第 31 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 31 No. 1
2008 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2008

拟阵上合作对策的单调解 *

何 华

(西北工业大学应用数学系，西安 710072)

孙 浩

(西北工业大学应用数学系，西安 710072)

(E-mail: hsun@nwpu.edu.cn)

摘 要 本文主要介绍了拟阵上的合作对策 Shapley 解的结构，并利用强单调性、交换性、概率有效性等三条公理刻画了拟阵上合作对策 Shapley 解的唯一性. 同时讨论了本文的三条公理与 Bilbao 等人的四条公理的等价性. 最后给出拟阵上合作对策核心的定义及其结构.

关键词 拟阵；合作对策； Shapley 值；强单调性

MR(2000) 主题分类 90D12

中图分类 0225

1 引言

一个合作对策可以用一个有序对 (N,v) 表示，其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是参与者的集合， v 是一集合函数，即 $v:2^N\longrightarrow\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 是实数域. 在经典合作对策里，通常假设每个参与者都可以自由结盟并能获得相应联盟的值. 当联盟 $S=N$ 时， S 就是最大联盟. 合作对策的主题就是研究如何公平合理地在所有参与者之间分配 $v(N)$. 常用的分配方案有 Shapley 值、核心等. 但是在现实生活中，由于参与者之间相互存在矛盾，因而只有部分联盟可以形成. 它们之间的结构通常可以用代数拓扑结构、组合结构等方式描述，例如用格、拟阵等来描述. 本文我们将讨论联盟结构受到拟阵限制时合作对策解的公理化理论. Bilbao 等人曾在 [1,2] 中分别介绍了静态、动态模型下拟阵上合作对策的 Shapley[3] 值，他们用线性性质、一致对策的交换性、哑元性、概率有效性等来公理刻画了 Shapley 值的唯一性. 在 [4,5] 里孙浩等人还研究了拟阵上集合对策的边缘解，这个解的意义与 Shapley 值类似. Young[6] 给出了 Shapley 值另一种公理方法，这种方法摆脱了人们研究 Shapley 值一直依赖的可加性公理. 本文主要借鉴 Young 的思想，用强单调性、一致对策的交换性、概率有效性刻画拟阵上合作对策 Shapley 值的唯一性.

本文第 2 节介绍了拟阵的性质、秩函数、可行联盟和基联盟等概念. 第 3 节首先用强单调性，对策解的交换性，概率有效性刻画了拟阵上合作对策 Shapley 值的唯一性，同时证明了这三个公理与 [1] 中的四个公理之间的等价性，最后证明了拟阵上合作对策的核心可以由其基联盟的核心唯一刻画.

本文 2006 年 12 月 6 日收到. 2007 年 11 月 8 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (No.70571065) 和陕西省自然科学基金 (No.2007A09) 资助项目.

2 拟阵上合作对策的基本概念

我们首先介绍拟阵的概念.

定义 2.1 一个拟阵是一个有序对 $(N,\mathcal{M})$, 包括有限集 N 和 N 的一些子集的集合 $\mathcal{M}$, $\emptyset\in\mathcal{M}$, 且满足下面两个条件:

(M1) 如果 $S\in\mathcal{M}$ 且 $T\subseteq S$, 那么 $T\in\mathcal{M}$.

(M2) 如果 $S,\ T\in\mathcal{M}$ 且 $|S|=|T|+1$, 那么一定存在一个 $i\in S\setminus T$ 使得 $T\cup\{i\}\in\mathcal{M}$.

这两个条件可以解释为: (M1) 如果一个联盟形成，则它的任一子集也可结成联盟，因为它的参与者有公共利益，所以他们的子集也有公共利益，从而可以形成联盟. (M2) 如果两个可行联盟的参与者个数不相等，则较大联盟里一定存在一个参与者使得这个参与者加入较小联盟后新联盟也是可行联盟. 一般假设 $\bigcup\limits_{S\in\mathcal{M}}\{i:i\in S\}=N$.

