第 31 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 31 No. 1
2008 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2008

三种群食物链交错扩散模型古典解的整体存在性和收敛性 *

温紫娟　　伏升茂

(西北师范大学数学与信息科学学院，兰州 730070)

(E-mail: wzj043527@163.com; fusm@nwnu.edu.cn)

摘　要　应用能量估计方法和 bootstrap 技巧证明了空间维数不超过 5 时一类带自扩散和交错扩散项的三种群 Lotka-Volterra 食物链模型古典解的整体存在性. 当反应函数的系数满足一定条件时通过构造 Lyapunov 函数给出了该模型解的收敛性.

关键词　自扩散; 交错扩散; 古典解; 整体存在性; 收敛性

MR(2000) 主题分类　35K57; 35B35; 92D25

中图分类　O175.26

1　引言

讨论问题

$$\begin{aligned}
&u_t = \Delta[(d_1+\alpha_{11}u+\alpha_{12}v+\alpha_{13}w)u]+(a_1-b_{11}u-b_{12}v)u, \qquad x\in\Omega,\quad t>0,\\
&v_t = \Delta[(d_2+\alpha_{21}u+\alpha_{22}v+\alpha_{23}w)v]+(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)v, \qquad x\in\Omega,\quad t>0,\\
&w_t = \Delta[(d_3+\alpha_{31}u+\alpha_{32}v+\alpha_{33}w)w]+(a_3+b_{32}v-b_{33}w)w, \qquad x\in\Omega,\quad t>0,\\
&\frac{\partial u}{\partial\nu}=\frac{\partial v}{\partial\nu}=\frac{\partial w}{\partial\nu}=0, \qquad x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\
&u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x),\quad w(x,0)=w_0(x), \qquad x\in\Omega,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 为边界光滑的有界区域，ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. $d_i, \alpha_{ij}, a_i, b_{ii}$ $(i,j=1,2,3)$, $b_{12}, b_{21}, b_{23}, b_{32}$ 都为正常数，u_0,v_0,w_0 非负不恒为零. u,v,w 分别表示三个种群的密度函数，a_1,a_2,a_3 分别表示这三个种群的内禀增长率，b_{11},b_{22} 和 b_{33} 描述种群内部的自制作用，$b_{12},b_{21},b_{23},b_{32}$ 描述由 v 与 u, w 与 v 的捕食者 - 食饵关系所产生的种群之间的密度制约作用. d_1,d_2 和 d_3 分别是 u,v,w 的扩散率，$\alpha_{11},\alpha_{22},\alpha_{33}$ 是自扩散系数，$\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{21},\alpha_{23},\alpha_{31}$ 和 α_{32} 是交错扩散系数. 交错扩散系数可以取正值，负值或 0, 按 [1] 的生态学解释是：一种群带正的交错扩散系数表示该种群从另一种群的高密区向低密区扩散，而扩散系数为负表示该种群从另一种群的低密区向高密区扩散.

两种群 Lotka-Volterra 竞争型交错扩散方程组由 Shigesada, Kawasaki 和 Taramoto

---

本文 2006 年 1 月 9 日收到. 2007 年 9 月 24 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10471157,10671158)，甘肃省自然科学基金 (3ZS061-A25-015)，甘肃省教育厅科研项目 (0601-21) 和西北师范大学创新工程资助项目 (NWNU-KJCXGC-03-39). 通讯作者：伏升茂

于 1979 年在文 [2] 中以一维空间形式提出，其局部解的存在唯一性是 Amann 的系列论文 [3–5] 的直接推论，而解的整体存在性与正则性则密切相关于空间维数及其扩散矩阵的性质. 关于 SKT 模型弱解整体存在性的主要结果见最近的文献 [6,7], 其中 [6] 应用有限元方法获得了 3 维空间 SKT 模型整体弱解的存在性， [7] 在高维空间证明了 SKT 模型关于时间半离散化解的收敛性, 从而获得了整体弱解的存在性, 这两种方法仅要求扩散系数非负，即对退缩问题也成立，但弱解的正则化问题与唯一性问题至今是公开的. 此前 Kim[8], Shim[9], Deuring[10], Lou 等 [11] 在空间维数为 1 或 2 时也讨论了 SKT 模型整体弱解或强解的存在性. 对于 SKT 模型古典解整体存在性的新结果见 [12–14], 其中 [12,13] 获得了空间维数小于 6 时 SKT 三角交错扩散模型古典解的整体存在性， [14] 在扩散系数相等且自扩散系数与交错扩散系数满足非常强的限制条件时获得了高维空间中 SKT 模型古典解的整体存在性， [12–14] 没有讨论解的稳定性.

模型 (1.1) 正平衡解的存在性是由 [15] 讨论的， [16] 讨论了模型 (1.1) 在一维空间中解的整体存在性与一致收敛性. 事实上，关于三种群交错扩散模型很少有已知的解的整体存在性结果. 本文在扩散矩阵满足一定条件时讨论模型 (1.1) 古典解的整体存在性，同时在反应函数的系数满足一定条件时通过构造 Lyapunov 函数给出该模型解的收敛性.

