

互阻抗精度对实现天线极低副瓣的限制

张林让 张玉洪

(西安电子科技大学电子工程研究所,西安 710071)

摘要 实现极低副瓣阵列天线需要作精确的互耦补偿。如果阵列的互阻抗(或互耦系数)矩阵确知,理论上可以精确补偿互耦的影响,从而实现极低副瓣接收。但无论是计算还是测量得到的互阻抗矩阵都只有一定的精度,这个精度最终决定了补偿效果。本文研究了极低副瓣阵列天线中互耦补偿对互阻抗精度的要求;推导出了互阻抗误差与通道幅相误差的关系;进而得到了互阻抗误差与副瓣电平的关系。

关键词 阵列天线;互耦;低副瓣;容差;数字波束形成

一、引言

目前,极低副瓣天线已经成为高性能电子探测系统的一个重要组成部分,特别是工作在有严重地物和电子干扰环境中的雷达(如机载雷达),必须采用副瓣尽可能低的天线。但是,由于天线单元间互耦和各种误差的存在,限制了极低副瓣天线的实现。关于误差对天线性能的影响和误差控制、校正等问题,已发表了许多论文^[1-4]。研究结果表明,当其它误差满足要求后,互耦就成了影响极低副瓣天线实现的关键因素,必须进行补偿。

文献[4]指出,由于互耦的存在,实际接收到的信号矢量为

$$\mathbf{V} = (\mathbf{I} + \mathbf{Z})^{-1}\mathbf{V}_0 \quad (1)$$

式中, \mathbf{Z} 为归一化(归一于负载阻抗 Z_L)互阻抗矩阵, \mathbf{I} 为单位矩阵, $\mathbf{V}_0^T = [V_{01}V_{02}\cdots V_{0N}]$ 为理想信号(即不计互耦时的信号)矢量, $\mathbf{V}^T = [V_1V_2\cdots V_N]$ 。假设阵列加权矢量 $\mathbf{W}^T = [W_1W_2\cdots W_N]$, \mathbf{V}_0 为理想导向矢量,则计及互耦时的接收天线方向图为

$$f(u) = \mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{W}^T (\mathbf{I} + \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{V}_0 \quad (2)$$

若令

$$\mathbf{W}^T = \mathbf{W}_0^T (\mathbf{I} + \mathbf{Z}) \quad (3)$$

式中 $\mathbf{W}_0^T = [W_{01}W_{02}\cdots W_{0N}]$ 为不计互耦时的理想权矢量,则有

$$f(u) = \mathbf{W}_0^T \mathbf{V}_0 = f_0(u) \quad (4)$$

$f_0(u)$ 为不计互耦时的理想方向图。这就是说,若对理想权 \mathbf{W}_0 作如(3)式所示的校正,就可完全补偿互耦的影响,得到所需要的方向图。

采用精确的电子线路补偿技术,特别是采用数字波束形成(DBF)技术,理论上可以精确补偿天线互耦的影响,实现极低副瓣接收。但是,这种精确补偿的前提是要准确知道

互阻抗(或互耦系数)矩阵, 而实际得到的互阻抗矩阵总有一定的误差。这种误差一般是随机的, 无法准确知道, 它们将决定补偿效果, 最终影响天线的副瓣电平。本文主要研究阻抗精度与副瓣电平的关系。首先推导了由阻抗误差引起的通道误差的大小, 由此给出了阻抗误差与副瓣电平的关系, 最后用计算机模拟验证了所得结论。

二、阻抗误差与通道幅相误差的关系

不管什么原因误差, 最终都表现为各路信号的幅相误差。因此, 本文首先研究阻抗误差与通道幅相误差的关系。

有误差的互阻抗矩阵可表示为

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} + \Delta\mathbf{Z} \quad (5)$$