定义 2.2 对任意的 $X\in 2^N$, 2^N 上拟阵的秩函数 $r:2^N\longrightarrow Z_+$ 为

$$r(X)=\max\big\{|S|:S\subseteq X,\ S\in\mathcal{M}\big\}. \tag{2.1}$$

很明显， $S\in\mathcal{M}$ 当且仅当 $r(S)=|S|$, 所以函数 r 可以决定唯一的拟阵 $\mathcal{M}=\big\{S\subseteq N:r(S)=|S|\big\}$. 拟阵 $\mathcal{M}$ 中的元素叫做可行联盟，最大的可行联盟叫做基联盟. 通过 (M1) 可以得到基联盟 B 的任一个子集都是可行联盟，即 $2^B\subseteq\mathcal{M}$. 我们知道所有的基联盟都有相同的维数，即对拟阵 $\mathcal{M}$ 的任一个基联盟 B 都有: $|B|=r(N)$. 关于拟阵的详细内容请参阅 [7].

例 2.3 设 G 是一个图，其边集为 $E=E(G)$, 当 $X\subseteq E$ 是 G 的一个无圈子图时， X 的任意子集 Y 也是 G 的一个无圈子图. 当 X_1 、 $X_2\subseteq E$ 是 G 的两个无圈子图并且 $|X_1|<|X_2|$ 时，则在 G 的子图 $X_1\cup X_2$ 中， X_1 也不是 $X_1\cup X_2$ 的极大无圈子图. 因而有 $e\in X_2-X_1$, 使得 $X_1\cup e$ 也是 G 中的一个无圈子图，所以 G 中的无圈子图可以构成一个拟阵.

定义 2.4 拟阵上的合作对策定义为三元有序组 $(N,v,\mathcal{M})$, 其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示参与者的集合， $\mathcal{M}$ 为定义在 N 上的一个拟阵， v 为定义在 $\mathcal{M}$ 上的一个函数，即 $v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$.

在本文中,在不引起混淆的情况下,用 $(v,\mathcal{M})$ 或者 v 表示拟阵上的合作对策 $(N,v,\mathcal{M})$, 拟阵 $\mathcal{M}$ 上合作对策空间记为 $\Gamma(\mathcal{M})$. 用映射 φ 表示拟阵上合作对策的解, 即 $\varphi:\Gamma(\mathcal{M})\to(\mathbb{R})^N$. 如果 $(N,v,\mathcal{M})\in\Gamma(\mathcal{M})$, 则 $\varphi_i(N,v,\mathcal{M})$ 表示按照分配方案 φ 将拟阵上的合作对策 $(N,v,\mathcal{M})$ 中的收益分配给第 i 个参与者的支付，即

$$\begin{aligned}(\varphi(N,v,\mathcal{M}))_{i\in N}=&(\varphi_1(N,v,\mathcal{M}),\qquad\varphi_2(N,v,\mathcal{M}),\cdots,\varphi_n(N,v,\mathcal{M}))\\=&(\varphi(v,\mathcal{M}))_{i\in N}=(\varphi(v))_{i\in N}.\end{aligned}$$

3 拟阵上合作对策的 Shapley 值

为了论文叙述的方便，首先介绍几个概念与记号.

(1) 令 $S\in\mathcal{M}$, 收缩拟阵 $\mathcal{M}/S$ 为: $\mathcal{M}/S=\big\{T\in\mathcal{M}:T\cap S=\emptyset,\ T\cup S\in\mathcal{M}\big\}$.

当 $S=\{i\}$, 对所有的 $i\in N$, $\mathcal{M}/\{i\}$, 简记为 $\mathcal{M}/i$.

(2) 拟阵 $\mathcal{M}$ 的基联盟的集合记为 $B(\mathcal{M})$. 对任一 $S\in\mathcal{M}$,

$$B_S(\mathcal{M})=\big\{B\in B(\mathcal{M}):S\subseteq B\big\}$$

表示包含联盟 S 的基联盟的集合. 尤其是当 $S=\{i\}$, 对所有的 $i\in N$, 记为 $B_i(\mathcal{M})$.

