

# 容差参数的阵列天线方向图综合法\*

漆一宏 焦永昌 叶春飞

(东南大学毫米波国家重点实验室,南京 210018)

**摘要** 本文研究了设计参数具有容差的阵列天线方向图综合法;给出了阵列天线容差优化的数学模型;提出了求解容差优化问题的数学方法;建立了直线阵列天线容差区内误差任意分布的物理模型;并对激励幅度具有容差的侧射天线阵进行了计算。本文的方法可以最大限度地避免设计参数容差对天线性能的影响。

**关键词** 阵列天线;容差优化;数学模型

## 一、引言

阵列天线的综合在阵列天线的设计中起着十分重要的作用。以往的综合方法都是在假定设计参数值可以准确实现的条件下导出的,我们称之为经典优化方法,如常用的 Chebyshev 综合, Taylor 综合方法等等。然而,在实际工程中,由于加工误差,馈电误差以及材料特性和理想特性的偏差等因素的影响,实际参数值与经典优化参数值之间总存在一定的偏差,从而导致天线性能变坏。对低旁瓣天线设计而言,容差是导致天线旁瓣电平升高的重要因素<sup>[1]</sup>。因此,考虑天线的容差进行优化设计是一重要的研究课题。

天线的容差优化设计就是在设计参数的容差区间内对天线性能目标函数进行优化设计,使得当设计参数偏离其标称值时,天线的性能偏差最小。1980年, H. Schjaer-Jacobsen<sup>[2]</sup>首次研究了具有容差的阵列天线最优设计问题,对天线的容差优化问题进行了有益的探索。但 H. Schjaer-Jacobsen 所建立的阵列模型中,相对阵列中心对称的单元,其误差的变化也是对称的,这种模型不具有普遍的意义;此外,其优化方法又需要目标函数的导数值,且在进行最坏情况分析时,要求目标函数具有一维凸等性质,从而限制了该方法的推广。

本文研究了设计参数具有容差的直线阵天线的最坏情况问题,固定容差问题和可变容差问题。建立了更为广义的物理模型,提出了求解最坏情况问题的离散方法,采用修正多面体方法求解固定容差优化问题,并构造了进退法与二分法结合的双层迭代算法来求解可变容差优化问题。最后以侧射直线阵为例,进行了低旁瓣容差优化设计。当设计

1991.12.17 收到, 1992.06.05 定稿。

\* 国家博士后基金资助课题。

漆一宏 男, 1961 年出生, 副教授, 从事微波和天线的研究工作。

焦永昌 男, 1964 年生, 副教授, 从事天线的研究工作。通信地址为西安电子科技大学天线所(710071)。

叶春飞 男, 1962 年生, 讲师, 博士研究生, 主要研究兴趣包括天线, 微带阵列和电磁场数值解。

参数偏离其标称值时,本文的方法可以使最坏情况的天线性能得到改善,使设计的天线更为可靠。

## 二、容差优化问题的数学模型

天线的容差优化问题,往往是非线性多目标优化问题。本文采用了 **minimax** 容差优化方法对天线容差优化问题建模。

经典 **minimax** 阵列天线综合设计实际上可称为零容差问题。设所期望的天线方向图为

$$P_d = P_d(\phi), \quad \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T \quad (1)$$

其中,  $\phi$  为场坐标。

设阵列天线有  $N$  个设计参数, 其设计参数表示为  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ , 则阵列天线的计算方向图以下式表达, 即

$$P = P(X, \phi) \quad (2)$$

为了简化表达式, 引入指标集合

$$I = \{i | i = 1, 2, \dots, N\}, \quad J = \{j | j = 1, 2, \dots, m\} \quad (3)$$

计算方向图逼近理想方向图的程度可以用一组  $m$  个非线性函数来表示, 即

$$f_j(X) = W_j(P(X, \phi_j) - P_d(\phi_j)), \quad j \in J \quad (4)$$

其中  $W_j$  为加权系数,  $\phi_j$  为第  $j$  个场点的坐标, 则零容差问题的数学模型为

$$F(X) = \max_{i \in J} |f_i(X)| \quad (5)$$

零容差问题的解为

$$F^* = F(X^*) = \min_{X \in R^n} F(X) \quad (6)$$

当设计参数具有容差时, 应对此时的最坏情况进行优化, 以确保天线的性能指标得以实现。这时的天线优化问题变得比较复杂。

假设对设计参数  $X$  存在一个固定的容差向量

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)^T, \quad \delta_i \geq 0, \quad i \in I \quad (7)$$

