

# 平面时标线性自治系统的渐近行为

赵 巍

(大连民族学院理学院, 大连 116600)

(E-mail: zhaow@dlnu.edu.cn)

范思乡

(福州一中, 福州 350001)

**摘 要** 本文讨论了平面时标线性自治系统的渐近行为, 得到一些在时标意义下类似于平面线性自治系统奇点分类的新准则, 并指出该准则可以将连续和离散方程的渐近行为统一.

**关键词** 时标; 平面时标线性自治系统; 渐近行为; 分类图

**MR(2000) 主题分类** 35B40; 35D45; 47H20; 35K55

**中图分类** O175.29

## 1 引言

众所周知, 微分方程经过差分离散化后引出差分方程, 微分 (差分) 方程已发展成系统的理论 [7,8]. 因此就启发人们研究一个更一般的方法, 可以将连续与离散统一. 在 1990 年, 德国数学家 Stefan Hilger 在他的 PhD 论文中建立了时标 (time scales) 理论 - 一个连续与离散计算的统一方法 [1]. 时标意义下动力学方程的结果不仅与实数集或整数集有关, 而且可能与更一般的时标有关. 目前, 时标理论已经成为当代方程领域中的研究热点. 而平面上线性自治方程的奇点分析理论是整个微分方程理论的基础, 由于奇点附近轨线分布的复杂性, 对它的研究是定性分析的重要部分, 并且它反映了客观世界中重要的静止平衡状态, 有着重要的应用价值, 受到了广大学者的热切关注.

本文研究平面时标线性自治动力学系统的定性结构. 讨论时标意义下平面线性自治动力学系统的渐近行为, 建立一些在时标意义下类似于平面线性自治系统奇点分类的新准则, 并说明该准则既是对连续和离散方程渐近行为的统一, 又是对原有连续和离散方程结果的推广, 而且更符合实际意义.

## 2 预备知识

下面给出指数函数的定义及一些时标中的重要性质, 这些概念的定义以及定理的证明可以参见 [2].

**定义 2.1** 若  $p \in \mathcal{R}$ , 则定义指数函数

$$e_p(t, s) = \exp \left( \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau \right), \quad \forall s, t, \tau \in \mathbb{T}.$$

本文 2006 年 12 月 13 日收到, 2007 年 12 月 8 日收到修改稿.

**定义 2.2** 若  $p \in \mathcal{R}$ , 则一阶线性方程

$$y^\Delta = p(t)y \quad (1)$$

称为回归的.

**定理 2.1** 若  $p \in \mathcal{R}$ , 则

- (i)  $e_0(t, s) \equiv 1, e_p(t, t) \equiv 1$ ;
- (ii)  $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$ ;
- (iii)  $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$ ;
- (iv)  $e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$ ;
- (v)  $|e_p(t, s)| = \exp\left(\int_s^t \frac{\text{Log}|1+\mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)} \Delta\tau\right)$ .

**定理 2.2** 设 (1) 回归, 固定  $t_0 \in \mathbb{T}, y_0 \in \mathbb{R}$ , 则  $y(t) = y_0 e_p(t, t_0)$  是

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

的满足初值问题的唯一解.

**定理 2.3** 令  $p \in \mathcal{R}, t_0 \in \mathbb{T}, x_0 \in \mathbb{R}$ , 则

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma, \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

的满足初值问题唯一解为  $x(t) = x_0 e_{\ominus p}(t, t_0)$ .

**定理 2.4** 设 (3) 是回归的, 令  $t_0 \in \mathbb{T}, x_0 \in \mathbb{R}$ , 则

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

的满足初值问题唯一解为

$$x(t) = x_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t, \tau) f(\tau) \Delta\tau = e_{\ominus p}(t, t_0) \left[ x_0 + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau \right].$$

**定理 2.5** 设 (3) 是回归的, 令  $t_0 \in \mathbb{T}, y_0 \in \mathbb{R}$ , 则

$$y^\Delta = p(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (5)$$

的满足初值问题唯一解为

$$y(t) = y_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau = e_p(t, t_0) \left[ y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t_0, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau \right].$$

**定义 2.3** 若  $p \in \mathbb{C}_{rd}, \mu p^2 \in \mathcal{R}$ , 则我们定义三角函数

$$\cos_p = \frac{e_{ip} + e_{-ip}}{2}, \quad \sin_p = \frac{e_{ip} - e_{-ip}}{2i}.$$