(3) 基联盟的概率分布集合记为

$$P(\mathcal{M})=\Big\{P\in(R_+)^{B(\mathcal{M})},\sum_{B\in B(\mathcal{M})}P(B)=1\Big\}.$$

(4) 拟阵 $\mathcal{M}$ 中联盟 S 在对策 v 中的可能参与影响力记为

$$v^P(S)=\sum_{B\in B_S(\mathcal{M})}P(B).$$

(5) 设 $v\in\Gamma(\mathcal{M})$, $i\in N$, 拟阵 $\mathcal{M}$ 上合作对策的 Shapley 值定义为

$$Sh_i^P(v)=\sum_{T\in\mathcal{M}/i}\frac{v^P(T\cup\{i\})|T|!(r(N)-|T|-1)!}{r(N)!}\big[v(T\cup\{i\})-v(T)\big]. \tag{3.1}$$

它的等价形式为

$$Sh_i^P(v)=\sum_{B\in B_i(\mathcal{M})}P(B)Sh_i^B(v_B). \tag{3.2}$$

$Sh^B=(Sh_i^B)_{i\in B}$ 表示合作对策 (B,v_B) 的经典 Shapley 值. 其中当 $S\subseteq B$, 则 $v_B(S)=v(S)$, 也就是 v_B 是限制在 2^B 上的对策 v.

定理 3.1 设 $(N,v,\mathcal{M})\in\Gamma(\mathcal{M})$ 为拟阵上的合作对策, $P\in P(\mathcal{M})$ 是 $B(\mathcal{M})$ 上的一个概率分布. 那么存在唯一的向量 $\varphi=(\varphi_i)_{i\in N}$ 满足下面三个公理:

(1) 强单调性: 若对任意的 $S\in\mathcal{M}$ 且 $S\ni i$, $v^i(S)=v(S)-v(S\setminus\{i\})\geq w^i(S)=w(S)-w(S\setminus\{i\})$, 则 $\varphi_i(v)\geq\varphi_i(w)$, 其中 $v,w\in\Gamma(\mathcal{M})$.

(2) 交换性: 若对任意的 $S\subseteq\mathcal{M}/\{i,j\}$, $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$, 则 $\varphi_i(v)=\varphi_j(v)$.

(3) 概率有效性: $\sum\limits_{i\in N}\varphi_i(v)=\sum\limits_{B\in B(\mathcal{M})}P(B)v(B)$.

并且对任意的 $i\in N$, $\varphi_i(v)=Sh_i(v)$.

证

($\Longrightarrow$) 利用 (3.1) 很容易证明 $(Sh_i(v))_{i\in N}$ 满足强单调性, 交换性和概率有效性.

($\Longleftarrow$) (I) 首先通过强单调性, 交换性和概率有效性确定哑元的支付.

设 i 是 $v\in\Gamma(\mathcal{M})$ 的哑元, 即对任意的 $S\in\mathcal{M}/i$, $v(S\cup\{i\})-v(S)=v(\{i\})$, 它的参与影响力为 $v^P(\{i\})$. 构造对策, 对任意的 $S\in\mathcal{M}$ 且 $S\ni i$, 令 $w(S)=v(\{i\})$, 否则, $w(S)=0$. 显然参与者 i 是 w 的哑元, 即对任意的 $S\in\mathcal{M}$ 且 $S\ni i$, $v^i(S)=v(S)-v(S\setminus\{i\})=w^i(S)=w(S)-w(S\setminus\{i\})$, 由强单调性可知, $\varphi_i(v)=\varphi_i(w)$. 同时当 $S\subseteq\mathcal{M}/\{j,k\}$ 且 $j,k\neq i$ 时, 有 $w(S\cup\{j\})=0=w(S\cup\{k\})$, 即 j 和 k 具有交换性, 因而 $\varphi_j(w)=\varphi_k(w)$. 又有强单调性可知如果 $j\neq i$, 则 $\varphi_j(w)=0$. 由概率有效性可知

$$\begin{aligned}\sum_{j\in N}\varphi_j(w)=&\varphi_i(w)+(n-1)\varphi_j(w)=\varphi_i(w)\\ =&\sum_{B\in B(\mathcal{M})}P(B)w(B)=\sum_{\substack{B\in B(\mathcal{M})\\ B\ni i}}P(B)v(\{i\})\\ =&v(\{i\})v^P(\{i\}).\end{aligned}$$

因而 $\varphi_j(w)=v(\{i\})v^P(\{i\})$. 根据强单调性, $\varphi_i(v)=\varphi_i(w)=v(\{i\})v^P(\{i\})$.

