

# 两种失效模式下离散时间 重试排队之研究\*

王金亭 赵青

(北京交通大学数学系, 北京 100044)

(E-mail: jtwang@bjtu.edu.cn)

**摘要** 本文研究了有启动失效或在服务中失效的离散时间 Geo/Geo/1 可修重试排队系统, 得到系统的嵌入马氏链及其遍历性条件. 在此基础上, 又得到了稳态下系统的各种性能分析指标及随机分解性质. 最后, 通过数值算例研究了失效参数对平均队长的影响.

**关键词** 离散时间重试排队; 马氏链; Kolmogorov 方程; 不可靠服务台

**MR(2000) 主题分类** 60K25; 90B22

**中图分类** O226

## 1 引言

重试排队系统已经在许多实际问题, 例如电话交换系统、计算机网络和通讯网络中得到广泛的应用. 它与普通的排队系统的主要区别在于服务台忙碌或者由于其它原因(如修理、休假等)不可用时, 顾客不在服务区内排队等待, 而是进入所谓的“重试空间”(Retrial Orbit), 经过一段随机的时间后再次进入服务区内以尝试得到服务. 因此, 系统中顾客的人数对于服务台来说是未知的. 同样, 顾客也不能如普通排队系统中的顾客那样时刻知晓服务台的状态. 既使有时服务台是空闲的, 系统中的顾客也不能察觉并得到及时的服务. 如电话订票系统是一个常见的重试排队的例子. 顾客打电话订票时, 若听到忙音, 他会挂机并间隔一段较短的时间后再次拨号以求接通订票电话, 直到成功为止.

重试顾客的存在对整个系统的性能产生一些影响. 服务台很难区分重试顾客与新到达顾客, 因此系统处在重负荷工作状态时, 重试顾客将产生大量呼叫而造成系统的服务质量下降. 具体表现在新呼叫到达时其堵塞率上升, 等待时间增加, 服务台不能提供及时有效的服务. 传统排队系统的研究中忽略了这些重试顾客的存在, 因而不能更好地刻画和分析相关领域中的实际问题. 关于重试排队系统的专著或综述, 见 [2,3,10,11,14,21].

过去关于重试排队系统的研究多集中在连续时间系统中, 直到 1995 年 Yang 和 Li<sup>[22]</sup>才把相应讨论推广到离散时间上. 众所周知, 由于现代计算机与通讯网络系统中例如分段 Aloha 系统及 B-ISDN 网络中的 ATM 系统, 都是以比特或单位电脉冲的持续时间为基本时间单位的, 故离散时间排队是刻画计算机通讯网络的更理想模型. 尽管离散时间排队有此重要性, 但在重试排队系统中相关文献较少, 参见 [1, 4-8, 15-20].

本文 2008 年 5 月 12 日收到. 2008 年 8 月 21 日收到修改稿.

\* 国家自然科学基金 (10871020) 资助项目

在上述工作中, 只有 [7,17,19,20] 处理了服务台不可靠的情况. [7,19,20] 中研究了服务台在启动时可失效的离散时间 Geo/G/1 重试排队, 但在服务中服务台不会失效. [17] 中作者假设服务台在工作时可失效, 失效后正在被服务的顾客等待服务台修理完毕后再继续进行服务. 系统为离散时间 Geo/Geo/1 重试排队, 没有考虑服务台在启动时可失效的可能. 本文中我们同时考虑了以上两种服务台失效的可能, 与 [17] 中假设不同, 我们假定服务中若服务台失效则正在接受服务的顾客将不再等待修理完毕后再继续完成剩余的服务量, 而是中断服务加入到重试空间中去, 重新尝试以接受服务. 这样的假设更符合实际中顾客的行为及问题产生的实际背景.

## 2 模型的描述

我们考虑一个离散时间重试排队系统, 时间轴被等分为单位时间间隔, 称为时隙 (Slots). 每个时段被标上  $0, 1, \dots, m, \dots$ . 本文假设所有的排队活动, 如到达、离去、重试、修理完成等, 都在时隙的边界处发生. 因此, 有可能同时发生多个事件. 为处理方便, 我们假使系统是早到达系统 (EAS: Early Arrival System), 即在时段端点右侧依次发生到达、重试和开始修理, 而在时隙端点左侧依次发生服务完毕顾客离去、修理完成等事件. 有关 EAS 系统, 请见 Hunter<sup>[13]</sup>.