式中 $\Delta\mathbf{Z}$ 是归一化互阻抗误差矩阵。这时校正权矢量变为

$$\mathbf{W}'^T = \mathbf{W}_0^T (\mathbf{I} + \mathbf{Z} + \Delta\tilde{\mathbf{Z}}) \quad (6)$$

由于互阻抗误差而造成的校正权矢量误差为

$$\Delta\mathbf{W}^T \triangleq \mathbf{W}'^T - \mathbf{W}^T = \mathbf{W}_0^T \Delta\mathbf{Z} \quad (7)$$

由(3)和(7)两式可得

$$\Delta\mathbf{W}^T = \mathbf{W}^T (\mathbf{I} + \mathbf{Z})^{-1} \Delta\mathbf{Z} \quad (8)$$

对上式两边取范数, 得

$$\|\Delta\mathbf{W}^T\| \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{Z})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{W}^T\| \cdot \|\Delta\tilde{\mathbf{Z}}\| \quad (9)$$

采用 l_2 范数, 并考虑到

$$\|\Delta\mathbf{W}^T\|_2 = \|\Delta\mathbf{W}\|_2 \quad \text{和} \quad \|\mathbf{W}^T\|_2 = \|\mathbf{W}\|_2$$

(9) 式可写成

$$\frac{\|\Delta\mathbf{W}\|_2}{\|\mathbf{W}\|_2} \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{Z})^{-1}\|_2 \cdot \|\Delta\mathbf{Z}\|_2 \quad (10)$$

矩阵的 l_2 范数等于矩阵的谱半径^[5], 即

$$\|\Delta\mathbf{Z}\|_2 = [\rho(\Delta\mathbf{Z}^H \Delta\mathbf{Z})]^{1/2} \quad (11)$$

式中“H”代表共轭转置。阻抗误差矩阵可表示为

$$\Delta\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{Z}_{11} & \Delta\tilde{Z}_{12} & \cdots & \Delta\tilde{Z}_{1N} \\ \Delta\tilde{Z}_{21} & \Delta\tilde{Z}_{22} & \cdots & \Delta\tilde{Z}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\tilde{Z}_{N1} & \Delta\tilde{Z}_{N2} & \cdots & \Delta\tilde{Z}_{NN} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中 $\Delta\tilde{Z}_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$) 是第 i 个和第 j 个阵元之间的归一化互阻抗误差。天线单元的互阻抗一般通过计算或测量得到, 而实际工作中, 更多的是采用理论计算与实测相结合的方法, 以减少工作量和防止某些明显的测量误差。在这种情况下, 一般可认为误差是独立同分布的, 且假设均值为零, 方差为 σ_z^2 , 即有

$$E[\Delta\tilde{Z}_{ij}] = 0$$

$$E[\Delta\tilde{Z}_{ij} \Delta\tilde{Z}_{m,n}^*] = \begin{cases} \sigma_z^2, & \text{当 } i = m, j = n \text{ 时} \\ 0, & i \neq m \text{ 或 } j \neq n \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \Delta Z^H \Delta Z &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{i1}^* \Delta \tilde{Z}_{i1} & \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{i1}^* \Delta \tilde{Z}_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{i1}^* \Delta \tilde{Z}_{iN} \\ \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{i2}^* \Delta \tilde{Z}_{i1} & \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{i2}^* \Delta \tilde{Z}_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{i2}^* \Delta \tilde{Z}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{iN}^* \Delta \tilde{Z}_{i1} & \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{iN}^* \Delta \tilde{Z}_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{iN}^* \Delta \tilde{Z}_{iN} \end{bmatrix} \\ &= N \begin{bmatrix} r_2(1, 1) & r_2(1, 2) & \cdots & r_2(1, N) \\ r_2(2, 1) & r_2(2, 2) & \cdots & r_2(2, N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2(N, 1) & r_2(N, 2) & \cdots & r_2(N, N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $r_2(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \tilde{Z}_{im}^* \Delta \tilde{Z}_{in}$, ($m = 1, 2, \dots, N$; $n = 1, 2, \dots, N$) 当 N 较大时, 有 $r_2(m, n) \approx E[\Delta \tilde{Z}_{im}^* \Delta \tilde{Z}_{in}]$, 结合前面对互阻抗误差的假设, 有

$$\Delta Z^H \Delta Z \approx N \begin{bmatrix} \sigma_z^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