**定理 2.6** 令  $p \in \mathbb{C}_{rd}, \mu p^2 \in \mathcal{R}$ , 则

$$\cos_p^\Delta = -p \sin_p, \quad \sin_p^\Delta = p \cos_p, \quad \cos_p^2 + \sin_p^2 = e_{\mu p^2}.$$

为了研究平面时标线性自治动力学方程的渐近行为, 首先考虑系统

$$x^\Delta = \lambda x, \quad (6)$$

其中  $\lambda \in \mathcal{R}$  是非零常数, 其满足初值  $x(t_0) = x_0$  的通解为  $x(t) = x_0 e_\lambda(t, t_0)$ .

**定理 2.7** [3] 对于系统 (6) 有以下结论:

- (1) 当  $\lambda > 0$  时, 或当  $\lambda < 0$  且  $\underline{\mu} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \mu(t) > -\frac{2}{\lambda} > 0$  时,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = \infty$ ;
- (2) 当  $\lambda < 0$  且  $\bar{\mu} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \mu(t) < -\frac{2}{\lambda} < \infty$  时,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0$ .

### 3 平面时标线性自治系统的渐近行为 ( $\mathbb{T}$ )

本文考虑时标  $\mathbb{T}$  下的二阶线性系统

$$\begin{cases} x^\Delta = ax + by, \\ y^\Delta = cx + dy, \end{cases} \quad (7)$$

其中  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $X = (x, y)^T$ ,  $A \in \mathcal{R}$  ( $\forall t \in \mathbb{T}$ ,  $I + A\mu(t)$  可逆且右稠连续),

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

显然  $x(0) = y(0) = 0$  是系统 (7) 的解. 为了研究系统 (7) 的渐近性, 下面考虑时标  $\mathbb{T}$ ,  $\sup \mathbb{T} = +\infty$ .

根据线性代数中的基本理论可知, 存在非奇异矩阵  $T$ , 使得  $J = TAT^{-1}$ ,  $J$  为约当标准型. 令  $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y})^T$ , 作代换  $\tilde{X} = TX$  ( $X = T^{-1}\tilde{X}$ ), 由  $X^\Delta = AX$ , 得  $\tilde{X}^\Delta = T X^\Delta = TAX = TAT^{-1}\tilde{X} = J\tilde{X}$ . 于是系统 (7) 化为

$$\tilde{X}^\Delta = J\tilde{X} \quad (8)$$

由线性变换的理论可知, 标准型  $J$  的形式由系统 (7) 矩阵  $A$  的特征根的情况决定. 设特征方程为  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ , 其中  $p = -(a + d)$ ,  $q = ad - bc$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  为矩阵  $A$  的特征根 ( $\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ). 当  $\mu(t) \neq 0$  时, 假设: (i)  $q \neq \frac{p}{\mu(t)} - \frac{1}{\mu^2(t)}$ ; (ii)  $q \neq 0$ , 则  $\lambda_i \in \mathcal{R}$  且  $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2$ .

**定理 3.1** 当  $p^2 - 4q \geq 0$  时, 系统 (8) 可能有两种情况:

(1) 系统为

$$\begin{cases} \tilde{x}^\Delta = \lambda_1 \tilde{x}, \\ \tilde{y}^\Delta = \lambda_2 \tilde{y}, \end{cases} \quad (9)$$

满足初值  $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$  的通解为

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e_{\lambda_1}(t, t_0), \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e_{\lambda_2}(t, t_0). \quad (10)$$

(2) 系统为

$$\begin{cases} \tilde{x}^\Delta = \lambda \tilde{x}, \\ \tilde{y}^\Delta = \tilde{x} + \lambda \tilde{y}, \end{cases} \quad (11)$$

其中  $\lambda = -\frac{p}{2}$ , 其满足初值  $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$  的通解为

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e_\lambda(t, t_0), \quad \tilde{y}(t) = e_\lambda(t, t_0) \left( \tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{1 + \lambda\mu(\tau)} \Delta\tau \right). \quad (12)$$

证 由定理 2.2, 易求情况 (1) 及 (2) 中  $\tilde{x}(t)$  的通解. 下面只需求解情况 (2) 中  $\tilde{y}(t)$  的通解.