2 辅助结果

由 Amann 的论文 [3–5] 可获得如下关于问题 (1.1) 解的局部存在唯一性定理：

定理 2.1 设非负函数 $u_0, v_0, w_0 \in W_p^1(\Omega)$, $p > n$, 则问题 (1.1) 存在唯一非负解 $u, v, w \in C([0,T), W_p^1(\Omega)) \cap C^\infty((0,T), C^\infty(\Omega))$, 其中 $T \in (0,\infty]$. 若 $T < +\infty$, 则

$$\lim_{t\to T^-}\big(\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\big) = +\infty.$$

记 $Q_T = \Omega \times (0,T)$. 为获得问题 (1.1) 的解的 L^p 估计，需类似于 [13] 的如下引理：

引理 2.2 设 $z_2 = (d+\alpha z)z, z$ 是问题

$$\begin{aligned}
&z_t = \Delta\big[(d+\alpha z)z\big] + (a_1 - b_{11}z - b_{12}v)z, \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
&\frac{\partial z}{\partial \nu} = 0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
&z(x,0) = z_0(x) \ge 0, \qquad x\in\Omega
\end{aligned}$$

的解，其中 $d, \alpha, a_1, b_{11}, b_{12}$ 都为正常数， $0 \le v \in L^2(Q_T)$, 则存在依赖于 $\|z_0\|_{W_2^1(\Omega)}$ 及 $\|z_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ 的正常数 M_1, 使得

$$\|z_2\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M_1. \tag{2.1}$$

进一步有

$$\nabla z_2 \in V_2(Q_T), \qquad \nabla z \in L^{\frac{2(n+2)}{n}}(Q_T). \tag{2.2}$$

证 (2.1) 及 (2.2) 中第一个式子为 [13, Lemma 2.2] 的结果. 由 (2.1) 及 [18, 80 页] 的 Lemma3.3 得 $\nabla z_2 \in L^p(Q_T)$, 这里 p 满足

$$p \ge 2, \qquad 2 - 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)(n+2) \ge 0.$$

进一步有 $\nabla z \in L^{\frac{2(n+2)}{n}}(Q_T)$.

由 [13] 引理 2.3 和引理 2.4 可得

引理 2.3 设 $q>1$, $\widetilde{q}=2+\frac{4q}{n(q+1)}$, w 满足

$$\sup_{0\le t\le T}\|w\|_{L^{\frac{2q}{q+1}}(\Omega)}+\|\nabla w\|_{L^2(Q_T)}<\infty,$$

且存在正常数 $\beta\in(0,1)$ 与 C_T, 使得 $\int_\Omega|w(\cdot,t)|^\beta\,\mathrm{d}x\le C_T(\forall t\le T)$, 则存在依赖于 n,Ω,q,β 和 C_T 但不依赖于 w 的正常数 M_2, 使得

$$\|w\|_{L^{\widetilde{q}}(Q_T)}\le M_2\Big\{1+\Big(\sup_{0\le t\le T}\|w(t)\|_{L^{\frac{2q}{q+1}}(\Omega)}\Big)^{\frac{4q}{n(q+1)\widetilde{q}}}\|\nabla w\|_{L^2(Q_T)}^{\frac{2}{\widetilde{q}}}\Big\}.$$

在应用 Lyapunov 函数证明问题 (1.1) 的解的渐近稳定性时，源自 [17] 的下述引理是重要的.

引理 2.4 设 a 和 b 是正常数， $\varphi,\psi\in C^1[a,+\infty)$, $\psi(t)\ge 0$, φ 有下界. 如果 $\varphi'(t)\le -b\psi(t)$, $\psi'(t)$ 在 $[a,+\infty)$ 有上界，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$.

3 整体解的存在性

本文在 $\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{23}=\alpha_{32}=0$ 时讨论问题 (1.1) 古典解的整体存在性，即证明下述定理：

定理 3.1 假设 u_0,v_0,w_0 为满足齐次 Neumann 边值条件的非负 $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ 函数, $\alpha\in(0,1)$, d_i,a_i,b_{ii} $(i=1,2,3)$, $b_{12},b_{21},b_{23},b_{32}$ 都为正常数， $\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{23}=\alpha_{32}=0$, 若 $\alpha_{11}>0$ 时 $n\le 5$, 而 $\alpha_{11}=0$ 时 $n\ge 1$, 则问题 (1.1) 存在唯一非负整体解 $u,v,w\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$.

证 设 (u,v,w) 是问题 (1.1) 的局部解，则由极值原理易证

$$0\le u\le M_0,\qquad 0\le v,\qquad 0\le w,\qquad (x,t)\in Q_T, \tag{3.1}$$

其中 $M_0=\max\big\{\frac{a_1}{b_{11}},\sup\limits_{\Omega}|u_0(x)|\big\}$. 先证 $\alpha_{11}>0$ 的情形，为此先分三步给出 v,w 的 L^∞ 估计.