顾客到达是依到达率为  $p$  的 Bernoulli 过程. 若顾客到达系统时服务台正在忙或者处于修理状态, 顾客必须离开服务区, 经过一个随机时段后再回来重试以得到服务. 这些等待重试的顾客被称为重试空间 (Orbit) 里的顾客. 若顾客 (第一次到达或重试的) 到达系统中发现服务台空闲, 在进行服务前他必须成功启动服务台, 成功启动服务台的概率是  $\theta$ . 如果启动服务台不成功 (以概率  $\bar{\theta} \equiv 1 - \theta$ ), 则服务台马上得到修理, 顾客必须到重试空间里等待. 此外, 我们假设服务台以 Bernoulli 过程失效, 失效率  $\bar{\alpha} \equiv 1 - \alpha$ . 即  $\alpha$  是服务台在一个时段内不会失效的概率.

重试时间 (同个顾客两次重试间隔) 是参数为  $1 - r$  的几何分布, 即  $r$  是一个顾客在一个时段内不会重试的概率. 若多个顾客在一个时段内重试且服务台空闲, 则选其中任一顾客进行服务, 其他返回重试空间.

服务时间为独立且同分布于参数为  $\bar{s} = 1 - s$  的几何分布的随机变量, 即  $s$  为一个顾客在一个时段内不能完成服务的概率. 完成服务后, 顾客将离开此系统且不再对它有任何影响.

修理时间服从独立同分布且分布函数为一般分布的随机变量, 分布函数为  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ , 概率母函数是  $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x^i$ , 其  $n$  阶阶乘矩为  $\beta_n$ . 假设服务台修复如新.

为一般起见, 我们假设  $0 < p < 1$ ,  $0 < s < 1$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $0 < \theta \leq 1$  及  $0 \leq \alpha < 1$ . 为方便计, 令系统的负荷量 (traffic intensity) 记为

$$\rho = \frac{p\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]}{\bar{s}\theta}.$$

下节将证明  $\rho < 1$  是本文排队系统模型对应的马氏链的遍历性条件, 且  $\rho < 1$  等价于  $(s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}] < 0$ .

## 3 马氏链

在时刻  $m^+$  (时隙端点  $m$  的右侧), 系统可由过程  $X_m = (C_m, \xi_m, N_m)$  表示, 这里  $C_m$  表示服务台状态 (0,1 或 2 分别对应空闲, 忙碌或失效),  $N_m$  表示重试空间中顾客个数. 如  $C_m = 2$ ,  $\xi_m$  表示剩余的修理时间.

易见  $\{X_m, m \in \mathbb{N}\}$  是本文排队系统的嵌入马氏链, 其状态空间是

$$S = \{(0, k) : k \geq 0; (1, k) : k \geq 0; (2, i, k) : i \geq 1, k \geq 1\}.$$

本文将研究嵌入马氏链  $\{X_m, m \in \mathbb{N}\}$  的平稳分布

$$\begin{aligned} \pi_{0,k} &= \lim_{m \rightarrow \infty} P[C_m = 0, N_m = k]; & k \geq 0, \\ \pi_{1,k} &= \lim_{m \rightarrow \infty} P[C_m = 1, N_m = k]; & k \geq 0, \\ \pi_{2,i,k} &= \lim_{m \rightarrow \infty} P[C_m = 2, \xi_m = i, N_m = k]; & i \geq 1, k \geq 1. \end{aligned}$$

平稳状态下系统的 Kolmogorov 方程组为:

$$\pi_{0,k} = \bar{p}r^k \pi_{0,k} + \bar{s}pr^k \pi_{1,k} + (1 - \delta_{0k})\bar{p}r^k \pi_{2,1,k}, \quad k \geq 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \pi_{1,k} &= p\theta\pi_{0,k} + \bar{p}(1 - r^{k+1})\theta\pi_{0,k+1} + (\bar{s}p\theta + \bar{s}\bar{p}\alpha)\theta\pi_{1,k} + \bar{s}\bar{p}(1 - r^{k+1})\theta\pi_{1,k+1} \\ &\quad + (1 - \delta_{0k})s\bar{p}\alpha\pi_{1,k-1} + (1 - \delta_{0k})p\theta\pi_{2,1,k} \\ &\quad + \bar{p}(1 - r^{k+1})\theta\pi_{2,1,k+1}, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \pi_{2,i,k} &= p\bar{\theta}t_i\pi_{0,k-1} + \bar{p}(1 - r^k)\bar{\theta}t_i\pi_{0,k} + (\bar{s}p\bar{\theta} + \bar{s}\bar{p}\alpha)t_i\pi_{1,k-1} + \bar{s}\bar{p}(1 - r^k)\bar{\theta}t_i\pi_{1,k} \\ &\quad + (1 - \delta_{1k})s\bar{p}\bar{\alpha}t_i\pi_{1,k-2} + (1 - \delta_{1k})p\bar{\theta}t_i\pi_{2,1,k-1} + \bar{p}(1 - r^k)\bar{\theta}t_i\pi_{2,1,k} \\ &\quad + (1 - \delta_{1k})p\pi_{2,i+1,k-1} + \bar{p}\pi_{2,i+1,k}, \quad i \geq 1, k \geq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

一致化条件:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{0,k} + \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{1,k} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{2,i,k} = 1.$$

为解 (1)-(3) 式, 引入母函数

$$\phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{0,k} z^k; \quad \phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{1,k} z^k; \quad \phi_2(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{2,i,k} x^i z^k$$

及辅助母函数

$$\phi_{2,i}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{2,i,k} z^k, \quad i \geq 1.$$

公式 (1)-(3) 两边同乘以  $z^k$ , 对  $k$  做和, 得到

$$\phi_0(z) = \bar{p}[\phi_0(rz) + \bar{s}\phi_1(rz) + \phi_{2,1}(rz)], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \frac{\theta}{z}(\bar{p} + pz)\phi_0(z) + (\bar{p} + pz)\left(\frac{\theta\bar{s}}{z} + s\alpha\right)\phi_1(z) + \frac{\theta}{z}(\bar{p} + pz)\phi_{2,1}(z) \\ &\quad - \frac{\bar{p}}{z}\theta[\phi_0(rz) + \bar{s}\phi_1(rz) + \phi_{2,1}(rz)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,i}(z) &= (\bar{p} + pz)\phi_{2,i+1}(z) + (\bar{p} + pz)\bar{\theta}t_i\phi_0(z) + (\bar{p} + pz)(\bar{s}\bar{\theta} + z\bar{s}\bar{\alpha})t_i\phi_1(z) \\ &\quad + (\bar{p} + pz)\bar{\theta}t_i\phi_{2,1}(z) - \bar{p}\bar{\theta}t_i[\phi_0(rz) + \bar{s}\phi_1(rz) + \phi_{2,1}(rz)], \end{aligned} \quad (6)$$

把式(4)代入到(5),(6),则有

$$\phi_1(z) = -\frac{1-z}{z}p\theta\phi_0(z) + (\bar{p} + pz)\left(\frac{\theta\bar{s}}{z} + s\alpha\right)\phi_1(z) + \frac{\theta}{z}(\bar{p} + pz)\phi_{2,1}(z), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,i}(z) &= (\bar{p} + pz)\phi_{2,i+1}(z) - (1-z)p\bar{\theta}t_i\phi_0(z) + (\bar{p} + pz)(\bar{s}\bar{\theta} + zs\bar{\alpha})t_i\phi_1(z) \\ &\quad + (\bar{p} + pz)\bar{\theta}t_i\phi_{2,1}(z). \end{aligned} \quad (8)$$

之后, (8)两边乘以  $x^i$  再对  $i$  做加法, 得到

$$\begin{aligned} \frac{x - (\bar{p} + pz)}{x}\phi_2(x, z) &= (\bar{p} + pz)[\bar{\theta}T(x) - 1]\phi_{2,1}(z) + (\bar{p} + pz)(\bar{s}\bar{\theta} + zs\bar{\alpha})T(x)\phi_1(z) \\ &\quad - (1-z)p\bar{\theta}T(x)\phi_0(z). \end{aligned} \quad (9)$$

令  $x = \bar{p} + pz$  代入(9)有

$$\begin{aligned} (1-z)p\bar{\theta}T(\bar{p} + pz)\phi_0(z) &= (\bar{p} + pz)[\bar{\theta}T(\bar{p} + pz) - 1]\phi_{2,1}(z) \\ &\quad + (\bar{p} + pz)(\bar{s}\bar{\theta} + zs\bar{\alpha})T(\bar{p} + pz)\phi_1(z). \end{aligned} \quad (10)$$

下面我们先给出两个引理, 其证明不难得到, 此处省略.