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= e_\lambda(t, t_0)[\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t e_\lambda(t_0, \sigma(\tau))e_\lambda(\tau, t_0)\Delta\tau] \\ &= e_\lambda(t, t_0)[\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{e_\lambda(\sigma(\tau), t_0)}e_\lambda(\tau, t_0)\Delta\tau] \\ &= e_\lambda(t, t_0)[\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{(1 + \mu(\tau)p(\tau))e_\lambda(\tau, t_0)}e_\lambda(\tau, t_0)\Delta\tau] \\ &= e_\lambda(t, t_0)(\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{1 + \lambda\mu(\tau)}\Delta\tau).\end{aligned}$$

证毕.

**定理 3.2**  $q > 0, p^2 - 4q > 0$  (两特征根为同号异根), 此时系统 (8) 为 (9).

(i) 若  $p < 0$ , 或  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}, q > \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 若  $0 < p < \frac{4}{\underline{\mu}}, q > \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 或  $p > 0$  且  $\mu \equiv 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ .

(iii) 若  $p > 0, q < \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$  且  $q < \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

证 (i) 当  $p < 0$  时,  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , 由定理 2.7 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

当  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}, q > \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$  时, 由  $q > \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$  得  $0 < p^2 - 4q < (p - \frac{4}{\underline{\mu}})^2$ , 再由  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 得  $-p + \sqrt{p^2 - 4q} < -\frac{4}{\underline{\mu}}$ . 因为  $p > 0$ , 所以  $\lambda_i < 0$ , 故  $\underline{\mu} > -\frac{2}{\lambda_1}$ , 又因为  $\lambda_1 > \lambda_2$ , 所以  $\underline{\mu} > -\frac{2}{\lambda_2}$ , 由定理 2.7 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 当  $q > \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$  时,  $0 < p^2 - 4q < (p - \frac{4}{\underline{\mu}})^2$ , 又因为  $p < \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 所以  $-p - \sqrt{p^2 - 4q} > -\frac{4}{\underline{\mu}}$ , 当  $p > 0$  时,  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , 故  $\bar{\mu} < -\frac{2}{\lambda_2} < -\frac{2}{\lambda_1}$ , 由定理 2.7,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ . 当  $\mu \equiv 0$  且  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  时, 由 (10) 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ .

(iii) 由  $q < \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 得  $p^2 - 4q > (p - \frac{4}{\underline{\mu}})^2$ , 而  $p^2 - 4q > 0$ , 故  $-p - \sqrt{p^2 - 4q} < -\frac{4}{\underline{\mu}}$ , 且由  $p > 0$ , 得  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , 从而得到  $\underline{\mu} > -\frac{2}{\lambda_2}$ , 由  $q < \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 得  $p^2 - 4q > (p - \frac{4}{\underline{\mu}})^2$ , 由  $p^2 - 4q > 0$ , 得  $-p + \sqrt{p^2 - 4q} > -\frac{4}{\underline{\mu}}$ , 而  $\lambda_1 < 0$ , 故  $0 < \bar{\mu} < -\frac{2}{\lambda_1} < \infty$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ . 证毕.

**定理 3.3**  $q < 0, p^2 - 4q > 0$  (两特征根为异号实根), 此时  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ , 系统 (8) 为 (9).  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty$ , 此外

(i) 若  $q < \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 若  $p < \frac{4}{\underline{\mu}}, q > \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 或  $\mu \equiv 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ .

证 因为  $\lambda_1 > 0$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty$ .

(i) 由  $q < \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 得  $p^2 - 4q > (p - \frac{4}{\underline{\mu}})^2$ , 再因为  $p^2 - 4q > 0$ , 所以  $-p - \sqrt{p^2 - 4q} < -\frac{4}{\underline{\mu}}$ , 而  $\lambda_2 < 0$ , 故  $\underline{\mu} > -\frac{2}{\lambda_2} > 0$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 由  $q > \frac{2p}{\underline{\mu}} - \frac{4}{\underline{\mu}^2}$ , 得  $p^2 - 4q < (p - \frac{4}{\underline{\mu}})^2$ , 又因为  $p < \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 所以  $-p - \sqrt{p^2 - 4q} > -\frac{4}{\underline{\mu}}$ , 故  $0 < \bar{\mu} < -\frac{2}{\lambda_2} < \infty$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ . 当  $\mu \equiv 0$  且  $\lambda_2 < 0$  时, 由 (10) 得

$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ . 证毕.

