

文章编号: 1002-2082(2008)SO-0100-05

# 光纤陀螺仪漂移数据分析及建模方法研究

李志宏, 张 凯, 杨进华

(长春理工大学 光电工程学院, 吉林 长春 130022)

**摘要:** 光纤陀螺仪自诞生以来以其结构简单、性能稳定、成本低、体积小、质量轻等优点获得了广泛应用,但由于各种噪声的影响,使陀螺稳定性降低,所以降低噪声的影响成为提高陀螺稳定性的关键。围绕提高陀螺稳定性和精度,采用Allan方差对光纤陀螺的测试数据进行分析,识别出各项随机误差系数。采用时间序列分析方法,通过利用ARMA模型对漂移数据进行模型拟合,计算得出ARMA(2,1)为光纤陀螺仪漂移输出的适用模型,并利用此数据模型进行一步预测。通过对模型进行适用性检验,证实模型是适用的,为实际应用中IFOG测试实现误差补偿奠定了基础。

**关键词:** 光纤陀螺仪; Allan方差; 时间序列分析; 建模

中图分类号: TN253-3; O439

文献标志码: A

## Analysis and modelling on fibre optic gyroscope drift

LI Zhi-hong, ZHANG Kai, YANG Jin-hua

(School of Optoelectronic Engineering, Changchun University of  
Science and Technology, Changchun 130022, China)

**Abstract:** Since the birth, the FOG has been put into application in many ways, for its many advantages such as simple structure, stability, low cost, small volume and low weight. But with the effect of much noise, the stability of the FOG is still not good. In order to improve the stability, the data of IFOG are analyzed with Allan variance method and each error coefficient is identified. Furthermore, a random drift error model for IFOG was built by the aid of the time sequence analysis and the error model of the FOG's drift is expressed as ARMA(2,1). At last, one-step predict curve of data is assessed. The adaptability of the error model is discussed. The conclusion provides supports for error compensation of IFOG.

**Key words:** fiber optic gyroscope; Allan variance; analysis of time sequence; modelling

## 引言

近年来,IFOG作为惯性领域一个十分重要的分支,获得了长足的发展。由于其结构简单、价格低、体积小、重量轻,在中低惯性系统中获得越来越广泛的应用。受光纤陀螺仪目前精度不高的限制,在陀螺仪的使用之前,必须对其建立合理的随机漂移误差模型,以便于误差估算和补偿。

本文应用Allan方差对开环光纤陀螺的测试数据进行分析,并采用时间序列分析法对随机漂移

进行建模。Allan方差由美国国家标准局于20世纪60年代提出,是一种时域分析技术,是被IEEE普遍认可的陀螺仪性能的标准分析方法。这种方法的特点是它能够比较容易对各种误差源的统计特性进行细致的表征和辨识。噪声源可能存在于仪器内部,即使不知仪器的机械结构,只要建立测试系统,就能找到噪声源。Allan方差可以作为单独的数据分析方法,也可作为频域分析技术的补充,此技术可应用于任何仪器的噪声研究<sup>[1]</sup>。时间序列分析

收稿日期: 2007-11-23; 修回日期: 2008-01-21

作者简介: 李志宏(1982-),男,福建漳州人,硕士研究生,主要从事现代光学技术及工程应用的研究。

E-mail: zhihong\_li2007@163.com

是漂移误差建模的另一种方法, 主要采用参数模型 (特别是 ARMA 模型) 对所观测到的有序随机数据进行分析与处理的一种数据处理方法。

## 1 光纤陀螺仪的随机误差分析

### 1.1 Allan 方差的基本原理

设在采样时间  $T$  下有  $N$  个陀螺仪采集数据, 分别建立时间为  $T_0, 2T_0, \dots, kT_0 (k < N/2)$  的数组, 并求出每一时间长度数组中数据点之和的平均值。Allan 方差的定义就是时间组的函数。具体地说, Allan 方差既可以定义为输出速率  $Q(t)$ , 也可以定位为输出角度  $\theta(t)$ 。时间  $t_k$  与  $t_{k+\tau}$  之间的平均速率<sup>[2]</sup> 表示为

$$\bar{\Omega}_k(\tau) = \frac{\theta_{k+m} - \theta_k}{\tau} \quad (1)$$

式中  $\tau = mT_0$ , 则 Allan 方差定义为

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{\Omega}_{k+m} - \bar{\Omega}_k)^2 \rangle = \frac{1}{2\tau^2} \langle (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2 \rangle \quad (2)$$