故由(11)式, 可得

$$\|\Delta Z\|_2 \approx \sqrt{N} \sigma_z \quad (15)$$

将(15)式代入(10)式得

$$\frac{\|\Delta W\|_2}{\|W\|_2} \leq \|(I + Z)^{-1}\|_2 \sqrt{N} \sigma_z \quad (16)$$

另一方面, 根据阵列的误差理论, 通道误差等效于权值扰动, 等效权值可表示为

$$W'_n = W_n(1 + \delta_n) \exp(j\phi_n) \quad (17)$$

其中 δ_n , ϕ_n 分别为通道的幅度误差和相位误差, W_n 为无误差权。将上式表示为

$$W'_n = W_n + \Delta W_n \quad (18)$$

则权扰动 ΔW_n 为

$$\Delta W_n = W_n[(1 + \delta_n) \exp(j\phi_n) - 1]$$

写成矩阵形式

$$\begin{aligned} \Delta W &= \begin{bmatrix} \Delta W_1 \\ \Delta W_2 \\ \vdots \\ \Delta W_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + \delta_1) \exp(j\phi_1) - 1 \\ (1 + \delta_2) \exp(j\phi_2) - 1 \\ \vdots \\ (1 + \delta_N) \exp(j\phi_N) - 1 \end{bmatrix} \\ \Delta W^H \Delta W &= \sum_{i=1}^N |W_i|^2 \cdot |(1 + \delta_i) \exp(j\phi_i) - 1|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N |W_i|^2 \cdot [2 + 2\delta_i + \delta_i^2 - 2(1 + \delta_i) \cos \phi_i] \end{aligned} \quad (19)$$

设 δ_i, ϕ_i 均为零均值且相互独立, 对(19)式两边取均值得

$$\overline{\Delta \mathbf{W}^H \Delta \mathbf{W}} = \sum_{i=1}^N |W_i|^2 \cdot (2 + \overline{\delta_i^2} - 2 \overline{\cos \phi_i}) \quad (20)$$

设互阻抗误差较小, 这时有 $\cos \phi_i \approx 1 - \phi_i^2/2$, 进一步假设 δ_i, ϕ_i 的方差分别为 σ_δ^2 和 σ_ϕ^2 , 则(20)式变为

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \mathbf{W}^H \Delta \mathbf{W}} &= \sum_{i=1}^N |W_i|^2 (\sigma_\delta^2 + \sigma_\phi^2) \\ &= (\sigma_\delta^2 + \sigma_\phi^2) \sum_{i=1}^N |W_i|^2 \end{aligned} \quad (21)$$

根据 l_2 范数定义, (21)式可写成

$$\|\Delta \mathbf{W}\|_2^2 / \|\mathbf{W}\|_2^2 = \sigma_\delta^2 + \sigma_\phi^2 \quad (22)$$

将(16)式和(22)式联系起来有

$$\sigma_\delta^2 + \sigma_\phi^2 \leq \|(\mathbf{I} + \mathbf{Z})^{-1}\|_2^2 N \sigma_\xi^2 \quad (23)$$

通过大量的计算机模拟计算发现, 上式可近似取等号, 即互阻抗误差与通道幅相误差之间存在近似关系

$$\sigma_\delta^2 + \sigma_\phi^2 \approx \|(\mathbf{I} + \mathbf{Z})^{-1}\|_2^2 \cdot N \cdot \sigma_\xi^2 \quad (24)$$

