第 31 卷 第 6 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 31 No. 6
2008 年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2008

完全图循环分解成 2- 正则图 *

梁志和

(河北师范大学数信学院，河北省数学中心，石家庄 050016)

(E-mail: zhiheliang@163.com)

摘 要 Alspach 提出如下猜想：" 设 n 是奇数并且每个 $m_1, m_2, \cdots, m_h$ 都是大于等于 3 而小于等于 n 的整数. 若 $\sum\limits_{i=1}^{h} m_i = n(n-1)/2$, 则 K_n 可以分解成圈 $C_{m_1}, C_{m_2}, \cdots, C_{m_h}$." 用记号 $C(m_1^{n_1} m_2^{n_2} \cdots m_s^{n_s})$ 表示由 n_i 个 m_i 长圈，$i = 1, 2, \cdots, s$ 组成的 2- 正则图. 设 $\Gamma = \{C((2m_i)^{n_i} \cdots (2m_s)^{n_s}) \mid i \in [1, s]\}$. 研究了循环 (K_v, Γ)- 分解的构造方法及其存在性问题，并且证明了 Alspach 猜想的一些特殊情况.

关键词 循环 (H, Γ)- 分解； 2- 正则图；圈

MR(2000) 主题分类 05B30; 05C38

中图分类 O157

1 引言

本文考虑的图 G 是没有孤立点的简单图. 设 Z 是整数环， Z_m 是模 m 剩余类环. 当 $a, b \in Z$ 时我们用记号 $[a, b]$, $[a, b]_k$ 和 $[a, b]^k$ 分别表示集合 $\{x \in Z \mid a \le x \le b\}$, $\{x \in Z \mid a \le x \le b,\ x \equiv a \,(\mathrm{mod}\, k)\}$ 和 $\{x \in Z \mid a \le x \le b,\ x \equiv b (\mathrm{mod}\, k)\}$. 如果 A 和 B 是两个集合，并且 f 和 g 是两个映射，我们分别用 $g(A)$ 和 $\pm A$ 表示 $\{g(a) \mid a \in A\}$ 和 $\{\pm a \mid a \in A\}$. 用 fg 表示映射 f 和 g 的复合映射. $f(A) < f(B)$ 当且仅当对每个 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $f(x) < f(y)$.

设 Γ 是一个图的集合. 一个 v 阶图 H 的 Γ- 分解 (表示为 (H, Γ)- 分解), 是一个对子 $(V, \mathcal{B})$, 这里 V 是 H 的点集， $\mathcal{B}$ 是由与 Γ 中的图同构的 H 的子图组成的集合，并且 $\mathcal{B}$ 中的所有子图的边集构成 H 边集的一个分拆. 设 Π 是 (H, Γ)- 分解的一个自同构群. 若存在一个 v 阶自同构 $\pi \in \Pi$, 则称 (H, Γ)- 分解是循环的. 当 $\Gamma = \{G\}$ 时，简记为 (H, G)- 分解.

K_v 和 C_m 分别表示 v 阶完全图和 m 长圈. 一个图 H 的 m- 圈系是一个 (H, C_m)- 分解. [1] 综述了圈系的结果. 当 $H = K_v$ 或 $K_v - F$ (其中 F 是 K_v 的 1- 因子) 时， m- 圈系的存在问题被完全解决 [2,3]. 得到如下定理： m- 圈系存在当且仅当 $v \ge m$, H 的每

本文 2006 年 5 月 14 日收到. 2008 年 7 月 5 日收到修改稿.

*河北省自然科学基金 (No.08M002) 和河北省教育厅基金资助.

个点的度为偶数并且 m 整除 H 的边数. K_v 的循环 m- 圈系的存在问题已经引起许多学者的注意. 当 $m=3,5$ 和 7 时此问题已解决 [1,4]. 当 $v\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2m)$ 时, K_v 的循环 m- 圈系的存在问题也在 [1,5-7] 中被解决. [8–10] 也研究了其它情形下循环 m- 圈系的存在问题.

定理 1.1[5] 对任意正整数 m 和 n, 存在循环的 (K_{2mn+1},C_m)- 分解.

定理 1.2[11] 完全二部图 $K_{r,s}$ 可以分解成 $2k$ 长圈系当且仅当 r 和 s 为偶数, $r\geq k$, $s\geq k$ 并且 $2k$ 整除 rs.

设 $m_1,m_2,\cdots,m_h$ 是不小于 3 的整数, 用 G=$C(m_1,m_2,\cdots,m_h)$ 表示由 h 个点不交的 m_1 长圈, m_2 长圈, $\cdots,m_h$ 长圈组成的图. 在 1981 年, Alspach[12] 提出如下猜想.