(II) 由一致对策 u_T 是集合对策空间的基可知, 任一对策 $v \in \Gamma(\mathcal{M})$ 都可以表示为:

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \in \mathcal{M}} \alpha_T u_T, \tag{3.3}$$

其中 u_T 为一致对策，即对于任意的 $S \supseteq T$, $u_T(S) = 1$, 否则 $u_T(S) = 0$, 且 $\alpha_T = \sum\limits_{R \subseteq T} (-1)^{|T|-|R|} v(R)$. 另外， Shapley 值又可以表示为

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{T \in \mathcal{M} \\ T \ni i}} \alpha_T \frac{v^P(T)}{|T|}. \tag{3.4}$$

以下将通过对 (3.3) 中非零系数的个数 m 进行归纳来证明定理 3.1.

当 $m = 0$ 时，则每个局中人都是哑元，且 $v(\{i\})$=0, 由 (I) 可知

$$\varphi_i(v) = v(\{i\}) v^P(\{i\}) = 0 = Sh_i(v).$$

当 $m = 1$ 时， $v = \alpha_T u_T$, 其中 $T \in \mathcal{M}$. 分两种情况讨论

(i) 若 i 不属于 T, 则 i 是 $\alpha_T u_T$ 的哑元. 所以

$$\varphi_i(v) = \varphi_i(\alpha_T u_T) = \alpha_T u_T(\{i\}) v^P(\{i\}) = 0 = Sh_i(v).$$

(ii) 若 i, j 属于 T, 则容易验证对 $S \subseteq \mathcal{M}/\{i,j\}$, $u_T(S \cup \{i\}) = u_T(S \cup \{j\})$, 即 i 和 j 具有可交换性，所以 $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$,

$$\begin{aligned} |T| \varphi_i(v) = & \sum_{i \in N} \varphi_i(v) = \sum_{B \in B(\mathcal{M})} P(B) \alpha_T u_T(B) \\ = & \alpha_T \sum_{B \in B_T(\mathcal{M})} P(B) = \alpha_T v^P(T), \end{aligned}$$

即 $\varphi_i(v) = \frac{\alpha_T v^P(T)}{|T|} = Sh_i(v)$.

假设非零系数为 m 个时，$\varphi_i(v) = Sh_i(v)$, 以下归纳非零系数为 $m+1$ 个时的情况. 由于非零系数为 $m+1$ 个，对策 v 的可以表示为

$$v = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{T_k} u_{T_k}.$$

注意到 $\alpha_{T_k} \neq 0$, $T_k \in \mathcal{M}$. 令 $T = \bigcap\limits_{k=1}^{m+1} T_k$. 若 i 不属于 T, 则定义一个新的对策 w, 使得

$$w = \sum_{T_k \ni i} \alpha_{T_k} u_{T_k},$$

则 w 的非零系数个数至多是 m 个，并且对所有的 $S \in \mathcal{M}/\{i\}$ 有 $v^i(S) = w^i(S)$, 通过归纳并结合强单调性可得

$$\varphi_i(w) = \varphi_i(v) = \sum_{T_k \ni i} \alpha_{T_k} w^P(T_k)/|T_k| = Sh_i(v).$$

现在只需证明当 $i \in T = \bigcap_{k=1}^{m+1} T_k$ 时, $\varphi_i(v) = Sh_i(v)$. 由概率有效性可知

$$\sum_{i\in N} \varphi_i(v) = \sum_{i\in N} Sh_i(v). \tag{3.5}$$

又由于当 $i, j \in T$ 时满足交换性, 因而 $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$. 化简 (3.5),

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in N} \varphi_i(v) = \sum_{i\in N} Sh_i(v)\\
\Rightarrow &\sum_{i\in T} \varphi_i(v) + \sum_{i\in N\setminus T} \varphi_i(v) = \sum_{i\in T} Sh_i(v) + \sum_{i\in N\setminus T} Sh_i(v)\\
\Rightarrow &|T|\varphi_{i:i\in T}(v) + \sum_{i\in N\setminus T} Sh_i(v) = |T| Sh_{i:i\in T}(v) + \sum_{i\in N\setminus T} Sh_i(v)\\
\Rightarrow &\varphi_{i:i\in T}(v) = Sh_{i:i\in T}(v).
\end{aligned}$$

综上所述, 当拟阵上的合作对策的解 $\varphi(v)$ 满足三条公理时, 则对任意的 $i \in N$,

$$\varphi_i(v) = Sh_i(v).$$

由此可见, 拟阵上的合作对策的解 $\varphi(v)$ 满足三条公理当且仅当 $\varphi(v) = Sh(v)$.

