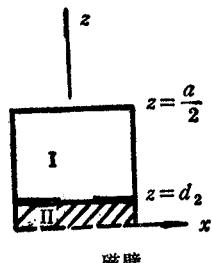


图 3 图 1 的简化结构

因此，在 $z = d_2$ 分界面处，边界条件为

$$\tilde{E}_u^{(I)} - \tilde{E}_u^{(II)} = 0; \quad \tilde{H}_v^{(I)} - \tilde{H}_v^{(II)} = \tilde{J}_u \quad (28)$$

$$\tilde{E}_v^{(I)} - \tilde{E}_v^{(II)} = 0; \quad \tilde{H}_u^{(I)} - \tilde{H}_u^{(II)} = -\tilde{J}_v \quad (29)$$

式中， \tilde{J}_u 和 \tilde{J}_v 分别是导带上电流 J_u 和 J_v 的傅里叶变换。

对于 $\hat{z} = z$ 情况，根据(28)和(29)式以及 $z = 0$ 和 $z = a/2$ 处的边界条件可推得

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_u \\ \tilde{J}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}^k & 0 \\ 0 & \tilde{Y}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_u \\ \tilde{E}_v \end{bmatrix} \quad (30)$$

在式中， \tilde{E}_u 和 \tilde{E}_v 上标 I 已略去， \tilde{Y}^k 、 \tilde{Y}^e 是图 4 等值传输线在 $z = d_2$ 处总的输入导纳

$$\tilde{Y}^k = \tilde{Y}_{u_p}^k + \tilde{Y}_{d_n}^k; \quad \tilde{Y}^e = \tilde{Y}_{u_p}^e + \tilde{Y}_{d_n}^e \quad (31)$$

其中

$$\tilde{Y}_{u_p}^k = -jY^k \operatorname{ctg}(q_1 d_1), \quad \tilde{Y}_{d_n}^k = jY^k \operatorname{tg}(q_+ d_2) \quad (32)$$

$$\tilde{Y}_{u_p}^e = -jY^e \operatorname{ctg}(qd_1), \quad \tilde{Y}_{d_n}^e = jY^e \operatorname{tg}(q_- d_2) \quad (33)$$

式中， $d_1 = a/2 - d_2$ ， q_\pm ， Y^k ， Y^e 分别由(20)，(21)式给出，对于空气介质， q ， Y^k ， Y^e 分别为

$$q = \sqrt{k_0^2 - k_v^2}, \quad \operatorname{Im}(q) < 0 \quad (34)$$

$$Y^k = q/(\omega \mu_0), \quad Y^e = \omega \epsilon_0 / q \quad (35)$$

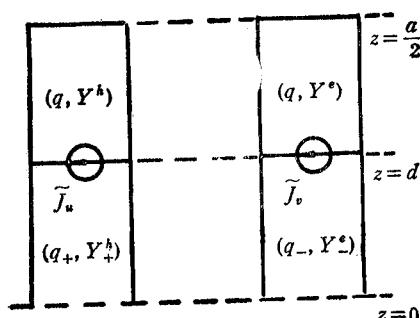


图 4 $\hat{z} = z$ 情况的等值传输线

与槽间电场 \tilde{E}_u 和 \tilde{E}_v 之间关系为

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_u \\ \tilde{J}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^{**} & \tilde{G}^{*y} \\ \tilde{G}^{y*} & \tilde{G}^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_u \\ \tilde{E}_v \end{bmatrix} \quad (36)$$

利用坐标反旋转，可得导带上电流分量 \tilde{J}_u 和 \tilde{J}_v

其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G}^{xx} &= \tilde{Y}^h \cos^2 \delta + \tilde{Y}^e \sin^2 \delta \\ \tilde{G}^{xy} &= \tilde{G}^{yx} = \sin \delta \cos \delta (\tilde{Y}^e - \tilde{Y}^h) \\ \tilde{G}^{yy} &= \tilde{Y}^e \cos^2 \delta + \tilde{Y}^h \sin^2 \delta \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