1. L^1,L^2 估计.

(1.1) 中第二个方程在 Ω 上积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v(x,t)\,\mathrm{d}x\le(a_2+b_{21}M_0)\int_\Omega v(x,t)\,\mathrm{d}x-b_{22}\int_\Omega v^2(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

$$\le(a_2+b_{21}M_0)\int_\Omega v(x,t)\,\mathrm{d}x-\frac{b_{22}}{|\Omega|}\Big(\int_\Omega v(x,t)\,\mathrm{d}x\Big)^2. \tag{3.3}$$

由 (3.3) 知, 存在与 $\sup\limits_\Omega|u_0(x)|$ 及 $\int_\Omega v_0(x)\,\mathrm{d}x$ 相关的正常数 C_1, 对任 $t\ge 0$ 有 $\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}\le C_1$. 对 (3.2) 两端从 0 到 T 积分并移项知，存在正常数 C_2, 使得 $\|v\|_{L^2(Q_T)}\le C_2$. 由 (1.1) 中第三个方程得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w(x,t)\,\mathrm{d}x\le a_3\int_\Omega w(x,t)\,\mathrm{d}x+\frac{b_{32}}{2\varepsilon}\int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x+\Big(\frac{b_{32}\varepsilon}{2}-b_{33}\Big)\int_\Omega w^2\,\mathrm{d}x.$$

取 $\varepsilon>0$ 使 $\frac{b_{32}\varepsilon}{2}-b_{33}<0$ (例如取 $\varepsilon=\frac{b_{33}}{b_{32}}$), 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w(x,t)\,\mathrm{d}x\le C_3+a_3\int_\Omega w(x,t)\,\mathrm{d}x-\frac{b_{33}}{2}\int_\Omega w^2\,\mathrm{d}x.$$

类似于对 (3.3) 的讨论知，存在依赖于 (1.1) 的第二，三个方程的系数，初值及 T 的正常数 M_3, 使得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}, \|v\|_{L^2(Q_T)}, \|w(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}, \|w\|_{L^2(Q_T)} \leq M_3. \tag{3.4}$$

2. L^q 估计.

在 (1.1) 中第二个方程两端同乘以 $qv^{q-1}(q>1)$, 再在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^q\,\mathrm{d}x \leq &-\frac{4(q-1)d_2}{q}\int_\Omega |\nabla(v^{\frac{q}{2}})|^2\,\mathrm{d}x - \frac{8\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2}\int_\Omega |\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})|^2\,\mathrm{d}x\\ &- q(q-1)\alpha_{21}\int_\Omega v^{q-1}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\ &+ q\int_\Omega v^q(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.5}$$

上式两端在 $[0,t]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v^q(x,t)dx + \frac{4(q-1)d_2}{q}\int_{Q_t}|\nabla(v^{\frac{q}{2}})|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{8\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2}\int_{Q_t}|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ \leq &\int_\Omega v^q(x,0)\,\mathrm{d}x - q(q-1)\alpha_{21}\int_{Q_t} v^{q-1}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &+ q\int_{Q_t} v^q(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由 Hölder 不等式， Young 不等式及 (3.1) 得

$$\begin{aligned}&q\int_{Q_t} v^q(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ \leq&(a_2+b_{21}M_0)q|Q_T|^{\frac{1}{q+1}}\|v\|^q_{L^{q+1}(Q_t)} - b_{22}q\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(Q_t)}\\ \leq&q\Big\{\frac{q}{q+1}\big(b_{22}^{\frac{q}{q+1}}\|v\|^q_{L^{q+1}(Q_t)}\big)^{\frac{q+1}{q}} + \frac{1}{q+1}\big[(a_2+b_{21}M_0)b_{22}^{-\frac{q}{q+1}}|Q_T|^{\frac{1}{q+1}}\big]^{q+1}\Big\}\\ &-b_{22}q\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(Q_t)}\\ \leq&\frac{(a_2+b_{21}M_0)^{q+1}b_{22}^{-q}q}{q+1}|Q_T| := C_4, \qquad \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.7}$$

令 $u_2=(d_1+\alpha_{11}u)u$, 由引理 2.2 知 $\nabla u\in L^{\frac{2(n+2)}{n}}(Q_T)$. 取 $\varepsilon=\frac{8\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2C_5}$ 得

$$\begin{aligned}&q(q-1)\alpha_{21}\int_{Q_t} v^{q-1}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \frac{2q(q-1)\alpha_{21}}{q+1}\Big|\int_{Q_t} v^{\frac{q-1}{2}}\nabla u\cdot\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big|\\ \leq&\frac{2q(q-1)\alpha_{21}}{q+1}\|v\|^{\frac{q-1}{2}}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{2}}(Q_T)}\|\nabla u\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}(Q_T)}\|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_T)}\\ \leq&C_5\|v\|^{\frac{q-1}{2}}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{2}}(Q_T)}\|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_T)}\\ \leq&\frac{C_5\varepsilon}{2}\|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{C_5}{2\varepsilon}\|v\|^{q-1}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{2}}(Q_T)}\\ \leq&\frac{4\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2}\|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{C_5}{2\varepsilon}\|v\|^{q-1}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{2}}(Q_T)},\end{aligned} \tag{3.8}$$

令 $\overline{v}=v^{\frac{q+1}{2}}$, 并将 (3.7),(3.8) 代入 (3.6) 得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \overline{v}^{\frac{2q}{q+1}}\,\mathrm{d}x+\frac{4(q-1)d_2}{q}\int_{Q_T}|\nabla(\overline{v}^{\frac{q}{q+1}})|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\frac{4\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2}\int_{Q_T}|\nabla\overline{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
\le&\int_\Omega v_0^q\,\mathrm{d}x+\frac{C_5}{2\varepsilon}\|\overline{v}\|^{\frac{2(q-1)}{q+1}}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{q+1}}(Q_T)}+C_4\\
\le& C_6\Big(1+\|\overline{v}\|^{\frac{2(q-1)}{q+1}}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{q+1}}(Q_T)}\Big).
\end{aligned}\tag{3.9}
$$