**引理 1** 对  $0 \leq x \leq 1$ , 有  $T(x) \leq x$  成立.

**引理 2** 对  $0 \leq z < 1$ , 当且仅当  $(s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}] < 0$  时, 不等式  $[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z > 0$  成立.

由(5),(10)式, 可以得到母函数  $\phi_1(z)$  和  $\phi_{2,1}(z)$ :

$$\phi_1(z) = \frac{p\theta(1-z)\phi_0(z)}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z}, \quad (11)$$

$$\phi_{2,1}(z) = \frac{T(\bar{p} + pz)}{\bar{p} + pz} \frac{z(1-z)p[s(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + \bar{\theta}]\phi_0(z)}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z}. \quad (12)$$

把  $\phi_1(rz)$  和  $\phi_{2,1}(rz)$  代入(4)式有

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= \frac{[rzs(\theta - \alpha)(\bar{p} + prz) + rz\bar{\theta}]T(\bar{p} + prz) + (\bar{p} + prz)(\theta\bar{s} + rz\alpha s) - rz(\bar{p} + prz)}{(\bar{p} + prz)\{[rzs(\theta - \alpha)(\bar{p} + prz) + rz\bar{\theta}]T(\bar{p} + prz) + (\bar{p} + prz)(\theta\bar{s} + rz\alpha s) - rz\}}\bar{p}\phi_0(rz) \\ &= G(rz)\phi_0(rz). \end{aligned} \quad (13)$$

利用(13)式进行迭代我们可以得到  $\phi_0(z) = \phi_0(0) \prod_{k=1}^{\infty} G(r^k z)$ . 此无穷乘积的收敛性由下面一个引理给出.

**引理 3** 若  $(s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}] < 0$ , 则无穷乘积  $\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k z)$  收敛.

证 首先把  $G(z)$  写作

$$G(z) = 1 + F(z). \quad (14)$$

这里

$$F(z) \equiv \frac{\bar{p} + pz - [zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) - (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s)}{(\bar{p} + pz)\{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z\}}pz.$$

利用引理 2 及对  $0 \leq z \leq 1$  成立的明显不等式

$$\begin{aligned} & \bar{p} + pz - [zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) - (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) \\ & \geq \theta\{\bar{p} + pz - [zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz)\} + \bar{\theta}[\bar{p} + pz - (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s)] \geq 0, \end{aligned}$$

易证

$$\text{若 } (s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}] < 0, \text{ 则对 } 0 \leq z \leq 1, \text{ 有 } F(z) \geq 0.$$

根据 (14) 式, 无穷乘积可重写为

$$\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k z) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + F(r^k z)]. \quad (15)$$

熟知 (15) 中无穷乘积收敛的等价条件为级数  $\sum_{k=1}^{\infty} F(r^k z)$  收敛 (见 [9, Corollary 5.6]). 又

因为  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F(r^{k+1}z)}{F(r^k z)} = r < 1$ , 故引理得证.

现在把 (11), (12) 代到 (9) 中, 得到母函数

$$\begin{aligned} & \phi_2(x, z) \\ & = \frac{T(x) - T(\bar{p} + pz)}{x - (\bar{p} + pz)} \frac{xz(1-z)p[s(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + \bar{\theta}]}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z} \phi_0(z). \end{aligned}$$

根据一致化条件  $\phi_0(1) + \phi_1(1, 1) + \phi_2(1, 1) = 1$ , 我们可以算得常数

$$\phi_0(1) = \frac{(s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]}{-\bar{s}\theta},$$

从而可以得到  $\phi_0(0)$ .

总结以上, 我们得到如下定理.