式中  $\langle \rangle$  为总体平均值。Allan 方差可按下式估算

$$\sigma^2(\tau_M) = \frac{1}{2} \langle [\bar{\Omega}_{k+1}(M) - \bar{\Omega}_k(M)]^2 \rangle = \frac{1}{2(k-1)} \sum_{k=1}^{k-1} [\bar{\Omega}_{k+1}(M) - \bar{\Omega}_k(M)]^2 \quad (3)$$

式中  $\tau_M = M/f_s$ ,  $f_s$  是采样频率。对于数据  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ , 首先把数据分成指定长度  $M$  的串, 计算出每个串的均值  $\bar{\Omega}_k(M)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, K (K = N/M)$ , 然后由上式计算出 Allan 方差。

通过运算获得的 Allan 方差与原始数据组中噪声项的功率谱密度有关。Allan 方差与双边功率谱密度  $S_\Omega(f)$  之间的关系由下式给出:

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^\infty S_\Omega(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (4)$$

需要说明的是, 当通过一个传递函数为  $\sin^4 x/x^2$  的滤波器时, Allan 方差与陀螺仪速率输出的噪声总能量成正比。这一特殊的传递函数是由于使用生成和操作数组的方法而带来的结果。可以看出, 滤波器的带通取决于  $\tau_0$ , 也就是说, 不同类型的随机过程可通过调节滤波器带通来检验, 即用不同的  $\tau$  来检验。因此, Allan 方差可以辨别并量化数据中存在的不同噪声项。

### 1.2 光纤陀螺仪随机误差分析<sup>[3]</sup>

光纤陀螺的误差因素很多, 直接从物理意义出

发建立起随机误差模型比较困难, 一般采用噪声的功率谱密度函数来定义, 表 1 给出了光纤陀螺的常见误差因素即对应的 Allan 方差。

表 1 陀螺仪常见噪声项的噪声特性

Table 1 Noise properties of IFOG

误差因素	标准差 $\sigma^2(\tau)$	PSD $S_\Omega(f)$	斜率
零偏不稳定性	$\frac{2B^2}{\pi} \left[ \ln 2 - \frac{\sin^3 x}{2x^2} D \right]$	$\begin{cases} (\frac{B^2}{2\pi}) \frac{1}{f} & f \leq f_0 \\ 0 & f > f_0 \end{cases}$	0
量化噪声	$\frac{3Q^2}{\tau^2}$	$\frac{4Q^2}{\tau_0} \sin(\pi f \tau_0)$	-1
角度随机游走	$\frac{N^2}{\tau}$	$N^2$	-1/2
速度随机游走	$\frac{K^2 \tau}{3}$	$(\frac{K}{2\pi})^2 \frac{1}{f^2}$	1/2
速率斜坡	$\frac{R^2 \tau^2}{2}$	$\frac{R^2}{(2\pi f)^3}$	1
马尔可夫噪声	$\frac{(q_c T_c)^2}{\tau} \left[ 1 - \frac{T_c}{2\tau} M \right]$	$\frac{(q_c T_c)^2}{1 + (2\pi f T_c)^2}$	-
正弦噪声	$\Omega_0^2 \frac{\sin^2 \pi f_0 \tau}{\pi f_0 \tau}$	$\frac{1}{2} \Omega_0^2 [\delta(f_1) + \delta(f_2)]$	-

表 1 中:  $D = \sin x + 4x \cos x + C_i(2x) - C_i(4x)$ ,  $x = \pi f_0 \tau$ ,  $C_i(x)$  为余弦积分函数;  $f_1 = f - f_0$ ;  $f_2 = f + f_0$ ;  $M = 3 - 4e^{-\tau_0/T_c} + e^{-2\tau/T_c}$ ;  $f_0$  为 3 dB 截止频率;  $\delta(x)$  是  $\delta$  的函数。