令

$$
E\equiv\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega \overline{v}^{\frac{2q}{q+1}}(x,t)\,\mathrm{d}x+\int_{Q_T}|\nabla\overline{v}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\tag{3.10}
$$

则由 (3.9) 得

$$
E\le C_6\Big(1+\|\overline{v}\|^{\frac{2(q-1)}{q+1}}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{q+1}}(Q_T)}\Big).\tag{3.11}
$$

当

$$
q<\frac{n(n+4)}{n^2-4}\tag{3.12}
$$

时 $\frac{(q-1)(n+2)}{q+1}<\widetilde{q}$, 所以

$$
E\le C_7\Big(1+\|\overline{v}\|^{\frac{2(q-1)}{q+1}}_{L^{\widetilde{q}}(Q_T)}\Big).
$$

取 $\widetilde{\beta}=\frac{2}{q+1}\in(0,1)$, 则由 (3.4) 知

$$
\Big(\int_\Omega|\overline{v}(\cdot,t)|^{\widetilde{\beta}}\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{\widetilde{\beta}}}=\|v\|^{\frac{1}{\widetilde{\beta}}}_{L^1(\Omega)}\le M_3^{\frac{1}{\widetilde{\beta}}},\qquad\forall\, t\le T.
$$

因此由引理 2.3 得

$$
\begin{aligned}
E\le& C_7\Big[1+(M_2+M_2\sup_{0\le t\le T}\|\overline{v}(t)\|^{\frac{4q}{n(q+1)\widetilde{q}}}_{L^{\frac{2q}{q+1}}(\Omega)}\|\nabla\overline{v}\|^{\frac{2}{\widetilde{q}}}_{L^2(Q_T)})^{\frac{2(q-1)}{q+1}}\Big]\\
\le& C_8\Big[1+\Big(\sup_{0\le t\le T}\|\overline{v}(t)\|^{\frac{2q}{q+1}}_{L^{\frac{2q}{q+1}}(\Omega)}\Big)^{\frac{4(q-1)}{n(q+1)\widetilde{q}}}(\|\nabla\overline{v}\|^2_{L^2(Q_T)})^{\frac{2(q-1)}{(q+1)\widetilde{q}}}\Big]\\
\le& C_8\Big(1+E^{\frac{4(q-1)}{n(q+1)\widetilde{q}}}E^{\frac{2(q-1)}{(q+1)\widetilde{q}}}\Big).
\end{aligned}\tag{3.13}
$$

易知 $\frac{4(q-1)}{n(q+1)\widetilde{q}}+\frac{2(q-1)}{(q+1)\widetilde{q}}\in(0,1)$, 故对 (3.13) 应用反证法知，存在正常数 C_9, 使得

$$
E\le C_9.\tag{3.14}
$$

(3.14) 式蕴涵着 $\|\overline{v}\|_{L^{\widetilde{q}}(Q_T)}$ 有界, 故 $v^{\frac{q+1}{2}}\in L^{\widetilde{q}}(Q_T)$, 即 $v\in L^{\frac{(q+1)\widetilde{q}}{2}}(Q_T)$. 又由于 $q<\frac{n(n+4)}{n^2-4}$, 所以 $\frac{(q+1)\widetilde{q}}{2}\in\big(1,\frac{2(n+1)}{n-2}\big)$, 即

$$
v\in L^q(Q_T),\qquad\forall\, q\in\Big(1,\frac{2(n+1)}{n-2}\Big).\tag{3.15}
$$

另一方面，由 $\frac{(q-1)(n+2)}{q+1}<\widetilde{q}$ 知 $\overline{v}\in L^{\frac{(q-1)(n+2)}{q+1}}(Q_T)$, 再在 (3.9) 的左端取 $q=2$ 得存在正常数 M_4, 使得