则设计参数的容差区间为

$$\Omega_{X, \eta} = \{Y | x_i - \eta \delta_i \leq y_i \leq x_i + \eta \delta_i, \quad i \in I, \eta \geq 0\} \quad (8)$$

其中  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ ,  $\eta$  为容差区域的尺度因子。在容差区间内最坏情况的目标函数为

$$F_\eta(X) = \max_{Y \in \Omega_{X, \eta}} F(Y) = \max_{Y \in \Omega_{X, \eta}, i \in I} |f_i(Y)| \quad (9)$$

向量  $X$  是容差区域的中心, 它包含着阵列设计参数的标称值。

对于给定的  $\eta$  和  $X$ , 确定最坏情况目标函数(9)式的问题称为最坏情况问题。

函数  $f_i(X)$  是期望方向图与计算方向图在第  $i$  个场点上偏差的一种度量, 因此  $F_\eta(X)$  可以解释为, 当设计参量在容差区域中变化时, 在所有计算场点上目标函数的最大值。

当容差区域尺度因子固定时的优化问题称之为固定容差优化问题, 即关于  $X$  极小

化最坏情况目标函数(9)式,即

$$\min_{\mathbf{X} \in R^n} F_\eta(\mathbf{X}) \quad (10)$$

(10)式表示通过在容差区间内优化设计参数的中心值,使得当实际参数在容差区域内变化时,天线的最大指标偏差极小化。

在实际工程中,常常希望在给定天线设计指标的情况下,通过优化设计,尽可能放松对容差的要求,亦即使  $\eta$  尽可能大。这个问题就是可变容差设计问题。其数学模型为

$$\left. \begin{array}{l} \eta^* = \max \eta \\ \text{s. t. } F_\eta^* \leq c \end{array} \right\} \quad (11)$$

其中  $c$  根据设计指标确定。显然  $c$  必须大于经典最优目标函数值  $F^*$ 。(11)式是非线性约束下单参数  $\eta$  的一维优化问题。

### 三、阵列天线容差优化的数学方法

求解(10)和(11)式这两个非线性最优化问题,首先必须求得最坏情况问题  $F_\eta(\mathbf{X})$ 。

求  $F_\eta(\mathbf{X})$  实际上是一个连续的极大化问题,直接求解它是比较困难的。H. Schjaer-Jacobsen<sup>[3]</sup> 采用目标函数的导数信息,根据 Kuhn-Tucker 条件来求得最坏情况点。但这种方法只适用于目标函数是一维凸函数;且在容差区间内,对每一个设计变量  $x_i, i \in I$  其目标函数的偏导数都必须是单调的。对于绝大多数天线问题,很难证明目标函数具有上述性质,因此本文采用离散化的方法来求解最坏情况问题,即把连续的极大化问题化为离散的极大化问题求近似值。

将  $\Omega_{\mathbf{X}, \eta}$  中的离散点取为

$$\mathbf{Y}(l_1, l_2, \dots, l_N) = (y_1^{l_1}, y_2^{l_2}, \dots, y_N^{l_N})^T \quad (12)$$

$$1 \leq l_i \leq L_i, \quad i \in I \quad (13)$$

其中  $L_i$  为正整数,且有

$$y_i^{l_i} = x_i - \eta \delta_i + (l_i - 1)2\eta \delta_i / (L_i - 1) \quad (14)$$

在球坐标系中,天线的远场方向图应为场坐标  $\theta, \phi$  的函数。为了求得目标函数的值,必须对空间场点采样,对于直线阵列天线,天线方向图仅与  $\theta$  有关。这时只需对  $\theta$  分点即可。 $\theta$  的分点可以根据天线指标的实际要求或天线方向图的性态取,也可依下式取,即

$$\theta_j = (j - 1)\pi / (L_\theta - 1) \quad (15)$$

$$1 \leq j \leq L_\theta, \quad j \in J \quad (16)$$

其中,  $L_\theta$  为正整数,对于直线阵有  $L_\theta = m$ 。

利用(12)和(15)式,可用下式求得  $F_\eta(\mathbf{X})$  的近似值。

$$\bar{F}_\eta(\mathbf{X}) = \max_{\substack{1 \leq l_i \leq L_i \\ i \in I}} \max_{\substack{1 \leq j \leq L_\theta \\ j \in J}} |f(\mathbf{Y}(l_1, \dots, l_N), \theta_j) - f_d \theta_j| \quad (17)$$