**定理 3.4**  $q > 0, p^2 - 4q = 0$  (特征根为重根).

当系统 (8) 为情形 (9) 时,  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$ ,

(i) 若  $p < 0$ , 或  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 若  $0 < p < \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 或  $p > 0$  且  $\mu \equiv 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ .

当系统 (8) 为情形 (11) 时,

(i) 若  $p < 0$  且  $\bar{\mu} < \infty$ , 或  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}$  且  $\bar{\mu} < \infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 若  $0 < p < \frac{4}{\underline{\mu}}$  且  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\mu(\tau)} \Delta\tau < \infty$ , 或  $p > 0$  且  $\mu \equiv 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ .

证 当系统为情况 (9) 时,

(i) 因为  $p < 0$ , 所以  $\lambda > 0$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ . 由  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 得  $\lambda < 0$  且  $\underline{\mu} > -\frac{2}{\lambda} > 0$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 因为  $0 < p < \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 所以  $\bar{\mu} < -\frac{2}{\lambda}$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ . 当  $\mu \equiv 0$  且  $\lambda < 0$  时, 由 (10), 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ .

当系统为情况 (11) 时,

(i) 当  $p < 0$  时,  $\lambda > 0$  且  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\mu(\tau)} \Delta\tau > \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\bar{\mu}} \Delta\tau$ , 若  $\bar{\mu} < \infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\bar{\mu}} \Delta\tau| = \infty$ . 故  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\mu(\tau)} \Delta\tau| = \infty$ . 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ . 因为  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 所以  $\lambda < 0$  且  $1 + \lambda\bar{\mu} < -1$ , 从而  $1 + \lambda\bar{\mu} < -1$ , 由  $\lambda < 0$ , 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\mu(\tau)} \Delta\tau < \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\bar{\mu}} \Delta\tau$ , 若  $\bar{\mu} < \infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\bar{\mu}} \Delta\tau| = -\infty$ . 故  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \int_{t_0}^t \frac{1}{1+\lambda\mu(\tau)} \Delta\tau| = \infty$ . 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = \infty$ .

(ii) 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{x}(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t)| = 0$ . 证毕.

**定理 3.5** 当  $p^2 - 4q < 0$  时, 设  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . 此时系统 (8) 为

$$\begin{cases} \tilde{x}^\Delta = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}, \\ \tilde{y}^\Delta = -\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y}, \end{cases} \quad (13)$$

其中  $\alpha = -\frac{p}{2} \neq 0$ , 设  $p \neq \frac{2}{\underline{\mu}}$  且  $p \neq \frac{2}{\bar{\mu}}$ , 则  $\alpha \in \mathcal{R}$ , 引入参数  $r, \theta$ , 将 (13) 式化为

$$\begin{cases} r^\Delta = \alpha r, \\ \theta^\Delta = -\beta, \end{cases} \quad (14)$$

从而满足初值  $r(t_0) = r_0 \neq 0, \theta(t_0) = \theta_0$  的通解为

$$r = r_0 e_\alpha(t, t_0), \quad \theta = -\beta(t - t_0) + \theta_0. \quad (15)$$

证 作坐标变换

$$\begin{cases} \tilde{x} = r \cos \frac{r}{r^\sigma} (\theta, \theta_0), \\ \tilde{y} = r \sin \frac{r}{r^\sigma} (\theta, \theta_0) \end{cases}.$$

令  $u = \frac{r}{r^\sigma}$  且  $\mu u^2 \in \mathcal{R}$ , 由定理 2.6, 得

$$\tilde{x}\tilde{x}^\Delta + \tilde{y}\tilde{y}^\Delta = rr^\Delta e_{\mu u^2}, \quad \tilde{x}\tilde{y}^\Delta - \tilde{y}\tilde{x}^\Delta = rr^\sigma \frac{r}{r^\sigma} e_{\mu u^2}(\theta, \theta_0)\theta^\Delta = r^2 e_{\mu u^2}\theta^\Delta.$$

将 (13) 代入上式, 就将 (13) 式化为 (14), 由定理 2.2, 通解易证. 证毕.