Bilbao[1] 等人利用四条公理刻画 Shapley 值的唯一性, 定理 3.1 用三条公理刻画了 Shapley 值的唯一性, 避免了用可加性刻画 Shapley 值. 以下将证明这两组公理是等价的.

定理 3.2 任意 $v,\ w \in \Gamma(\mathcal{M})$, 下列两组公理是等价的:

(i) 线性性质: 对每个 $i \in N,\ \alpha,\ \beta \in R$, 有 $\varphi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi_i(v) + \beta\varphi_i(w)$.

(ii) 一致对策的交换性: 对任意的 $T \in \mathcal{M}$, 当 $i, j \in T$ 时, $\varphi_i(u_T) = \varphi_j(u_T)$.

(iii) 哑元性: 若 i 是 v 的哑元, 则 $\varphi_i(v) = v(\{i\})v^P(\{i\})$.

(iv) 概率有效性: $\sum\limits_{i\in N} \varphi_i(v) = \sum\limits_{B\in B(\mathcal{M})} P(B)v(B)$.

与

(1) 强单调性: 若对任意的 $S \in \mathcal{M}$ 且 $S \ni i$, $v^i(S) = v(S) - v(S\setminus\{i\}) \geq w^i(S) = w(S) - w(S\setminus\{i\})$, 则 $\varphi_i(v) \geq \varphi_i(w)$.

(2) 交换性: 若对任意的 $S \subseteq \mathcal{M}/\{i,j\}$, $v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$, 则 $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.

(3) 概率有效性: $\sum\limits_{i\in N} \varphi_i(v) = \sum\limits_{B\in B(M)} P(B)v(B)$.

证 (⇒) (1) 强单调性

设 $v^i(S) \geq w^i(S)$, 即 $(v-w)^i(S) \geq 0$. 构造对策, 对任意的 $S \in \mathcal{M}$ 且 $S \ni i$, 令 $\gamma_1(S) = (v-w)(S)$, 否则, $\gamma_1(S) = 0$. 结合 (3.3), γ_1 可表示为 $\gamma_1 = \sum\limits_{\emptyset\neq T\in\mathcal{M}} \alpha_T u_T$, 其中 $\alpha_T = \sum\limits_{R\subseteq T} (-1)^{|T|-|R|}\gamma_1(R)$. 若 $i \notin T$, 则根据 γ_1 的定义, $\alpha_T = 0$, 因而 $\gamma_1 = \sum\limits_{\substack{T\ni i\\ T\in\mathcal{M}}} \alpha_T u_T$. 再由线性性质可得

$$\varphi_i(\gamma_1) = \varphi_i\Big(\sum_{\substack{T\ni i\\ T\in\mathcal{M}}} \alpha_T u_T\Big) = \sum_{\substack{T\ni i\\ T\in\mathcal{M}}} \alpha_T \varphi_i(u_T) = \sum_{\substack{T\ni i\\ T\in\mathcal{M}}} \alpha_T \frac{v^P(T)}{|T|}$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{M}/i} \frac{v^P(T\cup\{i\})|T|!(r(N)-|T|-1)!}{r(N)}\big[\gamma_1(T\cup\{i\})-\gamma_1(T)\big].$$

对任意的 $S\in\mathcal{M}$ 且 $S\ni i$, 令 $\gamma_2(S)=0$, 否则， $\gamma_2(S)=(v-w)(S)$. 同理可以得到

$$\varphi_i(\gamma_2)= \sum_{T\in\mathcal{M}/i} \frac{v^P(T\cup\{i\})|T|!(r(N)-|T|-1)!}{r(N)}\big[\gamma_2(T\cup\{i\})-\gamma_2(T)\big].$$

显然 $(v-w)=\gamma_1+\gamma_2$, 因而 $\varphi_i(v-w)=\varphi_i(v)-\varphi_i(w)=\varphi_i(\gamma_1)+\varphi_i(\gamma_2)\geq 0$, 即 $\varphi_i(v)\geq\varphi_i(w)$.