实际上,只要  $L_i$  都取得稍大一些,  $L_\theta$  取得足够大或  $\theta$  的分点取得能有效地反映指标的空间变化,则  $\bar{F}_\eta(\mathbf{X})$  就能很好地逼近  $F_\eta(\mathbf{X})$  的值。这样,连续的极大化问题就转

化为离散的极大化问题。这种方法不需要目标函数的导数信息和单调条件。因此,能用于有复杂目标函数或不可导目标函数的综合问题。

在进行固定容差问题的优化计算时,为了提高收敛速度和在固定容差优化设计中避免求导运算,本文采用修正正多面体方法来求(17)式的最优解。

正多面体方法的思想是,先在可行域中选择一初始点  $X_0$ , 以适当的长度作为初始边长,在  $N$  维欧氏空间中构成以  $X_0$  为形心的初始正多面体,然后将正多面体在  $N$  维空间中按一定的规则变动,包括平移,翻转和收缩,使正多面体的中心逐步逼近最优解。详细步骤见参考文献[4]。

可变容差优化问题(11)式是一维优化问题,本文构造了双层迭代算法来求解(11)式,其中内层迭代利用固定容差问题的解法,外层迭代采用进退法与二分法相结合的比较法,其计算步骤如下:

- (1) 输入初始数据: 初始可行点,设计指标要求  $c$ , 计算精度要求  $\varepsilon$ ;
- (2) 置  $\eta = 1$ ;
- (3) 求解(10)式, 得其解  $X_\eta^*$ 。令  $g = F_\eta(X_\eta^*)$ 。若  $|g - c| < \varepsilon$ , 则  $\eta^* = \eta$ ,  $g^* = g$ , 停; 否则转(4);
- (4) 若  $g < c$ , 则转(5); 否则转(6);
- (5) 置  $\eta = 1.5\eta$ , 求解(10)式得其解  $X_\eta^*$ 。计算  $g = F_\eta(X_\eta^*)$ , 若  $|g - c| < \varepsilon$ , 则令  $\eta^* = \eta$ ,  $g^* = g$ , 停; 若  $g < c$ , 则转(7); 否则转(5);
- (6) 置  $\eta = 0.8\eta$ , 求解(10)式, 得其解  $X_\eta^*$ 。计算  $g = F_\eta(X_\eta^*)$ , 若  $|g - c| < \varepsilon$ , 则令  $\eta^* = \eta$ ,  $g^* = g$ , 停; 若  $g < c$ , 则转(8); 否则转(6);
- (7) 置  $a = \eta/1.5$ ,  $b = \eta$ , 转(9);
- (8) 置  $a = \eta$ ,  $b = \eta/0.8$ , 转(9);
- (9) 置  $\eta = (a + b)/2$ , 求解(10)式, 得其解  $X_\eta^*$ 。计算  $g = F_\eta(X_\eta^*)$ , 若  $|g - c| < \varepsilon$ , 则置  $\eta^* = \eta$ ,  $g^* = g$ , 停; 否则转(10);
- (10) 若  $g < c$ , 则  $a = \eta$  转(9); 否则  $b = \eta$ , 转(9)。

#### 四、计算举例

在实际工程中,误差的分布一般是不对称的,为了使模型具有广泛的适用性,本文以功率方向图作为目标函数进行天线优化。其功率方向图如下:

$$P = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_{mn} \cos [(\Phi_n - \Phi_m) + 2\pi(d_n - d_m) \sin \theta]$$

其中  $d_n$ ,  $\Phi_n$  分别表示第  $n$  个阵元的位置和相位。并有

$$a_{mn} = \begin{cases} a_n^2/2, & m = n \\ a_n a_m, & m \neq n \end{cases}$$

式中  $a_n$  为第  $n$  个阵元的幅度。

作为计算举例,本文对幅度具有容差的侧射直线阵进行了综合。取阵元间的间距为半波长,阵元的激励相位为零。当阵元总数  $N = 6$  时,对阵列进行低旁瓣优化设计。对于旁