三、阻抗误差与副瓣电平的关系

对阵列天线所作的容差分析表明^[6], 当幅相误差较小时, 阵列天线的增益和波束指向受到的影响较小, 而副瓣电平受到的影响较大。误差会引起副瓣电平的升高, 应根据副瓣电平的要求进行容差设计。

Hsiao^[3] 在分析了通道幅相误差与副瓣电平的关系后指出: 等间隔线阵天线的归一化副瓣电平服从广义瑞利分布, 其结果如图 1 所示。图中

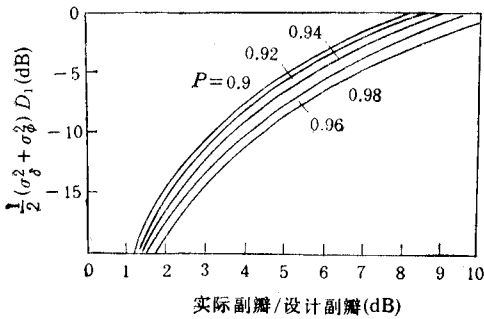


图 1 固定概率等值线
($\sigma_\delta, \sigma_\phi$ 分别为均方根幅度和相位误差)

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{n=1}^N W_n^2 / \left[\left(\sum_{n=1}^N W_n \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times (\text{设计副瓣})^2 \right] \\ &= \frac{1}{N\eta} / (\text{设计副瓣})^2 \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\eta = \left(\sum_{n=1}^N W_n \right)^2 / \left(N \sum_{n=1}^N W_n^2 \right)$ 为天线效率指数。图 1 中标注的 P 值代表任一副瓣的升高不超过某一电平的概率。不难说明, 当设计的方向图中只有 K 个为等电平大副瓣, 而其它均为小副瓣时, 则峰值副瓣的升高不超过某一电平的概率近似为 P^K , 当 P 较大时 (例如 $P = 0.98$), 一般可用 P 值来估计峰值副瓣升高的概率。对切比雪夫阵列来说, P 还可解释为在统计意义上副瓣电平不超过某个值的副瓣个数。根据图 1, 可以确定使峰值副瓣不超过某个界限所要求的误差容限。

从(24)式可以看出, 阻抗误差引起了通道幅相误差. 由图 1 可以根据幅相误差决定副瓣电平的升高程度. 因此两者结合起来就可得到阻抗误差与副瓣电平的关系. 有了这个关系, 一方面我们可以根据实际的阻抗精度, 估计实际天线的副瓣电平, 分析天线的性能; 另一方面, 也可根据副瓣电平的要求确定对阻抗精度的要求, 即先根据阵元数、加权函数、允许副瓣电平的升高程度和希望设计的副瓣电平确定必须达到的幅相误差 ($\sigma_a^2 + \sigma_b^2$), 再由(24)式求出互阻抗精度.

另外, (24)式还表明, 由互阻抗矩阵误差引起的通道幅相误差与阵元数成正比. 这是由于一般认为互阻抗误差是相互独立的, 因此引起的通道幅相误差可以看作是不相关的迭加. 阵元数愈大, 积累的幅相误差越大. 而根据(25)式, D_1 反比于阵元数 N . 总的效果使 $(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)D_1/2$ 与阵元数关系不大, 故由互阻抗误差引起的副瓣电平升高程度与阵元数关系不大. 不过, 随着阵元数的增多, 副瓣个数也增加, 故峰值副瓣超过某个值的概率也会略有增加.

表 1 以 10 元半波长偶极子平行阵为例给出了容许副瓣电平升高 6dB 时, 为达到不同副瓣电平 ($P = 0.98$) 所允许的阻抗标准偏差 $\sigma_z (= R_L \sigma_z)$. 计算时所用的参数为: 阵元间隔为 0.5λ , 阵元半径为 0.001λ , 负载阻抗 R_L 为 50Ω . 互阻抗矩阵是用矩量法计算得到的. 由表 1 可见, 为达到 -40dB 的副瓣电平, 允许的阻抗标准偏差应小于 0.287Ω .