假设各误差源统计独立, 则 Allan 方差可以表示为一种或几种误差源方差的平方和, 如下式所示<sup>[4-5]</sup>:

$$\sigma_{total}^2 = \sigma_Q^2 + \sigma_{Wh}^2 + \sigma_B^2 + \sigma_S^2 + \sigma_{RW}^2 + \sigma_R^2 + \sigma_{ec}^2 \quad (5)$$

则陀螺仪的 Allan 方差可以所示为

$$\sigma_A(\tau) = \sqrt{\sigma_{total}^2} = f(\sigma_Q^2, \sigma_{Wh}^2, \sigma_B^2, \sigma_S^2, \sigma_{RW}^2, \sigma_R^2) = \sum_{n=-2}^2 A_n \tau^{n/2} \quad (6)$$

式中:  $A_{-2}$  是量化噪声的拟和系数;  $A_{-1}$  是角度随机游走的拟和系数;  $A_0$  是零偏不稳定性的拟和系数;  $A_1$  是速度随机游走的拟和系数;  $A_2$  是速率斜坡的拟和系数。这 5 项噪声源的误差系数分别用  $N, B, K, R, Q$  表示, 其值的求取可用最小二乘法对下式进行拟合:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{R^2 \tau^2}{2} + \frac{K^2 \tau}{3} + B^2 \left[ \frac{2}{\pi} \right] \ln 2 + \frac{N^2}{\tau} + \frac{3Q^2}{\tau^2} \quad (7)$$

对 (7) 式进行最小二乘拟合便可得到角度随机游走系数  $N$ 、零偏不稳定性系数  $B$ 、速率随机游走系数  $K$ 、速率斜坡  $R$  和量化噪声  $Q$  的估计值为

$$\begin{cases} N = \frac{C_{-1}}{60} \quad (^\circ/\text{h}^{1/2}) \\ B = \frac{C_0}{0.664} \quad (^\circ/\text{h}) \\ K = 60 \sqrt{3} C_1 \quad (^\circ/\text{h}^{3/2}) \\ R = 3600 \sqrt{2} C_2 \quad (^\circ/\text{h}^2) \\ Q = C_{-2} / \sqrt{3} \quad \mu\text{rad} \end{cases}$$

1.3 光纤陀螺仪的输入输出特性及分析

本文采用的 VG941 型光纤陀螺仪为开环干涉式光纤陀螺仪。将陀螺仪固定在二维转台上,并保持转台水平,陀螺仪输入轴垂直于当地地垂线。接通陀螺仪电源,预热 30 min,通过信号采集系统对数据进行采集,采集卡频率为 10 Hz,总采样时间为 180 min,陀螺仪的输出数据曲线如图 1 所示。

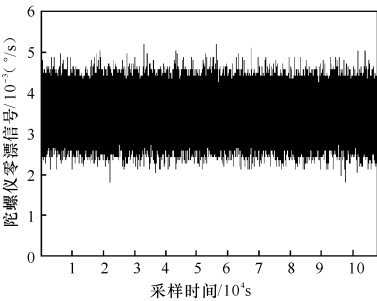


图 1 光纤陀螺仪的数据输出曲线

Fig.1 Curve of data output for fiber optic gyroscope

对原始陀螺数据进行多项式拟合去除其趋势项。通过对数据的处理可知,该陀螺仪仅有零偏,不包含缓慢变化的趋势项,因此可以跳过该步骤。

对于不同的相关时间  $\tau$ ,可以分别获取不同陀螺仪漂移的 Allan 标准方差  $\sigma_A(\tau)$ 。 $\sigma_A(\tau)$ 与  $\tau$  的关系如图 2 所示,其中星号为通过数据求取的不同相关时间的标准方差。根据(7)式,通过最小二乘拟合可以求得 Allan 方差模型,结果如图 2 实线所示,其模型表达式为

$$\sigma_A(\tau) = 1.1754 \times 10^{-5} \times \tau^{-1} + 1.0228 \times 10^{-2} \times \tau^{-1/2} + 3.835 \times 10^{-3} + 1.196 \times 10^{-3} \times \tau^{1/2} + 1.827 \times 10^{-4} \times \tau$$