**定理 3.6**  $q > 0, p^2 - 4q < 0$  (两共轭复特征根且实部非零), 此时系统 (8) 为 (14).

(i) 若  $p < 0$ , 或  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r(t)| = \infty$ .

(ii) 若  $0 < p < \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 或  $p > 0$  且  $\mu \equiv 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r(t)| = 0$ .

证 (i) 因为  $p < 0$ , 所以  $\alpha > 0$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r(t)| = \infty$ .

因为  $p > \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 所以  $\alpha < -\frac{2}{\underline{\mu}}$ , 进而  $\underline{\mu} > -\frac{2}{\alpha} > 0$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r(t)| = \infty$ .

(ii) 因为  $0 < p < \frac{4}{\underline{\mu}}$ , 所以  $\alpha > -\frac{2}{\underline{\mu}}$ , 从而  $\bar{\mu} < -\frac{2}{\alpha} < \infty$ , 由定理 2.7, 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r(t)| = 0$ .

当  $\mu \equiv 0$  且  $\lambda < 0$  时, 由 (15), 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r(t)| = 0$ . 证毕.

**定理 3.7**  $q > 0, p = 0$  (特征根为共轭纯虚根), 此时系统 (8) 为 (14), 其中  $\alpha = 0$ , 则轨线是周期的, 故零解稳定, 但不渐近稳定.

#### 4 平面时标线性自治系统的渐近行为 ( $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}, h > 0$ )

因为  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}, h > 0$ , 所以  $\mu \equiv h, h > 0$ . 此时我们称系统 (7) 为  $h$  差分方程. 结合上节得到的结论, 可以分情况讨论得到:

**定理 4.1**  $q > 0, p^2 - 4q > 0$  (两特征根为同号异根).

(i) 当  $p < 0$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加而趋于无穷.

(ii) 当  $0 < p < \frac{2}{h}, q > \frac{p}{h} - \frac{1}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加而趋于 0.

(iii) 当  $\frac{1}{h} < p < \frac{3}{h}, \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2} < q < \frac{p}{h} - \frac{1}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加横坐标趋于 0, 纵坐标跨越原点摆动且趋于 0.

(iv) 当  $\frac{2}{h} < p < \frac{4}{h}, q > \frac{p}{h} - \frac{1}{h^2}, q > \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加跨越原点趋于 0 摆动.

(v) 当  $p > \frac{2}{h}, 0 < q < \frac{p}{h} - \frac{1}{h^2}$  且  $q < \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加横坐标趋于 0, 纵坐标跨越原点摆动且趋于无穷.

(vi) 当  $p > \frac{3}{h}, \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2} > q > \frac{p}{h} - \frac{1}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加横坐标跨越原点摆动且趋于 0, 纵坐标跨越原点摆动且趋于无穷.

(vii) 当  $p > \frac{4}{h}, q > \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加而跨越原点摆动且趋于无穷.

证 满足初值  $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$  的通解为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \begin{cases} \tilde{x}_0(1 + \lambda_1 h)^{nt}, & 1 + \lambda_1 h > 0, \\ (-1)^{nt} \tilde{x}_0 |1 + \lambda_1 h|^{nt}, & 1 + \lambda_1 h < 0, \end{cases} \\ \tilde{y}(t) &= \begin{cases} \tilde{y}_0(1 + \lambda_2 h)^{nt}, & 1 + \lambda_2 h > 0, \\ (-1)^{nt} \tilde{y}_0 |1 + \lambda_2 h|^{nt}, & 1 + \lambda_2 h < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $n_t$  为  $t_0$  与  $t$  之间时标中点的个数.

由于证明与上节类似, 这里证明略.

**定理 4.2**  $q < 0, p^2 - 4q > 0$  (两特征根为异号实根), 不妨设  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ .

(i) 当  $0 > q > \frac{p}{h} - \frac{1}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加横坐标趋于无穷, 纵坐标趋于 0.

(ii) 当  $p < \frac{2}{h}, \frac{p}{h} - \frac{1}{h^2} > q > \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随  $t$  增加横坐标趋于无穷, 纵坐标跨越原点趋于 0 摆动.

(iii) 当  $q < \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加横坐标趋于无穷, 纵坐标跨越原点趋于无穷摆动.