(2) 交换性 若对任意的 $S\subseteq\mathcal{M}/\{i,j\}$, $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$, 则

$$\begin{aligned}
\varphi_i(v) &= \sum_{\emptyset\neq T\in\mathcal{M}}\varphi_i(\alpha_T u_T)=\sum_{\emptyset\neq T\in\mathcal{M}}\alpha_T\varphi_i(u_T)=\sum_{\substack{T\ni i\\T\in\mathcal{M}}}\alpha_T\varphi_i(u_T)=\sum_{\substack{T\ni i\\T\in\mathcal{M}}}\alpha_T\frac{v^P(T)}{|T|}\\
&= \sum_{T\in\mathcal{M}/i}\frac{v^P(T\cup\{i\})|T|!(r(N)-|T|-1)!}{r(N)}[v(T\cup\{i\})-v(T)]\\
&= \sum_{T\in\mathcal{M}/i,j}\frac{v^P(T\cup\{i,j\})|T+1|!(r(N)-|T|-2)!}{r(N)}[v(T\cup\{i,j\})-v(T\cup\{j\})]\\
&\quad+\sum_{T\in\mathcal{M}/i,j}\frac{v^P(T\cup\{i\})|T|!(r(N)-|T|-1)!}{r(N)}[v(T\cup\{i\})-v(T)]\\
&= \sum_{T\in\mathcal{M}/i,j}\frac{v^P(T\cup\{i,j\})|T+1|!(r(N)-|T|-2)!}{r(N)}[v(T\cup\{i,j\})-v(T\cup\{i\})]\\
&\quad+\sum_{T\in\mathcal{M}/i,j}\frac{v^P(T\cup\{j\})|T|!(r(N)-|T|-1)!}{r(N)}[v(T\cup\{j\})-v(T)]\\
&= \sum_{T\in\mathcal{M}/j}\frac{v^P(T\cup\{j\})|T|!(r(N)-|T|-1)!}{r(N)}[v(T\cup\{j\})-v(T)]\\
&= \sum_{T\in\mathcal{M}/j}[\sum_{R\subseteq T\cup\{j\}}(-1)^{|T|+1-|R|}v(R)]\varphi_j(u_{T\cup\{j\}})=\sum_{\substack{S\ni j\\S\in\mathcal{M}}}\alpha_S\varphi_j(u_S)\\
&=\varphi_j(v),
\end{aligned}$$

其中第四个等式根据一致对策的可交换性得到，而倒数第四个等式根据对策解的交换性的条件得到.

($\Leftarrow$) (iii) 哑元性的证明参看定理 3.1.

(ii) 线性性质

根据 (3.3), 对任意的 v, $w\in\Gamma(\mathcal{M})$ 以及 α, $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\alpha v+\beta w=\sum_{\emptyset\neq T\in\mathcal{M}}(\alpha\alpha_T+\beta\beta_T)u_T.$$

因此只需证 $\varphi\big(\sum\alpha_{T_m}u_{T_m}\big)=\sum\alpha_{T_m}\varphi(u_{T_m})$ 即可. 我们将对 α_{T_m} 非零个数采用数学归纳法证明此结论.

(I) 当 α_{T_m} 非零个数 k=1 时，设 $T_m = T$, 对所有的 $i \in N \backslash T$ 都是 u_T 的哑元，也是 $\alpha_T u_T$ 的哑元. 由上面得到的哑元性可得：

$$\varphi_i(\alpha_T u_T) = \alpha_T u_T(\{i\}) v^P(\{i\}) = 0.$$

又因为

$$\sum_{i \in T} \varphi_i(\alpha_T u_T) = \sum_{i \in N} \varphi_i(\alpha_T u_T) = \sum_{B \in B(\mathcal{M})} P(B) \alpha_T u_T(B) = \alpha_T \sum_{B \in B_T(\mathcal{M})} P(B) = \alpha_T v^P(T),$$

其中第二个等式是根据概率有效性得到地，结合交换性得

$$\varphi_i(\alpha_T u_T) = \begin{cases} \alpha_T v^P(T)|T|^{-1}, & i \in T, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{3.6}$$

特别地，当 $\alpha_T = 1$ 时，

$$\varphi_i(u_T) = \begin{cases} v^P(T)|T|^{-1}, & \text{如果 } i \in T, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{3.7}$$

因此 $\varphi_i(\alpha_T u_T) = \alpha_T \varphi_i(u_T)$.