对于 $\hat{c} \perp \hat{z}$ 情况, 仍按照 $\hat{c} = \hat{z}$ 情况的方法分析, 最后表达式与(36)式相同。不过在推导过程中忽略了 TE 与 TM 模间的耦合, 并且 \tilde{Y}^h 和 \tilde{Y}^e 由图 5 等值传输线给出, 它们表示 $z = d_{2+}$ 处总的输入导纳。其中

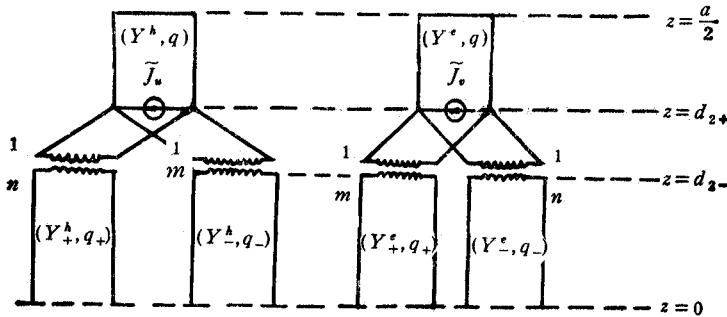


图 5 $\hat{c} \perp \hat{z}$ 情况的等效传输线

$$\tilde{Y}_{u_p}^h = -jY^h \operatorname{ctg}(qd_1); \quad \tilde{Y}_{d_n}^h = jn^2 Y_+^h \operatorname{tg}(q_+ d_2) + jm^2 Y_-^h \operatorname{tg}(q_- d_2) \quad (38)$$

$$\tilde{Y}_{u_p}^e = -jY^e \operatorname{ctg}(qd_1); \quad \tilde{Y}_{d_n}^e = jn^2 Y_+^e \operatorname{tg}(q_- d_2) + jm^2 Y_-^e \operatorname{tg}(q_+ d_2) \quad (39)$$

式中 n 和 m 称为理想变压器的匝数比, 由下式表示为

$$n = \sqrt{\tilde{e}_{u+}\tilde{e}_{v-}/\Delta}; \quad m = \sqrt{-\tilde{e}_{u-}\tilde{e}_{v+}/\Delta} \quad (40)$$

其中, $\Delta = \tilde{e}_{u+}\tilde{e}_{v-} - \tilde{e}_{u-}\tilde{e}_{v+}$ 。应注意的是, 尽管 n 和 m 随不同模式而变化, 但是恒有 $n^2 + m^2 = 1$ 的关系式。将 $\tilde{e}_{u\pm}$ 和 $\tilde{e}_{v\pm}$ 表达式代入(40)式, 得到 n 和 m 的具体形式如下

$$\left. \begin{aligned} n &= \sqrt{q_+^2 \sin^2(\delta + \varphi) / [k_0^2 \epsilon_{\perp} - k_v^2 \sin^2(\delta + \varphi)]} \\ m &= \sqrt{k_0^2 \epsilon_{\perp} \cos^2(\delta + \varphi) / [k_0^2 \epsilon_{\perp} - k_v^2 \sin^2(\delta + \varphi)]} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

对(36)式使用谱域伽略金法和帕色瓦定理, 求得下列特征方程

$$\begin{bmatrix} W^{xx} & W^{xy} \\ W^{yx} & W^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = 0 \quad (42)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} W_{pr}^{xx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_p(k_{xn}) \tilde{G}^{xx}(k_{xn}, k_y) \xi_r(k_{xn}) \\ W_{ps}^{xy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_p(k_{xn}) \tilde{G}^{xy}(k_{xn}, k_y) \eta_s(k_{xn}) \\ W_{qr}^{yx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta_q(k_{xn}) \tilde{G}^{xy}(k_{xn}, k_y) \xi_r(k_{xn}) \\ W_{qs}^{yy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta_q(k_{xn}) \tilde{G}^{yy}(k_{xn}, k_y) \eta_s(k_{xn}) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$\xi_r(k_s)$ 和 $\eta_r(k_s)$ 是文献[6]给出的基函数

$$\xi_r(x) = \frac{\cos \left[(r-1)\pi \left(\frac{2x}{w} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{w} \right)^2}}, \quad \eta_r(x) = \frac{\sin \left[s\pi \left(\frac{2x}{w} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{w} \right)^2}} \quad (44)$$