$$\|v\|_{V^2(Q_T)}\le M_4. \tag{3.16}$$

在 (1.1) 中第三个方程两端同乘以 qw^{q-1} $(q>1)$, 再在 Ω 上积分，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^q\,\mathrm{d}x\le&-\frac{4(q-1)d_3}{q}\int_\Omega|\nabla(w^{\frac{q}{2}})|^2\,\mathrm{d}x-\frac{8\alpha_{33}q(q-1)}{(q+1)^2}\int_\Omega|\nabla(w^{\frac{q+1}{2}})|^2\,\mathrm{d}x\\&-q(q-1)\alpha_{31}\int_\Omega w^{q-1}\nabla u\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x+q\int_\Omega w^q(a_3+b_{32}v-b_{33}w)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由上式两端在 $[0,t]$ 上积分可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega w^q(x,t)\,\mathrm{d}x+\frac{4(q-1)d_3}{q}\int_{Q_t}|\nabla(w^{\frac{q}{2}})|^2\,\mathrm{d}x\,dt+\frac{8\alpha_{33}q(q-1)}{(q+1)^2}\int_{Q_t}|\nabla(w^{\frac{q+1}{2}})|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\\le&\int_\Omega w^q(x,0)\,\mathrm{d}x-q(q-1)\alpha_{31}\int_{Q_t}w^{q-1}\nabla u\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+q\int_{Q_t}w^q(a_3+b_{32}v-b_{33}w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&q\int_{Q_t}w^q(a_3+b_{32}v-b_{33}w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\\le&a_3q|Q_T|^{\frac{1}{q+1}}\|w\|^q_{L^{q+1}(Q_t)}\\&+b_{32}q\int_{Q_t}\Big[\frac{q}{q+1}\cdot\frac{(q+1)b_{33}}{2qb_{32}}w^{q+1}+\frac{1}{q+1}\Big(\frac{(q+1)b_{33}}{2qb_{32}}\Big)^{-q}v^{q+1}\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&-b_{33}q\|w\|^{q+1}_{L^{q+1}(Q_t)}\\\le&\frac{q}{2}\Big[\frac{q}{q+1}b_{33}\|w\|^{q+1}_{L^{q+1}(Q_t)}+\frac{1}{q+1}(2a_3)^{q+1}b_{33}^{-q}|Q_T|\Big]+\frac{qb_{32}}{q+1}\Big(\frac{(q+1)b_{33}}{2qb_{32}}\Big)^{-q}\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(Q_t)}\\&-\frac{b_{33}q}{2}\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(Q_t)}\\\le&\frac{1}{2}(2a_3)^{q+1}b_{33}^{-q}|Q_T|+\frac{qb_{32}}{q+1}\Big(\frac{(q+1)b_{33}}{2qb_{32}}\Big)^{-q}\|v\|^{q+1}_{L^{q+1}(Q_t)},\qquad\forall\,t\in[0,T].\end{aligned}$$

由 (3.15) 知当 $q+1<\frac{2(n+1)}{n-2}$, 即 $q<\frac{n+4}{n-2}$ 时 $v\in L^{q+1}(Q_T)$, 故

$$q\int_{Q_t}w^q(a_3+b_{32}v-b_{33}w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le C_{10},\qquad\forall\,t\in[0,T]. \tag{3.17}$$

类似于 (3.8)–(3.15) 式的讨论，有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\overline{w}^{\frac{2q}{q+1}}\,\mathrm{d}x+\frac{4(q-1)d_3}{q}\int_{Q_T}|\nabla(\overline{w}^{\frac{q}{q+1}})|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\frac{4\alpha_{33}q(q-1)}{(q+1)^2}\int_{Q_T}|\nabla\overline{w}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\\le&C_{11}\Big(1+\|\overline{w}\|^{\frac{2(q-1)}{q+1}}_{L^{\frac{(q-1)(n+2)}{q+1}}(Q_T)}\Big),\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $\overline{w}=w^{\frac{q+1}{2}}$. 特别地，有

$$w\in L^q(Q_T),\qquad\forall\,q\in\Big(1,\frac{n+4}{n-2}\Big). \tag{3.19}$$

3. L^∞ 估计.

为应用极值原理给出 (1.1) 的解的 L^∞ 估计，将 (1.1) 的第二，三个方程分别改写为

$$v_t-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_jv)=(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)v, \tag{3.20}$$

$$w_t-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}(b_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}+b_jw)=(a_3+b_{32}v-b_{33}w)w, \tag{3.21}$$

其中

$$a_{ij}=(d_2+\alpha_{21}u+2\alpha_{22}v)\delta_{ij},\qquad a_j=\alpha_{21}u_{x_j},$$
$$b_{ij}=(d_3+\alpha_{31}u+2\alpha_{33}w)\delta_{ij},\qquad b_j=\alpha_{31}u_{x_j},$$

δ_{ij} 是 Kronecker 符号.

由 [13] 知， [18, 181 页] 中 Theorem 7.1 在齐次 Neumann 边界条件下亦成立．故为获得 v 的 L^∞ 估计，需验证下述条件:

1) $\|v\|_{V^2(Q_T)}$ 有界;

2) $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\nu\sum\limits_{i=1}^n\xi_i^2$($\nu$ 为正常数);

3) $\|\sum\limits_{j=1}^n a_j^2,(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)v\|_{L^{q,r}(Q_T)}\le\mu_1$($\mu_1$ 为正常数). 这里 q,r 满足

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}+\frac{n}{2q}=1-\chi,\qquad 0<\chi<1,\\&q\in\Big(\frac{n}{2(1-\chi)},\infty\Big),\qquad r\in\Big[\frac{1}{1-\chi},\infty\Big],\qquad n\ge2.\end{aligned} \tag{3.22}$$

下面依次验证条件 1)–3). 1) 是 (3.16) 式已知的. 2) $\nu=d_2$ 是显然的. 3) 为选取适当的 q,r, 先令 $u_2=(d_1+\alpha_{11}u)u$. 结合 (3.1) 式可知存在有界可测函数 c_1,c_2, 使得

$$u_{2t}=(d_1+2\alpha_{11}u)\Delta u_2+c_1+c_2v. \tag{3.23}$$

而当 $n=2,3,4,5$ 时 $\frac{n+2}{2}<\frac{2(n+1)}{n-2}$, 由 (3.1) 及 (3.15) 知对 $\forall\, q\in(\frac{n+2}{2},\frac{2(n+1)}{n-2})$, $c_1+c_2v\in L^q(Q_T)$. 再结合 (3.1) 及抛物型方程的基本估计 (见 [18,341,342 页， Theorem 9.1]), 存在正常数 M_5, 使得