(II) 假设 α_{T_m} 非零个数为 k 时结论成立，则对 α_{T_m} 非零个数为 $k+1$ 时，分如下两种情况讨论.

若 i 不属于 $\bigcap\limits_{m=1}^{k+1} T_m$, 则 i 必是一些一致对策 u_{T_m} 的哑元，不妨设为前 s 个，则当 $S \ni i$ 时， $\big(\sum\limits_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\big)(S) = \big(\sum\limits_{m=s+1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\big)(S)$, 则

$$\varphi_i\Big(\sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\Big) = \varphi_i\Big(\sum_{m=s+1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\Big) = \sum_{m=s+1}^{k+1} \alpha_{T_m} \varphi_i(u_{T_m}) = \sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} \varphi_i(u_{T_m}).$$

最后一个等式是根据哑元的特性得到.

若 i, j 属于 $\cap_{m=1}^{k+1} T_m$, 根据交换性 $\varphi_i\big(\sum\limits_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\big) = \varphi_j\big(\sum\limits_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\big)$, 所以

$$|\cap_{m=1}^{k+1} T_m| \varphi_i\Big(\sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\Big) = |\cap_{m=1}^{k+1} T_m| \sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} \varphi_i(u_{T_m}).$$

这是因为由概率有效性可知

$$\sum_{i \in N} \varphi_i\Big(\sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}\Big) = \sum_{B \in B(M)} P(B) \sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} u_{T_m}(B) = \sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} \sum_{B \in B_{T_m}(M)} P(B).$$

而

$$\sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} \sum_{i \in N} \varphi_i(u_{T_m}) = \sum_{m=1}^{k+1} \alpha_{T_m} \sum_{B \in B_{T_m}(M)} P(B).$$

于是 $\varphi_i(\sum\limits_{m=1}^{k+1}\alpha_{T_m}u_{T_m})=\sum\limits_{m=1}^{k+1}\alpha_{T_m}\varphi_i(u_{T_m})$. 这样我们就证明了对策解的线性性质. 而一致对策的交换性 (ii) 直接由对策的交换性得到.

特别地，对拟阵上的合作对策 $(N,r,\mathcal{M})$ (r 见定义 2.2), 根据公式 (3.2), 可得

$$Sh_i^p=\sum_{B\in B_i(\mathcal{M})}P(B)Sh_i^B(r_B)=\sum_{B\in B_i(\mathcal{M})}P(B)r(\{i\})=\sum_{B\in B_i(\mathcal{M})}P(B)=w^P(\{i\}).$$

例 3.3 设拟阵上的合作对策 $(N,v,\mathcal{M})$, 其基联盟为 $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{1,2,4\}$, $B_3=\{1,3,4\}$, 设它们形成的概率为 $P(B_1)=1/2$, $P(B_2)=1/3$, $P(B_3)=1/6$. 可行联盟的收益分别为：对所有的 $i\in N$, $v(\{i\})=0$, $v(12)=4$, $v(13)=1$, $v(34)=0$, $v(23)=12$, $v(14)=9$, $v(24)=15$, $v(134)=3$, $v(123)=22$, $v(124)=18$, 则

$$\begin{aligned}Sh(v_{B_1})&=(Sh_1^{B_1},Sh_2^{B_1},Sh_3^{B_1})=\frac{1}{6}(25,58,49),\\ Sh(v_{B_2})&=(Sh_1^{B_2},Sh_2^{B_2},Sh_4^{B_2})=\frac{1}{6}(19,37,52),\\ Sh(v_{B_3})&=(Sh_1^{B_3},Sh_3^{B_3},Sh_4^{B_3})=\frac{1}{6}(30,3,27).\end{aligned}$$

根据公式 (3.2), $Sh_1^{\mathcal{M}}=\sum\limits_{B\in B_1(\mathcal{M})}P(B)Sh_1^B=\frac{1}{2}\times\frac{25}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{19}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{30}{6}=\frac{143}{36}$.

同理可得 $Sh_2^{\mathcal{M}}=\frac{248}{36}$, $Sh_3^{\mathcal{M}}=\frac{150}{36}$, $Sh_4^{\mathcal{M}}=\frac{131}{36}$.