猜想 1.3 设 n 为奇数并且每个 $m_1,m_2,\cdots,m_h$ 都是大于等于 3 的整数. 若 $\sum\limits_{i=1}^{h}m_i$=$n(n-1)/2$, 则 K_n 可以分解成圈 $C_{m_1},C_{m_2},\cdots,C_{m_h}$.

一个图 G 称为 2- 正则图如果它中每点的度为 2. 显然一个 2- 正则图是一些点不交的圈的并. 下面我们用 $B((m_1,n_1)^{t_1}(m_2,n_2)^{t_2}\cdots(m_s,n_s)^{t_s})$ 表示由点不交的 t_i 个 K_{m_i,n_i}, $i\in[1,s]$ 组成的图. $C(m_1^{n_1}m_2^{n_2}\cdots m_s^{n_s})$ 表示由 n_i 个 m_i 长圈, $i=1,2,\cdots,s$ 组成的 2- 正则图. 令 $\Gamma=\{C((2k_i)^{n_i}\cdots(2k_s)^{n_s})\mid i\in[1,s]\}$. 本文讨论了循环的 (K_v,Γ)- 分解的构造方法和存在问题, 并且证明了在一些特殊情况下猜想 1.3 是正确的.

2 主要结果

下面我们令 $w_1=\sum\limits_{k=1}^{s}n_k$, w_2=$\sum\limits_{k=1}^{s}m_kn_k$ 并且 w_3=$\sum\limits_{i=1}^{s}m_in_it_i$. 当图 G 的点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 并且 g 为 V 上的单射时, 分别用 $[v_1,v_2,\cdots,v_n]$ 和 $[g(v_1),g(v_2),\cdots,g(v_n)]$ 表示图 G 和图 $g(G)$. 如果 G=(V,E) 的点集为 Z_v 的子集, 那么称 $\{\pm(x-y)|\ x,y\in V,(x,y)\in E\}$ 为 G 的差集, 表为 ΔG. 设 $V(K_v)$=Z_v, $\mathcal{F}$=$\{G_1,G_2,\cdots,G_t\}$ 是 K_v 的子图集, 并且其中每个子图都同构于 G. 如果 $\Delta\mathcal{F}=\bigcup\limits_{i=1}^{t}\Delta G_i$ 覆盖集合 Z_v 中的非零元恰好一次, 则称 $\mathcal{F}$ 为 (K_v,G)- 分解的基区组集合或 (K_v,G)-DS, 其中元称为基区组.

引理 2.1 当 v 为奇数时, Z_v 上一个 (K_v,G)-DS 生成一个循环的 (K_v,G)- 分解.

证 设 $(Z_v,+)$ 是一个群并且 $\mathcal{F}$=$\{G_1,G_2,\cdots,G_t\}$ 是一个 (K_v,G)-DS. 对于 $B\in\mathcal{F}$, 令 $\mathrm{dev}\,B=\{B+x|\ x\in Z_v\}$ 和 $\mathrm{dev}\,\mathcal{F}=\bigcup\limits_{i=1}^{t}dev\ G_i$. 若 π 是 $(0,1,\cdots,v-1)$ 上的一个置换, 则对任意 $B\in\mathrm{dev}\,\mathcal{F}$ 和 $x\in Z_v$, 有 $\pi^x(B)\in\mathrm{dev}\,\mathcal{F}$. 若 $(a,b)\in E(K_v)$, 则差 $\pm(a-b)$ 形成一个差轨 $(a+i,b+i)$, $i\in Z_v$. 假设 $a\equiv b+i\ (\mathrm{mod}\,v)$ 并且 $b\equiv a+i\ (\mathrm{mod}\,v)$. 则 $2i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \ v)$. 这个矛盾表明差轨 $(a+i,b+i)$, $i\in Z_v$ 中的元是不同的. 由于 $\Delta\mathcal{F}$ 覆盖集合 Z_v 中的非零元恰好一次, 所以 K_v 的每条边恰出现在 $\mathrm{dev}\,\mathcal{F}$ 的一个元中. 因此 $\mathrm{dev}\,\mathcal{F}$ 是一个循环的 (K_v,G)- 分解.

引理 2.2 设 v 为奇数. 如果存在一个具有 (K_v,H)-DS 的循环的 (K_v,H)- 分解和一个 (H,G)- 分解, 则存在一个循环的 (K_v,G)- 分解.