$$\|u_2\|_{W_q^{2,1}(Q_T)}\le M_5. \tag{3.24}$$

再由嵌入定理 ([18,80 页],Lemma3.3), $\nabla u_2\in L^{\frac{(n+2)q}{n+2-q}}(Q_T)$. 而 $\nabla u=\frac{\nabla u_2}{d_1+2\alpha_{11}u}$, 故

$$|\nabla u|^2\in L^{\frac{(n+2)q}{2(n+2-q)}}(Q_T). \tag{3.25}$$

选取 $q=r=\frac{(n+2)q}{2(n+2-q)}$, 则条件 3) 及 (3.22) 式满足．从而存在正常数 M_6, 使得

$$\|v\|_{L^\infty(Q_T)}\le M_6. \tag{3.26}$$

类似地，存在正常数，仍记作 M_6, 使得

$$\|w\|_{L^\infty(Q_T)}\le M_6. \tag{3.27}$$

综合 (3.1), (3.26), (3.27) 知，对 $\forall T>0$, 存在正常数 M_7, 有

$$\|u\|_{L^\infty(Q_T)}, \|v\|_{L^\infty(Q_T)}, \|w\|_{L^\infty(Q_T)} \le M_7. \tag{3.28}$$

这隐含着 (1.1) 的解在任意区间 $[0,T]$ 上存在，即 (1.1) 存在整体解．下面证明上述整体解 (u,v,w) 是古典的．由 (3.24) 及 Sobolev 嵌入结果 ([18, 80 页],Lemma 3.3) 知

$$\nabla u_2 \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T),$$

从而 $u_2 \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$. 而 $u=\frac{-d_1+\sqrt{d_1^2+4\alpha_{11}u_2}}{2\alpha_{11}}$, 故

$$u \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T). \tag{3.29}$$

再回到 (3.20) 及 (3.21), 由前面的论证已知 $\|v\|_{V^2(Q_T)}$ 及 $\|w\|_{V^2(Q_T)}$ 在 $n=2,3,4,5$ 时有界，

$$(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)v, (a_3+b_{32}v-b_{33}w)w \in L^\infty(Q_T).$$

根据 Schauder 估计 ([见 18, 204 页], Themrem 10.1), 存在 $\alpha^* \in (0,1)$, 使得

$$v, w \in C^{\alpha^*,\frac{\alpha^*}{2}}(\overline{Q}_T). \tag{3.30}$$

此时由 (3.29), (3.30) 知

$$(d_1+2\alpha_{11}u)\delta_{ij}, -2\alpha_{11}\frac{\partial u}{\partial x_i}, (a_1-b_{11}u-b_{12}v)u \in C^{\sigma,\frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T),$$

这里 $\sigma=\min\{\alpha,\alpha^*\}$. 故对 (1.1) 中第一个方程应用 Schauder 估计 (见 [18, 320 页], Theorem 5.3), 有

$$u \in C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T). \tag{3.31}$$

现令 $v_2=(d_2+\alpha_{21}u+\alpha_{22}v)v, w_2=(d_3+\alpha_{31}u+\alpha_{33}w)w$, 则

$$\begin{aligned} v_{2t} =&(d_2+\alpha_{21}u+2\alpha_{22}v)\Delta v_2 \\ &+v(d_2+\alpha_{21}u+2\alpha_{22}v)(a_2+b_{21}u-b_{22}v-b_{23}w)+\alpha_{21}vu_t, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} w_{2t} =&(d_3+\alpha_{31}u+2\alpha_{33}w)\Delta w_2 \\ &+w(d_3+\alpha_{31}u+2\alpha_{33}w)(a_3+b_{32}v-b_{33}w)+\alpha_{31}wu_t. \end{aligned} \tag{3.33}$$

由 (3.29)–(3.31) 知方程 (3.32) 和 (3.33) 的系数都属于 $C^{\sigma,\frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T)$, 故可对方程 (3.32) 和 (3.33) 应用熟知的 *Schauder* 估计，得

$$v_2, w_2 \in C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T). \tag{3.34}$$

又由于

$$v=\frac{-(d_2+\alpha_{21}u)+\sqrt{(d_2+\alpha_{21}u)^2+4\alpha_{22}v_2}}{2},$$
$$w=\frac{-(d_3+\alpha_{31}u)+\sqrt{(d_3+\alpha_{31}u)^2+4\alpha_{33}w_2}}{2},$$

故

$$v, w \in C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T). \tag{3.35}$$

综合 (3.31), (3.35) 知

$$u, v, w \in C^{2+\sigma, 1+\frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T).$$

若 $\alpha \leq \alpha^*$, 即 $\sigma = \min\{\alpha, \alpha^*\} = \alpha$, 则已有 $u, v, w \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, 从而 (1.1) 的解具有与初值相同的正则性. 若 $\alpha > \alpha^*$, 即 $\sigma = \min\{\alpha, \alpha^*\} < \alpha$, 此时 (1.1) 的解还未达到与初值相同的正则性, 故需作进一步提升. 事实上, 此时 $u, v, w \in C^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$, 重复估计 (3.31)–(3.35), 就有 $u, v, w \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$.

注意到 $\alpha_{11} = 0$ 时不需要类似于 (3.12) 的空间维数限制条件就可获得类似于 (3.13) 的估计, 而且剩下的步骤是上述证明的简化, 故不再复述. 定理 3.1 的证明完成.