系数的估计结果为:随机游走系数  $N=0.0001704 (^\circ/\text{h}^{1/2})$ ;零偏不稳定性系数  $B=0.005776^\circ/\text{h}$ ;速度随机游走系数  $K=0.1243 (^\circ/\text{h}^{3/2})$ ;速度斜坡系数  $R=0.9303 (^\circ/\text{h}^2)$ ;量化噪声系数  $Q=0.000006786 \mu\text{rad}$ 。

从 allan 方差估计的结果可以看出我们所分析

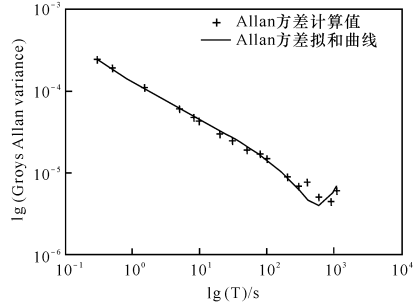


图 2 Allan 方差拟和曲线

Fig.2 Fitting curve of Allan variance

的开环干涉式光纤陀螺的一些特征:1) 光纤陀螺的零偏稳定性、速度随机游走系数、速度斜坡为主要误差源;2) 量化噪声很小,其主要原因是 VG941 为开环干涉式光纤陀螺,输出的模拟电压信号在 A/D 转化后直接送到芯片进行处理并获取恒定角速率的初始信号,在理论上不存在量化噪声;3) 速度斜坡系数比较大,这可能与采集数据总时间较长导致结果有关。

2 时间序列法建立陀螺仪随机漂移模型

2.1 ARMA 模型原理<sup>[6]</sup>

时间序列分析方法将平稳、正态分布的随机序列看作是各时刻相关的序列,并由各时刻出现的白噪声所组成,  $K$  时刻有:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_n x_{t-n} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_m a_{t-m}, \quad a_t \sim NID(0, \sigma^2) \quad (8)$$

式中:  $x_t$  为时间序列;  $\varphi_i$  为自回归系数;  $\theta_i$  为滑动平均系数;  $a_t$  为残差;  $n, m$  为 ARMA( $n, m$ ) 模型阶次数;  $n$  为时间序列长度。在  $NID$  中,  $N$  表示当  $t$  固定时,  $a_t$  是正态分布的随机变量;  $ID$  表示当  $t$  变动时,  $\{a_t\}$  之间彼此独立。

(8) 式表示随机序列自回归滑动平均模型 ARMA( $n, m$ )。如果模型的  $\theta_i=0$ , 其中  $i=1, 2, \dots, m$ , 则模型简化为

$$x_k = \varphi_1 x_{k-1} + \varphi_2 x_{k-2} + \dots + \varphi_n x_{k-n} + a_k \quad (9)$$

这种模型称为  $n$  阶自回归模型  $AR(n)$ ; 如果模型中  $\varphi_i=0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 则模型简化为

$$x_k = a_k - \theta_1 a_{k-1} - \theta_2 a_{k-2} - \dots - \theta_m a_{k-m} \quad (10)$$

这种模型称为  $m$  阶滑动平均模型  $MA(m)$ 。

对于不同的系统产生的随机序列可采用不同的模型来描述,这 3 种模型之间存在着差别。

ARMA, AR, MA 模型之间的差别是在它们的自相关函数和偏相关函数上会反映出不同的特性。AR 模型具有自相关函数“拖尾”和偏相关函数“截尾”的性质; MA 模型具有自相关函数“截尾”和偏相关函数“拖尾”的性质; ARMA 具有自相关函数和偏相关函数都“拖尾”的性质。因此, 样本序列自相关函数和偏相关函数的分析可判断其属于何种类型的模型。由于陀螺漂移模型的阶次都比较低, 一般不超过 2~3 阶, 这样可以在模型参数数目等于 3 的范围内取 AIC 最小值所对应的模型。由于 ARMA 模型相当于一个线性系统, 对于最小阶次的线性系统, 传递函数一般是有理分式。也就是说, 对于实际系统, 随机 ARMA 模型的自回归阶数大于或等于滑动平均阶数, 所以实际模型的只有 AR (1), AR (2), AR (3), ARMA (2, 1), ARMA (1, 1) 5 种<sup>[7]</sup>。