**定理 1** 若  $(s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}] < 0$ , 则嵌入马氏链  $\{X_m, m \in \mathbb{N}\}$  的平稳分布有如下母函数:

$$\begin{aligned} \phi_0(z) & = \frac{(s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]}{-\bar{s}\theta} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k z)}{\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k)}, \\ \phi_1(z) & = \frac{p\theta(1-z)\phi_0(z)}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z}, \\ \phi_2(x, z) & = \frac{T(x) - T(\bar{p} + pz)}{x - (\bar{p} + pz)} \frac{xz(1-z)p[s(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + \bar{\theta}]}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z} \phi_0(z), \end{aligned}$$

这里

$$G(z) = \frac{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z(\bar{p} + pz)}{(\bar{p} + pz)\{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z\}} \bar{p}.$$

**推论 1** (1) 稳态下服务台处于空闲、忙和失效的概率分别是

$$\phi_0(1) = \frac{(s - \bar{p})\theta + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]}{-\bar{s}\theta}, \quad \phi_1(1, 1) = \frac{p}{\bar{s}}, \quad \phi_2(1, 1) = \frac{p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]}{\bar{s}\theta}.$$

(2) 重试空间中顾客人数的母函数为

$$\Psi(z) = \frac{(\bar{p} + pz)(zs\theta + \theta\bar{s}) - z\theta + (1 - z)p\theta}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z} \phi_0(z).$$

(3) 整个系统中顾客人数的母函数为

$$\Phi(z) = \frac{(\bar{p} + pz)(zs\theta + \theta\bar{s}) - z\theta + z(1 - z)p\theta}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z} \phi_0(z).$$

(4) 重试空间中顾客人数的平均值为

$$E[N] = \frac{2p^2s\theta + 2p\beta_1[ps\bar{\alpha} + \bar{s}s(\theta - \alpha) + \bar{s}\bar{\theta}] + \bar{s}p^2\beta_2[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]}{2\bar{s}\{\theta(\bar{p} - s) + p\beta_1[s(\alpha - \theta) - \bar{\theta}]\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} r^k.$$

(5) 系统平均队长是  $E[L] = E[N] + \frac{p}{\bar{s}}$ .

**注 1** 与 [17] 相似, 为了数值逼近得到的性能指标, 需要估计级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} r^k$ . 易见

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} r^k = \frac{1}{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} (r^k - r^{k+1}).$$

故此, 级数可由如下积分近似得到:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} r^k \\ & \approx \frac{r}{1-r} \int_0^1 \frac{G'(z)}{G(z)} dz = \frac{r \ln G(1)}{1-r} = \frac{r}{1-r} \ln \left[ \frac{p + \theta(s - \bar{p}) + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]}{\theta(s - \bar{p}) + p\beta_1[s(\theta - \alpha) + \bar{\theta}]} \right] \\ & \quad (\text{若 } r \rightarrow 1). \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} r^k \\ & \approx \frac{r}{1-r} \sum_{k=1}^{n_0(\varepsilon)} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} (r^k - r^{k+1}) + \frac{1}{1-r} \int_0^{r^{n_0(\varepsilon)+1}} \frac{G'(z)}{G(z)} dz \\ & = \sum_{k=1}^{n_0(\varepsilon)} \frac{G'(r^k)}{G(r^k)} r^k + \frac{\ln G(r^{n_0(\varepsilon)+1})}{1-r} \end{aligned}$$

(这里对每个  $\varepsilon > 0$ , 选择  $n_0(\varepsilon)$  使得  $r^{n_0(\varepsilon)+1} < \varepsilon$ .)

由于计算  $G(z)$  和  $G'(z)$  比较麻烦, 逼近方法 (ii) 提供了进行数值计算的一种方法. 它对任何  $r \in [0, 1)$  都是适用的.

**注 2** (随机分解) 随机分解已经广泛地存在于带有休假的  $M/G/1$  型排队系统中, 见 [12]. 即, 在稳态下系统的总队长在任意一点可分解为两个独立随机变量的和: 一个

是没有休假策略时对应的通常排队系统的稳态队长, 另一个是服务台休假时的排队系统的稳态的队长.

令  $\Pi(z)$  为  $Geo/Geo/1/\infty$  可修排队系统中队长的概率母函数,  $\chi(z)$  为服务台休假时对应的休假排队系统队长的概率母函数,  $\Phi(z)$  为要被分解的随机变量的概率母函数. 则随机分解可表示为  $\Phi(z) = \Pi(z)\chi(z)$ .

为了得到  $\chi(z)$  的表达式, 需要在本文讨论的系统中指明如何定义休假这一概念. 与 [17] 相仿, 我们定义服务台空闲时即为休假. 注意到在重试排队中即使系统中顾客非空, 服务台也可能空闲. 由此定义, 有  $\chi(z) = \frac{\varphi_0(z)}{\varphi_1(z)}$ .