**定理 4.3**  $q > 0, p^2 - 4q = 0$  (特征根为重根), 此时  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}, p \neq \frac{2}{h}$ , 这时系统及其通解有两种可能情形.

(1) 若通解为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \begin{cases} \tilde{x}_0(1 + \lambda h)^{n_t}, & 1 + \lambda h > 0, \\ (-1)^{n_t} \tilde{x}_0 |1 + \lambda h|^{n_t}, & 1 + \lambda h < 0, \end{cases} \\ \tilde{y}(t) &= \begin{cases} \tilde{y}_0(1 + \lambda h)^{n_t}, & 1 + \lambda h > 0, \\ (-1)^{n_t} \tilde{y}_0 |1 + \lambda h|^{n_t}, & 1 + \lambda h < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

(i) 当  $p \equiv 0$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  在点  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$  保持不动.

(ii) 当  $0 < p < \frac{2}{h}$  时, 随着  $t$  的增加  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  趋于 0.

(iii) 当  $p < 0$  时, 随着  $t$  的增加  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  趋于无穷.

(iv) 当  $\frac{2}{h} < p < \frac{4}{h}$  时, 随着  $t$  的增加  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  跨越原点摆动且趋于 0.

(v) 当  $p > \frac{4}{h}$  时, 随着  $t$  的增加  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  跨越原点摆动且趋于无穷.

(2) 若通解为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \begin{cases} \tilde{x}_0(1 + \lambda h)^{n_t}, & 1 + \lambda h > 0, \\ (-1)^{n_t} \tilde{x}_0 |1 + \lambda h|^{n_t}, & 1 + \lambda h < 0, \end{cases} \\ \tilde{y}(t) &= \begin{cases} (1 + \lambda h)^{n_t} \left( \tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \frac{hn_t}{1 + \lambda h} \right), & 1 + \lambda h > 0, \\ (-1)^{n_t} |1 + \lambda h|^{n_t} \left( \tilde{y}_0 + \tilde{x}_0 \frac{hn_t}{1 + \lambda h} \right), & 1 + \lambda h < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

(i) 当  $p \equiv 0$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  随着  $t$  的增加横坐标在  $\tilde{x}_0$  保持不动, 纵坐标趋于无穷.

(ii) 当  $p < 0$  时, 随着  $t$  的增加  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  趋于无穷.

(iii) 当  $p > \frac{4}{h}$  时, 随着  $t$  的增加  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  跨越原点摆动且趋于无穷.

**定理 4.4**  $q > 0, p^2 - 4q < 0$  (两共轭复特征根且实部非零), 设  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ . 作坐标变换后得到满足初值  $r(t_0) = r_0 \neq 0, \theta(t_0) = \theta_0$  的通解为

$$r(t) = \begin{cases} r_0(1 + \alpha h)^{n_t}, & 1 + \alpha h > 0, \\ (-1)^{n_t} r_0 |1 + \alpha h|^{n_t}, & 1 + \alpha h < 0, \end{cases} \quad \theta(t) = -\beta hn_t + \theta_0. \quad (19)$$

(i) 当  $p < 0$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  在一条螺旋线上围着原点向外延伸运动且趋于无穷.

(ii) 当  $0 < p < \frac{2}{h}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  在一条螺旋线上围着原点运动且收敛于原点.

(iii) 当  $\frac{2}{h} < p < \frac{4}{h}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  在一条螺旋线上跨越原点摆动且趋于 0.

(iv) 当  $p > \frac{4}{h}$  时,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  在一条螺旋线上跨越原点摆动且趋于无穷.

而且若  $\beta > 0$ , 则  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  顺时针运动; 若  $\beta < 0$ , 则  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  逆时针运动.

**定理 4.5**  $q > 0, p = 0$  (特征根为共轭纯虚根), 设  $\lambda = \pm \beta i$ .





$k \in \mathbb{N}$ . 这种时标能够描述自然界中许多非常普遍的现象, 例如, 某些昆虫的生命时间, 电路中电流和电量的改变时间等, 参见 [2,3]. 其周期为  $T = l + m$ , graininess 函数为

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(l+m), k(l+m)+l), \\ m, & t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{k(l+m)+l\}. \end{cases}$$

这时  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\text{Log}[1+\lambda_i \mu(\tau)]}{\mu(\tau)} \Delta\tau\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \exp[k(\lambda_i l + \text{Log}[1+\lambda_i m])]$ ,  $\bar{\mu} = m$ ,  $\underline{\mu} = 0$ .