注 1 在初值满足定理 3.1 的条件时, 若 $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0$, 则经过类似的证明可知类似于定理 3.1 的结论仍成立. 自然地, 在其它可保证问题 (1.1) 解的一个分量有界的 α_{ij} 的条件下, 也有类似于定理 3.1 的结论成立.

4 稳定性

为简明起见, 本节仅讨论下述问题解的全局渐近稳定性:

$$\begin{aligned}
&u_t = \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] + (a_1 - b_{11}u - b_{12}v)u, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&v_t = \Delta[(d_2 + \alpha_{21}u)v] + (a_2 + b_{21}u - b_{22}v - b_{23}w)v, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&w_t = \Delta[(d_3 + \alpha_{31}u)w] + (a_3 + b_{32}v - b_{33}w)w, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\
&\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty),\\
&u(x,0) = u_0(x) \geq 0, v(x,0) = v_0(x) \geq 0, w(x,0) = w_0(x) \geq 0, \qquad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

对满足定理 3.1 或第 3 节注 1 中条件的情形亦可做类似讨论.

由简单计算知, 若

$$\begin{aligned}
&a_1b_{22}b_{33} + a_1b_{23}b_{32} + a_3b_{12}b_{23} > a_2b_{12}b_{33},\\
&a_1b_{21}b_{33} + a_2b_{11}b_{33} > a_3b_{11}b_{23},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

则问题 (4.1) 存在唯一的正平衡点 $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$, 其中

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= \frac{a_1b_{22}b_{33} + a_1b_{23}b_{32} + a_3b_{12}b_{23} - a_2b_{12}b_{33}}{b_{11}b_{22}b_{33} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33}},\\
\overline{v} &= \frac{a_1b_{21}b_{33} + a_2b_{11}b_{33} - a_3b_{11}b_{23}}{b_{11}b_{22}b_{33} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33}},\\
\overline{w} &= \frac{a_1b_{21}b_{32} + a_2b_{11}b_{32} + a_3b_{11}b_{22} + a_3b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}b_{33} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33}}.
\end{aligned}$$

取 Lyapunov 函数如下

$$H(u,v,w) = \int_\Omega \Big[\Big(u - \overline{u} - \overline{u}\ln\frac{u}{\overline{u}}\Big) + \lambda\Big(v - \overline{v} - \overline{v}\ln\frac{v}{\overline{v}}\Big) + \rho\Big(w - \overline{w} - \overline{w}\ln\frac{w}{\overline{w}}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x,$$

其中 λ, ρ 为待定正常数. 显然 $H(u,v,w) \geq 0$, 且 $H(u,v,w) = 0$ 当且仅当 $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$, $w = \overline{w}$. 由定理 3.1 知, 当 (u,v,w) 是 (1.1) 的解时 $H(u,v,w)$ 对任意 $t \geq 0$ 有意义. $H(u,v,w)$ 沿 (1.1) 的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}H(u,v,w)}{\mathrm{d}t} = -\int_\Omega \Big[\frac{(d_1 + 2\alpha_{11}u)\overline{u}}{u^2}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda\alpha_{21}\overline{v}}{v}\nabla u \cdot \nabla v + \frac{\rho\alpha_{31}\overline{w}}{w}\nabla u \cdot \nabla w$$

$$+\frac{\lambda(d_2+\alpha_{21}u)\overline{v}}{v^2}|\nabla v|^2+\frac{\rho(d_3+\alpha_{31}u)\overline{w}}{w^2}|\nabla w|^2\Big]\,\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega\big[b_{11}(u-\overline{u})^2+(b_{12}-b_{21}\lambda)(u-\overline{u})(v-\overline{v})+b_{22}\lambda(v-\overline{v})^2$$
$$+(b_{23}\lambda-b_{32}\rho)(v-\overline{v})(w-\overline{w})+b_{33}\rho(w-\overline{w})^2\big]\,\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

现在要寻找适当的 λ,ρ, 使得上式右端第二个被积函数正定，即存在常数 $\delta>0$, 使得

$$b_{11}x^2+(b_{12}-b_{21}\lambda)xy+b_{22}\lambda y^2+(b_{23}\lambda-b_{32}\rho)yz+b_{33}\rho z^2\geq 2\delta(x^2+y^2+z^2). \tag{4.4}$$

注意到

$$\begin{aligned}&(b_{11}-2\delta)x^2+(b_{12}-b_{21}\lambda)xy+\Big(\frac{b_{22}\lambda}{2}-\delta\Big)y^2\geq 0,\\&\Big(\frac{b_{22}\lambda}{2}-\delta\Big)y^2+(b_{23}\lambda-b_{32}\rho)yz+(b_{33}\rho-2\delta)z^2\geq 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

满足时 (4.4) 成立，

$$\begin{aligned}&(b_{12}-b_{21}\lambda)^2<4(b_{11}-2\delta)\Big(\frac{b_{22}\lambda}{2}-\delta\Big),\\&(b_{23}\lambda-b_{32}\rho)^2<4\Big(\frac{b_{22}\lambda}{2}-\delta\Big)(b_{33}\rho-2\delta)\end{aligned} \tag{4.6}$$

满足时 (4.5) 成立．取

$$\lambda=(b_{12}b_{21}+b_{11}b_{22})b_{21}^{-2},\qquad \rho=(b_{12}b_{21}+b_{11}b_{22})(b_{23}b_{32}+b_{22}b_{33})b_{21}^{-2}b_{32}^{-2}, \tag{4.7}$$