另一方面, 在上文得到的  $\Phi(z)$  中令  $r = 0$ , 易得  $Geo/Geo/1/\infty$  启动可失效的可修排队系统中队长的概率母函数为:

$$\Pi(z) = \frac{(\bar{p} + pz)(zs\theta + \theta\bar{s}) - z\theta + z(1-z)p\theta}{[zs(\theta - \alpha)(\bar{p} + pz) + z\bar{\theta}]T(\bar{p} + pz) + (\bar{p} + pz)(\theta\bar{s} + z\alpha s) - z}$$

由推论 1(3) 我们知道  $\Phi(z) = \Pi(z)\chi(z)$  成立, 从而验证了 [12] 中提出的随机分解律对我们按上述定义的这一特殊的离散时间休假排队系统也是有效的.

### 4 数值算例

本节将给出两个数值算例来观察系统参数对重试空间顾客平均人数的影响. 为此, 假设修理时间服从一个负二项分布, 其母函数为

$$R(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^n$$

即修理时间是  $n$  个服从几何分布 (均值为 2) 的独立随机变量的和.

下面着重观察重试空间顾客平均人数. 这里我们给出重试空间顾客平均人数  $E[N]$  与  $\alpha$  的关系, 因为它是本文可修系统最重要的参数. 由遍历性条件, 得到系统稳定条件为  $\alpha > \alpha^*$ ,

$$\alpha^*(p, \theta, s, \beta_1) = \theta + \frac{\bar{\theta}}{s} - \frac{(\bar{p} - s)\theta}{p\beta_1 s}$$

因此, 图形中函数的定义域为  $(\alpha^*, 1]$ .

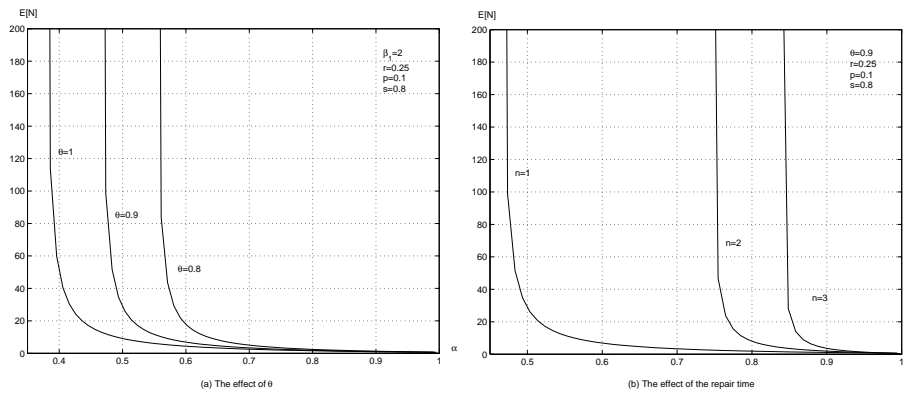


图 1 失效率  $\alpha$  对 orbit 平均顾客人数的影响

在图 1 中, 我们分别研究了启动成功率和修理时间对重试空间顾客平均人数  $E[N]$  的影响. 正如所期, 选择不同的参数时,  $E[N]$  随  $\alpha$  的增大而递减. 此外, 当参数  $\alpha$  逼

近  $\alpha^*$  时, 重试空间顾客平均人数  $E[N]$  趋于发散. 这些图象说明了  $E[N]$  随  $n$  的增大而增大, 而随着  $\theta$  的减小而增大.

最后, 服务台在工作时可失效的离散时间 Geo/Geo/1 重试排队 (令  $\theta = 1$  即可得到) 的重试空间顾客平均人数  $E[N]$  给出了本文讨论系统的相应  $E[N]$  的下界.