瓣电平为  $-20$  dB 的 Chebyshev 激励, 初始激励幅度为

$$\mathbf{X} = (0.5406, 0.7768, 1.0000, 1.0000, 0.7768, 0.5406)^T$$

在容差优化中取  $P_d(\vartheta) = 0$ ,  $\varepsilon_i = 0.01$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , 当要求旁瓣电平不高于  $-15$  dB 时, 进行可变容差优化设计, 得  $\eta^* = 10.6$ .  $\eta^*$  是旁瓣电平值低于  $-15$  dB 时, 激励幅度所允许的最大容差. 变容差时的最优激励幅度值为(标称值):

$$\mathbf{X}_s^* = (0.5957, 0.8275, 1.0000, 1.0000, 0.8275, 0.5957)^T$$

变容差设计时最优标称值与最坏情况方向图的比较如图 1 所示

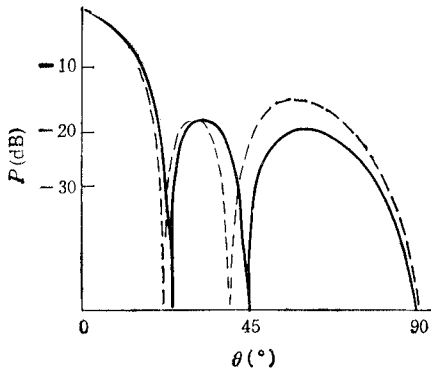


图 1 最优标称值与最坏情况方向图的比较  
—— 最优标称值时的方向图    - - - - 最坏情况方向图

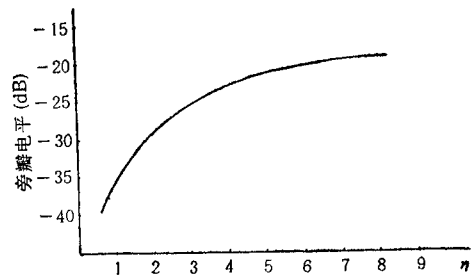


图 2 最高旁瓣电平允许值与最大尺度因子  $\eta^*$  的关系

对于  $N = 16$  的侧射阵进行可变容差优化设计. 其中  $\varepsilon_i = 0.01$ , ( $i = 1, \dots, 16$ ), 其容差区间的最大尺度因子  $\eta^*$  与最高旁瓣电平允许值的关系如图 2 所示. 由图 2 可见, 要求的旁瓣电平越低, 容差要求也越严格.

## 五、结 论

根据实际工程问题, 寻求与之相适应的数学模型是提高系统设计可靠性和准确性的必要手段. 本文给出了容差参数的阵列天线方向图综合的数学模型、方法和物理模型. 本文的方法不需要目标函数的导数值和一维凸等性质, 因而可以解决目标函数较为复杂或其导数值根本不存在的优化问题. 本文的功率方向图模型具有普遍的适用性.

本文的数学模型和方法都是针对最坏情况进行优化设计的, 其可变容差设计的天线系统具有 100% 的成品率. 这一点与统计优化设计是不同的, 它对可靠性要求很高的单件天线和空间天线的设计尤为适用.

对于侧射天线阵, 其激励相位的同相激励也是容差优化的最优激励<sup>[5]</sup>, 因此本文的方法具有工程实用价值. 在实用工程中, 产生误差的因素是多方面的, 只有系统地考虑才能使设计更为准确可靠.

由本文的数学方法知, 容差优化可以放松设计参数的容差要求. 从图 2 可知, 旁瓣电平值越低, 对容差的要求越严. 因此, 在天线设计中, 合理的设计方法和严格的公差控制都是十分必要的.

作者感谢东南大学杨铨让教授和西安电子科技大学吴鸿适教授富有建设性的讨论。

### 参 考 文 献

- [1] D. M. Pozar, *IEEE Trans. on AP*, **AP-38**(1990)8, 1176—1185.
- [2] H. Schjaer-Jacobsen, *IEEE Trans on AP*, **AP-28**(1980)2, 247—250.
- [3] H. Schjaer-Jacobsen, K. Madsen, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-26**(1979)9, 775—783.
- [4] 焦永昌, 约束优化研究及在天线优化设计中的应用, 西安电子科技大学博士学位论文, 1990年, 第32—34页.
- [5] Qi Yihong, Jiao Yongchang, *Worst Case Tolerance Optimization of Arrays Radiation Pattern*. APMC, (1992).

## TOLERANCE SYNTHESIS TECHNIQUE FOR ARRAYS RADIATION PATTERN

Qi Yihong    Jiao Yongchang    Ye Chunfei

(*State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing 210018*)

**Abstract**    Tolerance synthesis techniques of array radiation pattern are investigated. The mathematical models for array radiation pattern optimization are given, and the methods for solving the problem of tolerance optimization are initiated. The physical model for arbitrary tolerance distribution of array elements is presented. Numerical examples are given for the broadside array in which the excitation amplitude coefficients have tolerances. The methods given in this paper immunize optimally the resulting arrays against the deviations of the design parameters from their nominal values.

**Key words**    Array antenna; Tolerance optimization; Mathematical model