表 1 10 元阵所允许的阻抗误差

设计副瓣电平 (dB)	希望得到的副瓣电平 (dB)	允许的幅相误差 ($\sigma_a^2 + \sigma_b^2$)	负载阻抗 R_L (Ω)	归一化阻抗误差 σ_z	阻抗误差 $\sigma_z(\Omega)$
-36	-30	7.92×10^{-4}	50	1.90×10^{-2}	0.951
-46	-40	7.22×10^{-5}	50	5.74×10^{-3}	0.287
-56	-50	6.74×10^{-6}	50	1.75×10^{-3}	8.77×10^{-2}
-66	-60	6.41×10^{-7}	50	5.41×10^{-4}	2.70×10^{-2}
-76	-70	6.16×10^{-8}	50	1.68×10^{-4}	8.37×10^{-3}

四、模拟举例

例 1 阻抗误差对副瓣电平的影响. 对表 1 所用的阵列进行计算机模拟. 设归一化阻抗误差 $\sigma_z = 0.01$, 这时由(24)式得 $\sigma_a^2 + \sigma_b^2 = 2.19 \times 10^{-4}$. 再由图 1 可知, 对采用 -40dB 切比雪夫加权的阵列天线来说, 实际副瓣电平不超过 -35.6dB 的概率为 98%. 图 2 画出了 10 次随机试验的方向图(经互耦补偿). 从图 2 中可以看出, 总共有 80 个峰值副瓣, 只有两个超过 -35.6dB , 结果与理论分析一致.

例 2 对阻抗精度的要求. 例如我们需要设计一个采用切比雪夫加权的 10 元阵, 希望实际副瓣电平不超过 -40dB 的概率为 98%. 若采用 -46dB 切比雪夫加权设计, 则由图 1 可得允许的通道幅相误差为 $\sigma_a^2 + \sigma_b^2 = 7.22 \times 10^{-5}$. 折合成归一化阻抗误差的标准偏差为 $\sigma_z = 5.74 \times 10^{-3}$, 当负载阻抗为 $R_L = 50\Omega$ 时, 要求阻抗的标准偏差 $\sigma_z = 0.287\Omega$. 图 3 示出了计算机模拟结果. 从图中可以看出, 在 80 个峰值副瓣中只有 2 个超过 -40dB , 符合理论设计要求.

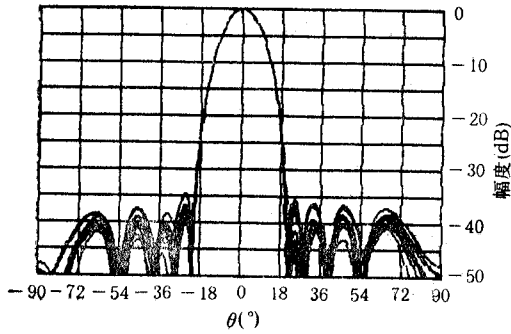


图2 阻抗误差引起的副瓣电平的升高

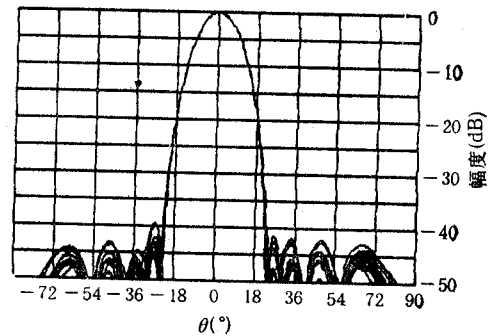


图3 根据副瓣电平的要求决定的阻抗精度

例3 阵元数的影响。仍取归一化阻抗标准偏差 $\sigma_z = 0.01$ ，图4和图5分别画出了对10元和16元-50dB切比雪夫加权阵列进行计算机仿真试验的互耦补偿方向图。每一种阵列各做了10次随机试验。从图4和图5可以看出，阵元数的影响程度较小，与分析结果基本一致。