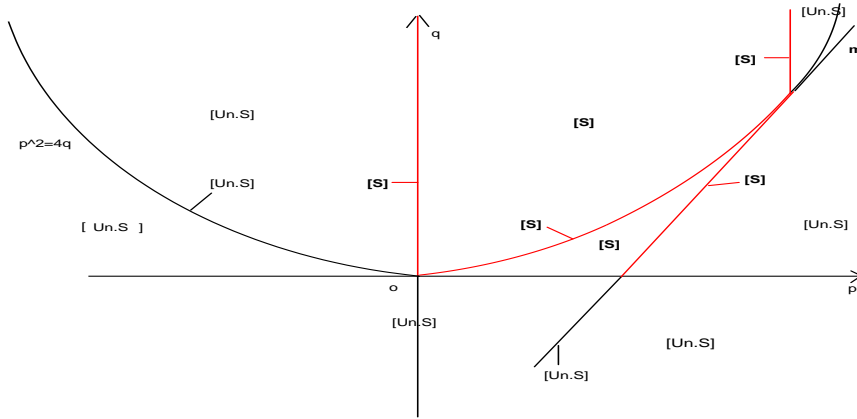


图 2 直线  $m$  表示  $q = \frac{2p}{h} - \frac{4}{h^2}$ ; 当  $q > 0$ ,  $p^2 - 4q = 0$  时, 我们仅考虑系统为 (18) 的情况.

应用本文的结论只能得到关于该时标下平面线性自治系统渐近行为的一些结果, 在 [6] 中有对该系统更为系统地研究. 下面考虑另一类时标  $\mathbb{T} = C$ ,  $C$  为康托集. 在 [3] 中得到此类时标的 graininess 函数为

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{1}{3^{m+1}}, & t \in L, \\ 0, & t \in \mathbb{T}/L. \end{cases}$$

其中  $L := \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}} : m \in \mathbb{N}, a_k \in \{0, 2\}, 0 \leq k \leq m \right\}$ . 显然  $\bar{\mu} = \frac{1}{3}$ ,  $\underline{\mu} = 0$ . 同样可以得到一些关于系统 (7) 渐近行为的结论.

### 参 考 文 献

- [1] Hilger S. Analysis on Measure Chains a Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus. *Results Math.*, 1990, 18: 18-56
- [2] Bohner M, Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Boston: Birkhauser, 2001
- [3] Gard T, Hoffacker J. Asymptotic Behavior of Natural Growth on Time Scales. *Dynamic Systems and Applications*, 2003, 12(1-2): 131-148
- [4] Zhang Binggen. The Development of Differential Equations on Measure Chains. *Ocean University of China*, 2004, 34(5): 908-912
- [5] Bohner M, Fan M, Zhang J M. Existence of Periodic Solution in Predator-Prey and Competition Dynamic Sysems, 2005

- [6] Liu Ailian, Zhu Siming. Asymptotic Behavior of Dynamic Systems on Periodic Times Scales. *Ann. of Diff. Eqs.*, 2005, 21(4): 569–579
- [7] Hale J K. Ordinary Differential Equations. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc Huntington, New York, 1980
- [8] Zhang Zhifen, Ding Tongren. Qualitative Theory of Differential Equations. Beijing: Science Press, 1985

## Asymptotic Behavior of Planar Linear Autonomous Systems on Time Scales

ZHAO WEI

(*School of Science, Dalian Nationalities University, Dalian 116600*)

(*E-mail: zhaow@dlnu.edu.cn*)

FAN SIXIANG

(*School of Mathematics, Fuzhou No.1 Middle School, Fuzhou 350001*)

**Abstract** In this paper, with the discussion of the asymptotic behavior of planar linear autonomous system on time scales, we get some criteria on time scales as the equilibrium classification of planar linear autonomous system, and finally conclude that the criteria can unify the asymptotic properties of the original continuous and difference functions.

**Key words** time scales; planar linear autonomous systems on time scales;  
asymptotic behavior; the classification figures

**MR(2000) Subject Classification** 35B40; 35D45; 47H20; 35K55

**Chinese Library Classification** O175.29