对 ARMA 的检验采用检查  $a_t$  是否为白噪声, 这是模型适用性的最根本的方法。

1) 检验  $\{a_t\}$  本身的自相关性。检验  $a_t$  是否与  $a_{t-2}, a_{t-3}, \dots$  无关。 $a_t$  的自相关系数:

$$\rho_{a,2} = \frac{\sum_{t=3}^N a_t a_{t-2}}{\sum_{t=3}^N a_t^2} \quad (11)$$

当  $\rho_{a,2} \rightarrow 0$  时, 则认为所拟和的 ARMA( $n, m$ ) 模型是适用的。

2) 检验  $\{a_t\}$  与  $\{x_t\}$  之间的互相关性。检验  $a_t$  是否与  $x_{t-3}, x_{t-4}, \dots$  无关。 $a_t$  与  $x_{t-3}$  的互相关系数:

$$\rho_{ax,3} = \frac{\sum_{t=4}^N a_t x_{t-3}}{\sqrt{\left(\sum_{t=4}^N a_t^2\right) \left(\sum_{t=4}^N x_{t-3}^2\right)}} \quad (12)$$

当  $\rho_{ax,3} \rightarrow 0$  时, 则认为所拟和的 ARMA( $n, m$ ) 模型是适用的。

## 2.2 模型识别及及适用性检验

对采集到的零漂信号进行分析, 并对其进行预处理(包括提取趋势项和零化处理)。获得预处理后数据的自相关函数和偏相关函数, 分别如图 3 和图 4 所示。从图中我们可以看出: 自相关函数和偏相关函数都表现出拖尾性, 所以可以采用 ARMA 模型对其进行分析。这里采用 ARMA(2, 1) 对处理后的数据进行建模<sup>[8]</sup>, 即:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim NID(0, \sigma^2) \quad (13)$$

式中:  $x_t$  为 ARMA(2, 1) 模型的输出;  $a_t$  为零均值; 方差为  $\sigma^2$  的白噪声。采用长自回归模型法, 先估计出 AR 模型, 再根据传递函数相等的关系估计出 ARMA 模型的  $\theta_i$ 。求解得到模型参数为:  $\varphi_1 =$

$-0.2699, \varphi_2 = -0.002968, \theta_1 = 0.277$ 。故 ARMA (2, 1) 的模型为

$$x_t = -0.2699x_{t-1} - 0.002968x_{t-2} + a_t + 0.277a_{t-1}$$

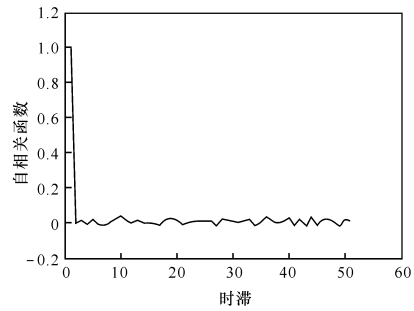


图 3 自相关函数

Fig. 3 Self-correlation function

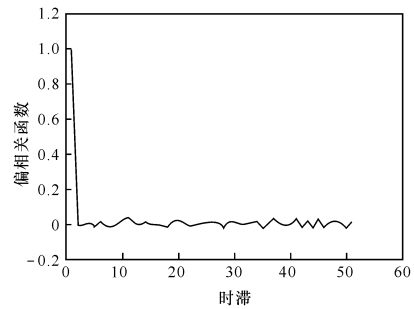


图 4 偏相关函数

Fig. 4 Partial correlation function

由于可得残差  $a_t$  的均值为  $5.0506 \times 10^{-5} \approx 0$ , 方差  $\sigma^2 = 1.7504 \times 10^{-7}$ 。对所建立的模型的适用性进行检测, 分别检验  $\{a_t\}$  本身的自相关性和检验  $\{a_t\}$  与  $\{x_t\}$  之间的互相关性, 由 (11) 式和 (12) 式得如下结果:

$$\rho_{a,2} = 0.08202, \quad \rho_{ax,3} = 0.02632$$

因为数值很小, 故认为  $a_t$  是白噪声, 上述模型是适用的。

利用上述建立的 ARMA 模型, 对陀螺仪的输出数据进行滤波处理, 得到滤波输出曲线和被滤除的噪声曲线, 如图 5 所示。

从数据的一步预测图可看出, 模型很好地反映了样本数据的变化情况, 再次证明了模型是适用的。

通过以上建模和适用性检测结果可以得出: 利用 ARMA(2, 1) 对漂移信号进行建模得到了较好的结果, 残差可以认为是均值为 0, 方差  $\sigma^2 = 1.7504 \times 10^{-7}$  的白噪声, 由此证明了所得到的模