证 易知 (K_v,G)- 分解存在, 表示为 $(Z_v,\mathcal{C})$. 设 $\pi=(0,1,\cdots,v-1)$ 是 Z_v 上一个置换. 若 $\mathcal{F}$ 是循环的 (K_v,H)- 分解 $(Z_v,\mathcal{B})$ 的一个基区组集合, 则对任意 $H\in\mathcal{F}$ 和 $x\in Z_v$

都有 $\pi^x(H) \in \mathcal{B}$. 又因为存在一个 (H,G)- 分解 $(V(H),\mathcal{A})$, 所以对任意 $G \in \mathcal{A}$ 和 $x \in Z_v$ 都有 $\pi^x(G) \in \mathcal{C}$. 这表明 (K_v,G)- 分解是循环的.

设 (A,B_i) 是二部图 G_i 的二分划. 具有边集 $\bigcup\limits_{i\in Z_t} E(G_i)$ 和二分划 $\big(A, \bigcup\limits_{i\in Z_t} B_i\big)$ 的二部图称为 G_i, $i \in Z_t$ 的偏积，表示为 $\bigotimes_{i\in Z_t} G_i$. 这里 $B_i \cap B_j = \Phi$, 当 $i \neq j$ 并且 $i,j \in Z_t$ 时.

利用差方法和构造方法可得下面的定理 2.3. 限于篇幅省略其证明过程.

定理 2.3 设 m_i 和 n_i, $i \in [1,s]$ 是正整数，则循环的 $(K_v, C(T))$- 分解存在，这里 $v{=}1+8w_2$ 并且 $T{=}(4m_1)^{n_1}\cdots(4m_s)^{n_s}$.

利用数学归纳方法可得下面的定理 2.4. 限于篇幅省略其证明过程.

定理 2.4 设 t, m_i 和 n_i, $i \in [1,s]$ 是正整数. 则循环的 $(K_v, C(T))$- 分解存在，这里 $v{=}1+8tw_2$ 并且 $T{=}(4m_1)^{n_1}\cdots(4m_s)^{n_s}$. 进一步地， K_v 可以被分解成 tv 个 $C(T)$, 即 K_v 可以被分解成 tvn_i 个 C_{4m_i}, $i \in [1,s]$.

定理 2.5 对任意正整数 m 和 n, 存在循环的 $(K_{2mn+1}, K_{m,n})$- 分解.

证 设 $K_{m,n}$ 的二分划是 (A,B), 并且点集 A 和 B 中的元分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $b_1, b_2,\cdots,b_n$, 并且按此顺序排序. 我们定义映射 g 如下：

$g(a_i) = i-1$, 若 $i \in [1,m]$, $g(b_i) = m(n-i+1)$, 若 $i \in [1,n]$, 则 $\Delta(g(K_{m,n})) = \pm[1,mn]$. 因此存在循环的 $(K_{2mn+1}, K_{m,n})$- 分解.

系 2.6 (1) 设 $G{=}\bigotimes_{i=1}^{t} K_{m,n_i}$, $n{=}\sum\limits_{i=1}^{t} n_i$. 则存在循环的 (K_{2mn+1}, G)- 分解.

(2) 设 t 和 r 是两个正整数，则存在循环的 $(K_{2tmr+1}, K_{m,r})$- 分解.

(3) 设 $H{=}\bigotimes_{i=1}^{s} K_{m,r_i}$, $r{=}\sum\limits_{i=1}^{s} r_i$, 则对任意正整数 t 存在循环的 (K_{2mrt+1}, H)- 分解.

证 因为 $\bigotimes_{i=1}^{t} K_{m,n_i}$ 是一个完全二部图 $K_{m,n}$, 由定理 2.5 可知结论 (1) 是真的. 在 (1) 中取 $n_1 = n_2 = \cdots = n_t = r$ 再由引理 2.2 可得结论 (2).

由 (1) 和 (2) 可得结论 (3).

定理 2.7 (1) 若 $K_{m,r}$ 可以分解成 C_{n_i}, $i \in [1,n]$, 则对任意正整数 t, K_{2mrt+1} 可以分解成 $t(2mrt+1)$ 个 C_{n_i}, $i \in [1,n]$.

(2) 设 $k_i \geq 2$, $i \in [1,s]$, $r{=}r_1+\cdots+r_s$, 并且 t 是正整数. 若偶数 m 和 r_i 都大于等于 k_i, $i \in [1,s]$, 则 K_{2mrt+1} 可以分解成 $ta_i(2mrt{+}1)$ 个 C_{2k_i}, $i \in [1,s]$, 其中 $a_i{=}\frac{mr_i}{2k_i} \in Z$, $i \in [1,s]$.