的傅里叶变换。由特征方程(42)不难求出有效介电常数。

四、数值比较

为了验证本文提出的谱域导抗法的正确性，我们选用文献[6]给出的几何结构参数，并进行了数值结果比较。在数值计算中，取基函数数为3， W_{pr}^{xx} , W_{pr}^{xy} , W_{qr}^{yx} , W_{qr}^{yy} 表达式中求和项为200，迭代精度为 10^{-4} 。

本文首先计算了单轴介质($\epsilon_{||} = 3.5$, $\epsilon_{\perp} = 3.0$)加载对称双侧鳍线的有效介电常数，结果示于表1。表1中，标准波导为WR-28($7.112 \times 3.556 \text{ mm}^2$)，槽宽为0.5 mm，介质基片厚度为0.125 mm。其次，计算了单轴介质($\epsilon_{||} = 11.6$, $\epsilon_{\perp} = 9.4$)加载对称双侧鳍线的有效介电常数随频率变化曲线，如图6所示。对于图6的曲线，标准波导仍为WR-28，槽宽为1mm，介质基片厚度为0.254 mm。在表1和图6曲线中，我们同时给出了文献[6]的数值结果，比较后可以看出，结果是吻合的。

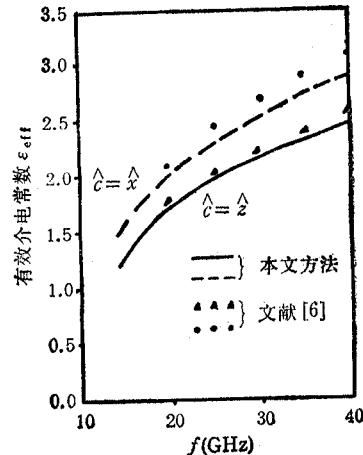


图6 ϵ_{eff} 随 f 的变化曲线

表1 对称双侧鳍线有效介电常数比较

		$f(\text{GHz})$	30	40	50	60
$\hat{c} = \hat{x}$	文献 [6]	1.0843	1.1872	1.2420	1.2791	
	本文方法	1.08198	1.16272	1.20618	1.23606	
$\hat{c} = \hat{z}$	文献 [6]	1.0302	1.1300	1.1814	1.2141	
	本文方法	1.0408	1.12134	1.16366	1.19171	

五、结 论

综述上面分析和数值结果，运用谱域导抗法分析单轴介质加载对称双侧鳍线的特性，不但大大简化了特征方程的推导过程，而且能得到较高精度的数值解。本文方法也适用于其它各种单轴介质加载的类微带结构。

参考文献

- [1] T. Itoh, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-28**(1980)7, 733--736.
- [2] T. Itoh, W. Menzel, *IEEE Trans. on AP*, **AP-29**(1981)1, 63—68.
- [3] A.-A. T. K. Shalaby, A. Kumar, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-35**(1987)4, 448—450.
- [4] R. M. Nelson, D. A. Rogers, A. G. Dassuncao, *IEEE Trans. on AP*, **AP-38**(1990)7, 973—981.
- [5] H. C. Chen 著, 梁昌洪等译, 电磁波理论——无坐标方法, 电子工业出版社, 北京, 1988年。
- [6] H-Y. Yang, N. G. Alexopoulos, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-35**(1987)1, 24—29.

A SPECTRAL-DOMAIN IMMITTANCE APPROACH FOR FIN-LINES WITH UNIAXIALLY ANISOTROPIC SUBSTRATES

Gu Changqing

(Department of Electronic Engineering, Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing 210016)

Abstract A characteristic analysis of the finlines with uniaxially anisotropic substrates using the spectral-domain immittance approach is presented. The optical axis of uniaxial substrate is either perpendicular or parallel to the substrate plane. This approach is tested to be correct, through the numerical calculation of the effective dielectric constant of a bilateral symmetry finlines.

Key words Finline; Uniaxial anisotropy; Spectral-domain immittance approach; Effective dielectric constant