型是适用的。根据 ARMA(2,1) 的模型可以看出  $\varphi_1 < 0$ , 并且  $|\varphi_1| < 1$ , 这表明 VG941 型陀螺仪的随机漂移误差中速率漂移误差很小, 这与 Allan 方差分析的结果一致。

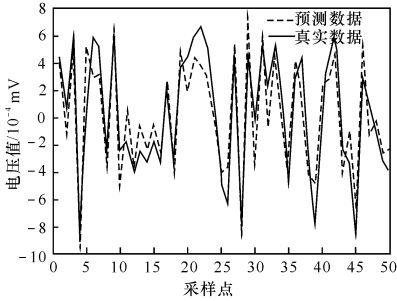


图 5 数据模型一步预测曲线图

Fig. 5 One-step predict curve of data model

### 3 结论

本文采用 Allan 方差分析法对 VG941 光纤陀螺仪的误差进行建模与估计, 结果表明: 该型陀螺仪的零偏稳定性、随机游走系数、速度随机游走占主要分量, 而速率斜坡和量化噪声所占的比重很小。采用时间序列分析法对输出的零漂数据进行建模, 并利用所得的模型进行数据一步预测, 模型很好地反映了数据样本的变化。本文所得结果为改进 IFOG 设计及实际应用中 IFOG 的误差补偿奠定了基础。

#### 参考文献:

[1] 杨亭鹏, 高亚楠, 陈家斌. 光纤陀螺仪零漂信号的 Allan 方差分析[J]. 光学技术, 2005, 31(1): 87-89.  
 YANG Ting-peng, GAO Ya-nan, CHEN Jia-bin. Allan variance analyses of the drift of the fiber optic gyroscope[J]. Optical Technique, 2005, 31(1): 87-89. (in Chinese)

[2] 吕妍红. 环形激光陀螺仪随机误差分析[J]. 传感器技术, 2004, 23(2): 40-43.  
 Lü Yan-hong. Random error analysis of ring laser gyro[J]. Journal of Transducer Technology, 2004, 23(2): 40-43. (in Chinese)

[3] 毛玲娟, 张方生, 沈娟. 光纤陀螺漂移数据的分析与建模[J]. 北京理工大学学报, 2002, 11(1): 50-55.  
 MAO Ling-juan, ZHANG Fang-sheng, SHEN Juan. Data analysis and modeling of fiber optic gyroscope drift[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2002, 11(1): 50-55. (in Chinese)

[4] 危志英. 光纤陀螺测试及应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2003.  
 WEI Zhi-ying. The testing and application of optic gyro[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2003. (in Chinese)

[5] KIM H, LEE J G, CHAN G P. Performance improvement of GPS/INS integrated system using Allan variance analysis[J]. GNSS, 2004, 12(2): 10-14.

[6] 杨叔子, 吴雅. 时间序列分析的工程应用[M]. 上海: 华中理工大学出版社, 1991: 31-119.  
 YANG Shu-zi, WU Ya. Time series analysis in engineering application[M]. Shanghai: Huazhong University of Science and Technology Press, 1991: 31-119. (in Chinese)

[7] 吉训生, 王寿荣. MEMS 陀螺仪随机漂移误差研究[J]. 宇航学报, 2006, 27(4): 640-642.  
 JI Xun-sheng, WANG Shou-rong. Research on the MEMS gyroscope random drift error[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(4): 640-642. (in Chinese)

[8] 王新龙, 陈涛, 杜宇. 基于 ARMA 模型的光纤陀螺漂移数据建模方法研究[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 26(1): 5-7.  
 WANG Xin-long, CHEN Tao, DU Yu. The drift method of fiber optic gyros based on the ARMA model[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2005, 26(1): 5-7. (in Chinese)