证 应用系 2.6 和引理 2.2 得到结论 (1).

由定理 1.2, 得到 K_{m,r_i} 可以分解成 a_i 个 C_{2k_i}, $i \in [1,s]$. 因此结论 (2) 可由系 2.6 和引理 2.2 得到.

定理 2.8 设 t, m_i 和 n_i, $i \in [1,s]$ 是正整数，则循环的 $(K_{2tw_2+1}, B(T))$- 分解存在，这里 $T{=}(m_1,n_1)^1(m_2,n_2)^1\cdots(m_s,n_s)^1$. 进一步地， K_{2tw_2+1} 可以分解成 $t(2tw_2+1)$ 个 K_{m_i,n_i}, $i \in [1,s]$.

证 设 K_{m_i,n_i} 的二分划是 (X_i,Y_i), 点集 X_i 和 Y_i 中的元分别是 a_1, $a_2,\cdots,a_{m_i}$ 和 b_1, $b_2,\cdots,b_{n_i}$, 并且按此顺序排序. 在 K_{m_i,n_i} 上定义映射 g_i 如下：

$g_i(a_j) = j-1$ 若 $j \in [1, m_i]$, $g_i(b_j) = m_i(n_i - j + 1)$ 若 $j \in [1, n_i]$, 则有 $g_i(X_i) = [0, m_i - 1]$, $g_i(Y_i) = [m_i, m_i n_i]_{m_i}$ 和 $\Delta g_i(K_{m_i,n_i}) = \pm[1, m_i n_i]$. 设 (X, Y) 是 $B(T)$ 的二分划. 定义映射

$$f_{2j}(x) = x + w_2 + \sum_{i=1}^{j} m_{2i-1}n_{2i-1} + \sum_{i=1}^{j-1}(m_{2i} - 1),$$

$$f_{2j-1}(x) = x + j - 1 + \sum_{i=1}^{j-1}(m_{2i-1} - 1),$$

$$h_i(x) = \begin{cases} f_i g_i(x), & x \in X_i, \\ f_i g_i(x) + \sum\limits_{j=i+1}^{s} m_i n_i, & x \in Y_i, \end{cases}$$

则有 $h_i(X_i) < h_i(Y_i)$ 对任意 $i \in [1, s]$, $h_i(X_i) < h_{i+2}(X_{i+2})$ 和 $h_{i+2}(Y_{i+2}) < h_i(Y_i)$ 对任意 $i \in [1, s-2]$. 因此图 $[h_1(K_{m_1,n_1}), h_2(K_{m_2,n_2}), \cdots, h_s(K_{m_s,n_s})]$ 同构于 $B(T)$. 设 $(X, Y \times Z_t)$ 是二部图 $\bigotimes_{i\in Z_t} B(T)$ 的二分划. 在 $\bigotimes_{i\in Z_t} B(T)$ 上定义映射 f 如下:

$f(x)=h_j(x)$ 若 $x \in X_j, j \in [1, s]$, $f((x,i))=h_j(x) + 2iw_2$ 若 $x \in Y_j, j \in [1, s]$, $(x, i) \in Y \times \{i\}$, $i \in Z_t$.

直接计算可得 $\Delta f(\bigotimes_{i\in Z_t} B(T))=\pm[1, tw_2]$ 是一个 $(K_{2tw_2+1}, B(T))$-DS. 使用引理 2.1 和 2.2 可得此定理.

下面的结论可直接由定理 2.8 得到.

系 2.9 设 $G=B((m_1,n_1)^{t_1}(m_2,n_2)^{t_2}\cdots(m_s,n_s)^{t_s})$ 和 $w_3=\sum\limits_{i=1}^{s} m_i n_i t_i$, 则对任意正整数 t, 存在循环的 (K_{2tw_3+1}, G)- 分解.

定理 2.10 设 m_i, n_i, $i \in [1, s]$ 是偶数, 并且 t_i, $i \in [1, s]$ 是正整数. 假设 k_i 是满足 m_i, $n_i \geq k_i$ 和 $2k_i | m_i n_i$, $i \in [1, s]$ 的正整数, 则存在循环的 (K_{2tw_3+1}, Γ)- 分解, 这里 $\Gamma=\{C((2k_i)^{t_i}(2k_{i+1})^{t_{i+1}}\cdots(2k_s)^{t_s}) \mid i \in [1, s]\}$. 进一步地, K_{2tw_3+1} 可以分解成 $\frac{tm_i n_i t_i(2tw_3+1)}{2k_i}$ 个 C_{2k_i}, $i \in [1, s]$. 其中 t 是任意正整数.