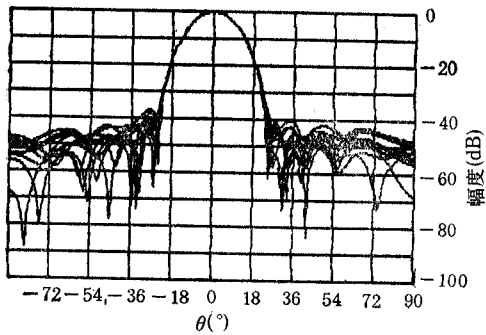


图4 10元阵互阻抗误差的影响

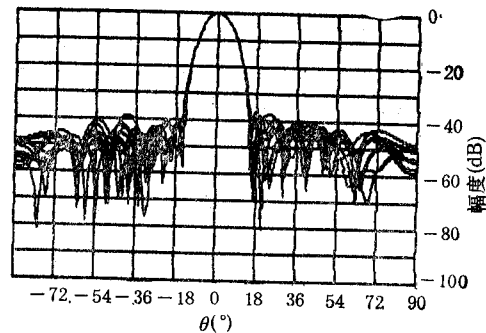


图5 16元阵互阻抗误差的影响

五、结 束 语

通过分析,本文导出了阻抗误差与通道幅相误差的关系,进而得到了阻抗误差与副瓣电平的关系。可以看出,实现极低副瓣天线对阻抗精度的要求相当苛刻。要实现极低副瓣,必须准确计算或精确测量互阻抗(或互耦系数)矩阵并很好校正。

还应当指出,对于阵元数较多的大阵列,互耦对天线副瓣的影响往往较小,甚至可以忽略^[1],一般只要稍作容差设计就可满足要求。由于互阻抗精度与阵元数关系不大,且要求非常苛刻,在这种情况下,采用不准确的互耦矩阵来进行补偿,有可能适得其反,还不如不补偿。

参 考 文 献

[1] J. Ruze, *Proc. IEEE*, 54(1966)4, 633—640.

- [2] R. C. Hansen et al., *Microwave Scanning Antennas*, Academic Press, (1966), Vol. II, Chap. 1.
- [3] J. K. Hsiao, *Array Sidelobe, Error Tolerance, Gain and Beamwidth*, AD-A 147004, (1984).
- [4] I. J. Gupta, A. A. Ksienskd, *IEEE Trans. on AP*, AP-31(1983)5, 785—791.
- [5] I. M. 奥特加著,张丽君等译,数值分析,高等教育出版社,北京,1984年.
- [6] 张林让,阵列天线的容差分析,西安电子科技大学硕士论文,西安,1990年.
- [7] R. A. Gierard, *The Effect of Mutual Coupling on the Sidelobe Performance of Chebyshev Arrays*, AD-A 205724, (1989).

THE LIMITATION OF MUTUAL IMPEDANCE PRECISION TO THE SIDELOBE LEVEL OF ARRAY ANTENNA

Zhang Linrang Zhang Yuhong

(Electronic Engineering Research Institute, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Generally speaking, an accurate mutual coupling correlation is necessary for an array antenna to reach ultra-low sidelobe level. If the mutual impedance or mutual coefficient matrix of an array is perfectly known, one can completely compensate the effect of mutual coupling and realize the desired low sidelobe level in theory. However, the mutual impedance matrix obtained whether by calculation or by measurement has a limited precision, which limits the availability of the compensation. This paper deals with the requirements on the precision of mutual impedance for compensation in ultra-low sidelobe array antenna. The relationship between mutual impedance errors and the amplitude and phase errors of channels is derived, by which the relationship between mutual impedance error and the sidelobe level is given.

Key words Antenna arrays; Mutual coupling; Low sidelobe; Tolerance; Digital beam forming