定义 3.4 设 $(N,\mathcal{M})$ 为拟阵，$P\in P(\mathcal{M})$ 是 $B(\mathcal{M})$ 上的一个概率分布，向量 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 拟阵上的合作对策 (N,v,M) 和子对策 (B,v_B) 的核心分别定义为

$$\begin{aligned}C(N,v,\mathcal{M})=&\Big\{X:\sum_{i\in N}x_i=\sum_{B\in B(\mathcal{M})}P(B)v(B),\\ &\qquad\text{对任意的 } S\subseteq\mathcal{M},\ \sum_{i\in S}x_i\ge\sum_{B\in B(\mathcal{M})}P(B)v(S\cap B)\Big\},\\ C(B,v_B)=&\Big\{Y:\sum_{i\in B}y_i=v_B(B),\ \text{对任意的 } S\subseteq B,\ \sum_{i\in S}y_i\ge v_B(S)\Big\}.\end{aligned}$$

定理 3.5 设 $(N,v,\mathcal{M})$ 为拟阵上的合作对策，$B\in B(\mathcal{M})$, $X_i^{\mathcal{M}}=\sum\limits_{B\in B_i(\mathcal{M})}P(B)x_i^B$, 若对任一 $B\in B(\mathcal{M})$, $X^B=(x_i^B)_{i\in B}\in C(B,v_B)$, 那么 $X^{\mathcal{M}}\in C(N,v,\mathcal{M})$.

证　设 $S\subseteq\mathcal{M}$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S}x_i^{\mathcal{M}}=&\sum_{i\in S}\sum_{B\in B_i(\mathcal{M})}P(B)x_i^B=\sum_{\substack{B\in B(\mathcal{M})\\ B\cap S\neq\emptyset}}P(B)x^B(S\cap B)\\ \ge&\sum_{B\in B(\mathcal{M})}P(B)v(S\cap B),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是根据定理的条件得到地. 同时

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N} x_i^{\mathcal{M}} &= \sum_{i\in N}\sum_{B\in B_i(\mathcal{M})} P(B)x_i^B = \sum_{B\in B(\mathcal{M})} P(B)x^B(N\cap B)\\ &= \sum_{B\in B(\mathcal{M})} P(B)v(N\cap B) = \sum_{B\in B(\mathcal{M})} P(B)v(B).\end{aligned}$$

因而 $X^{\mathcal{M}} \in C(N, v, \mathcal{M})$.

参 考 文 献

[1] Bilbao J M, Driessen T, A.Jiménez Losada, Lebrón E. The Shapley Value for Games on Matroids: the Static Model. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2001, 53: 333–348

[2] Bilbao J M, Driessen T, A. Jiménez Losada, Lebrón E. The Shapley Value for Games on Matroids: the Dynamic Model. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2002, 56: 287–301

[3] Shapley L S. A Value for n-person Games. In: Kuhn HW, r AW (Eds). Contributions to the Theory of Games II. Annals of Mathematics Studies No. 28, Princeton University Press, Princetonm, 1953, 307–317

[4] Sun H, Driessen T. An Individually Marginalistic Value for Set Games on Matroids. The 2nd Cologne Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization, University of Twente, the Netherlands, 2003, 116–120

[5] Sun H, He H. A Semi-Marginalistic Value for Set Games on Matroids, Proceedings of the Eighth National Conference of Operations Research Society of China, 2006, 610–615

[6] Young P. Monotonic Solutions of Cooperative Games. *International Journal of Game Theory*, 1985, 14: 65–72

[7] Lai J. Theory of Matroids. Beijing: Higher Enducation Press, 2002

Monotonic Solution of Cooperative Games on Matroids

HE Hua

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072)

(*E-mail: hsun@nwpu.edu.cn*)

SUN Hao

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072)

(*E-mail: hsun@nwpu.edu.cn*)

Abstract The Shapley value for cooperative games on matroids is recalled and is characterized by three axioms of strong monotonicity, substitution and probabilistic efficiency, which are equivalent to the axioms of linearity, substitution to unanimity games, P-dummy player property and probabilistic efficency. The structure of element of core for cooperative games on matroids is presented.

Key words cooperative games; matroid; Shapley value; strong monotonicity

MR(2000) Subject Classification 90D12

Chinese Library Classification 0225