证 设 $G=B((m_1,n_1)^{t_1}(m_2,n_2)^{t_2}\cdots(m_s,n_s)^{t_s})$. 由定理 1.2 可得 K_{m_i,n_i} 可分解成 $a_i = \frac{m_i n_i}{2k_i}$ 个 C_{2k_i}, $i \in [1, s]$. 不失一般性, 假设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_s$. 设 $b_1=a_1$, $b_i=a_i - a_{i-1}$, $i \in [2, s]$. 则 G 可分解成 b_i 个 2- 正则图 $C((2k_i)^{t_i}(2k_{i+1})^{t_{i+1}}\cdots(2k_s)^{t_s})$, $i \in [1, s]$. 应用系 2.9 和引理 2.2 可得第一个结果.

又因为 K_{2tw_3+1} 可分解成 $t(2tw_3+1)$ 个 G, 所以 K_{2tw_3+1} 可分解成 $\frac{tm_i n_i t_i(2tw_3+1)}{2k_i}$ 个 C_{2k_i}, $i \in [1, s]$.

参 考 文 献

[1] Colbourn C J, Dinitz J H. The CRC Handbook of Combinatorial Designs. CRC Press, Boca Raton FL, 1996

[2] Alspach B, Gavlas H. Cycle Decompositions of K_n and $K_n - I$. *J.Combin. Theory* (Series B), 2001, 81: 77–99

[3] Šajna M. Cycle Decompositions III: Complete Graphs and Fixed Length Cycles. *J.Combin. Des.*, 2002, 10: 27–78

[4] Peltesohn R. Eine Losung der Beiden Heffterschen Differenzenprobleme. *Compos. Math.*, 1938, 6: 251–257

[5] Buratti M, Del Fra A. Existence of Cyclic k-cycle Systems of the Complete Graph. *Discrete Math.*, 2003, 261: 113–125

[6] Blinco A, El-Zanati S I, Eynden C V. On the Cyclic Decomposition of Complete Graphs into Almost-bipartite Graphs. *Discrete Math.*, 2004, 284: 71–81

[7] Fu H, Wu S. Cyclically Decomposing Complete Graphs into Cycles. *Discrete Math.*, 2004, 282: 267–273

[8] Buratti M, Del Fra A. Cyclic Hamiltonian Cycle Systems of the Complete Graph. *Discrete Math.*, 2004, 279: 107–119

[9] Vietri A. Cyclic k-cycle Systems of order $2kn + k$; Asolution of the Last Open Cases. *J Combin Designs*, 2004, 12: 299–310

[10] Bryant D, Gavlas H, Ling A C H. Skolem-type Difference Sets for Cycle Systems. *Electronic J. of Combinatorics, #R38*, 2003, 10. http://www.combinatorics.org/

[11] Sotteau D. Decomposition of $K_{m,n}$ ($K^*_{m,n}$) into Cycles (Circuits) of Length $2k$. *J. Combinatorial Theory* (Series B), 1981, 30: 75–81

[12] Alspach B. Research Problems, Problem 3. *Discrete Math.*, 1981, 36: 333

Cyclically Decomposing the Complete Graph into the 2-regular Graphs

LIANG Zhihe

(*Department of Mathematics, Hebei Normal University, Shijiazhuang* 050016)

(*E-mail: zhiheliang@163.com*)

Abstract Alspach posed the conjecture "let $m_1, m_2, \cdots, m_h$ be positive integers not less than 3 and n be odd. If $\sum_{i=1}^{h} m_i = n(n-1)/2$, Then K_n can be decomposed into h cycles $C_{m_1}, C_{m_2}, \cdots, C_{m_h}$." In this paper, we prove some special cases of the conjecture. The symbol $C(m_1^{n_1} m_2^{n_2} \cdots m_s^{n_s})$ denotes a 2-regular graph consisting of n_i cycles of length m_i, $i=1,2,\cdots,s$. Let the class of graphs $\Gamma=\{C((2m_i)^{n_i} \cdots (2m_s)^{n_s}) \mid i \in [1,s]\}$. Some construction methods of the cyclic (K_v, Γ)-decompositions are given, and cyclic (K_v, Γ)-decompositions are established.

Key words cyclic (H, Γ)-decomposition; 2-regular graph; cycle

MR(2000) Subject Classification 05B30; 05C38

Chinese Library Classification O157