**致谢** 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

### 参 考 文 献

- [1] Alfa A S. Discrete-time Analysis of the Gi/G/1 System with Bernoulli Retrials: an Algorithmic Approach. *Annals of Operations Research*, 2006, 141: 52–66
- [2] Artalejo J R. Accessible Bibliography on Retrial Queues. *Mathematical and Computer Modelling*, 1999, 30: 1–6
- [3] Artalejo J R. A Classified Bibliography of Research on Retrial Queues: Progress in 1990-1999. *Top*, 1999, 7: 187–211
- [4] Artalejo J R, Atencia I, Moreno P. A Discrete-time Geo<sup>[X]</sup>/G/1 Retrial Queue with Control of Admission. *Applied Mathematical Modelling*, 2005, 29: 1100–1120
- [5] Atencia I, Moreno P. Discrete-time Geo<sup>[X]</sup>/G<sub>H</sub>/1 Retrial Queue with Bernoulli Feedback. *Computers and Operations Research*, 2004, 31: 359–381
- [6] Atencia I, Moreno P. A Discrete-time Geo/G/1 Retrial Queue with General Retrial Times. *Queueing Systems*, 2004, 48: 5–21
- [7] Atencia I, Moreno P. A Discrete-time Geo/G/1 Retrial Queue with the Server Subject to Starting Failures. *Annals of Operations Research*, 2006, 141(1): 85–107
- [8] Choi B D, Kim J W. Discrete-time Geo<sub>1</sub>, Geo<sub>2</sub>/G/1 Retrial Queueing System with Two Types of Calls. *Computers and Mathematics with Applications*, 1997, 33(10): 79–88
- [9] Conway J B. Functions of One Complex Variable. New York: Springer-Verlag, 1973
- [10] Falin G I. A Survey Of Retrial Queues. *Queueing Systems*, 1990, 7: 127–167
- [11] Falin G I, Templeton J G C. Retrial Queues. London: Chapman & Hall, 1997
- [12] Fuhrmann S W, Cooper R B. Stochastic Decompositions in the M/G/1 Queue with Generalized Vacations. *Operations Research*, 1985, 33: 1117–1129
- [13] Hunter J J. Mathematical Techniques of Applied Probability. Vol.2, Discrete-Time Models: Techniques And Applications. New York: Academic Press, 1983
- [14] Kulkarni V G, Liang H M. Retrial Queues Revisited. In: *Frontiers in Queueing* (ed. Dshalalow J. H.), Boca Raton, FL: CRC Press, 1996
- [15] Li H, Yang T. Geo/G/1 Discrete-time Retrial Queue with Bernoulli Schedule. *European J. Operational Research*, 1998, 111(3): 629–649
- [16] Li H, Yang T. Steady-state Queue Size Distribution of Discrete-time PH/Geo/1 Retrial Queues. *Mathematical and Computer Modelling*, 1999, 30: 51–63
- [17] Morento P. A Discrete-time Retrial Queue with Unreliable Server and General Server Lifetime. *Journal of Mathematical Science*, 2006, 132(5): 643–655
- [18] Takahashi M, Osawa H, Fujisawa T. Geo<sup>[X]</sup>/G/1 Retrial Queue with Non-preemptive Priority. *Asia-pacific Journal of Operational Research*, 1999, 16: 215–234
- [19] Wang J T, Zhao Q. Discrete-time Geo/G/1 Retrial Queue with General Retrial Times and Starting Failures. *Mathematical and Computer Modelling*, 2007, 45(7-8): 853–863
- [20] Wang J T, Zhao Q. A Discrete-time Geo/G/1 Retrial Queue with Starting Failures and Second Optional Service. *Computers and Mathematics with Applications*, 2007, 53(1): 115–127
- [21] Yang T, Templeton J G C. A Survey on Retrial Queues. *Queueing Systems*, 1987, 2: 201–233
- [22] Yang T, Li H. On the Steady-state Queue Size Distribution of the Discrete-time Geo/G/1 Queue with Repeated Customers. *Queueing Systems*, 1995, 21: 199–215



## On the Discrete-time Retrial Queue with Two Failure Modes

WANG JINTING      ZHAO QING

*(Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)*

*(E-mail: jtwang@bjtu.edu.cn)*

**Abstract** A discrete-time Geo/Geo/1 retrial queue with two failure modes, i.e., starting failures and server breakdowns during service, is studied in this paper. The Markov chain underlying the considered queueing system is investigated and its ergodicity condition is obtained. Based on these results, some performance measures of the system in steady-state and a stochastic decomposition result are derived. Finally, some numerical examples show the influence of the failure parameters on the mean orbit size.

**Key words** discrete-time retrial queues; Markov chain; Kolmogorov equations; unreliable server

**MR(2000) Subject Classification** 60K25; 90B22

**Chinese Library Classification** O226