当 $\delta>0$ 充分小时 (4.6) 成立，从而 (4.4) 成立．而为使 (4.3) 右端第一个被积函数半正定，只需

$$4(d_1+2\alpha_{11}u)(d_2+\alpha_{21}u)(d_3+\alpha_{31}u)\overline{u}\geq\rho\alpha_{31}^2(d_2+\alpha_{21}u)\overline{w}u^2+\lambda\alpha_{21}^2(d_3+\alpha_{31}u)\overline{v}u^2.$$

联系 (3.1) 知，

$$4d_1d_2d_3\overline{u}\geq\rho\alpha_{31}^2(d_2+\alpha_{21}M_0)\overline{w}M_0^2+\lambda\alpha_{21}^2(d_3+\alpha_{31}M_0)\overline{v}M_0^2 \tag{4.8}$$

是上式成立的充分条件，而 M_0 与 d_1,d_2 和 d_3 无关，故只要 d_1,d_2 或 d_3 大，即可保证条件 (4.8) 满足．这样由 (4.2) 得

$$\frac{\mathrm{d}H(u,v,w)}{\mathrm{d}t}\leq-2\delta\int_\Omega\big[(u-\overline{u})^2+(v-\overline{v})^2+(w-\overline{w})^2\big]\,\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

类似于 (4.2), 由分部积分， Hölder 不等式知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\big[(u-\overline{u})^2+(v-\overline{v})^2+(w-\overline{w})^2\big]\,\mathrm{d}x$ 上有界，因此由引理 2.4 和 (4.9) 得

$$\|u(\cdot,t)-\overline{u}\|_{L^2(\Omega)},\ \|v(\cdot,t)-\overline{v}\|_{L^2(\Omega)},\ \|w(\cdot,t)-\overline{w}\|_{L^2(\Omega)}\longrightarrow 0,\qquad t\to\infty.$$

综合以上讨论，我们得到关于问题 (4.1) 的如下稳定性结果：

定理 4.1　在定理 3.1 的假设下，若还有 (4.2), (4.8) 成立，则问题 (4.1) 的任意正解 (u,v,w) 总收敛到唯一的正平衡点 $(\overline{u},\overline{v},\overline{w})$.

推论 4.2　若定理 4.1 的所有条件成立，则问题 (4.1) 不存在非平凡正平衡解.

参 考 文 献

[1] Dubey B, Hussain B. A Predator-Prey Interaction Model with Self and Cross-diffusion. *Ecological Modelling*, 2001, 141(1): 67–76

[2] Shigesada N, Kawasaki K, Teramoto E. Spatial Segregation of Interacting Species. *J. Theor. Biology*, 1979, 79(1): 83–99

[3] Amann H. Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Equations I. Abstract Evolution Equations. *Nonlinear Analysis*, 1998, 12(9): 895–919

[4] Amann H. Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Equations II. Reaction-diffusion. *Diff. Int. Eqs*, 1990, 3(1): 13–75

[5] Amann H. Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Equations III. Global Existence. *Math. Z.*, 1989, 202(2): 219–250

[6] Barrett J, Blowey J. Finite Element Approximation of a Nonlinear Cross-diffusion Population Model. *Numer. Math.*, 2004, 98: 195–221

[7] Chen L, Jüngel A. Analysis of a Multi-dimensional Parabolic Population Model with Strong Cross-diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, 2002, 36: 301–322

[8] Kim J. Smooth Solutions to a Quasi-linear System of Diffusion Equations for a Certain Population Model. *Nonlinear Anal.*, 1984, 8: 1121–1144

[9] Seong-A Shim. Uniform Boundedness and Convergence of Solutions to Cross-diffusion Systems. *J. Diff. Eqs.*, 2002, 185(1): 281–305

[10] Deuring P. An Initial-boundary Value Problem for a Certain Density-dependent Diffusion System. *Math. Z.* 1987, 194: 375–396

[11] Lou Y, Ni W, Wu Y. On the Global Existence of a Cross-diffusion System. *Discrete Contin. Dynam. Systs*, 1998, 4(2): 193–203

[12] Choi Y S, Lui R, Yamada Y. Existence of Global Solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto Model with Weak Coupled Cross-diffusion. *Discrete Contin. Dynam. Sys.*, 2003, 9: 1193–1200

[13] Choi Y S, Lui R, Yamada Y. Existence of Global Solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto Model with Strongly Coupled Cross-diffusion. *Discrete Contin. Dynam. Systs*, 2004, 10: 719–730

[14] Li Y, Zhao C. Global Existence of Solutions to a Cross-diffusion System in Higher Dimensional Domains. *Discrete Contin. Dynam. Systs*, 2005, 12: 185–192

[15] Kim K, Lin Z. Coexistence of Three Species in a Strongly Coupled Elliptic System. *Nonlinear Analysis*, 2003, 55(3): 313–333

[16] Fu S, Wen Z, Cui S. On Global Solutions for the Three-species Food-Chain Cross Diffusion Model. *Acta Mathematica Sinica* (Chinese Series), 2007, 50(1): 75–88

[17] Wang M. Nonlinear Equations of Parabolic Type. Beijing: Science Press, 1993

[18] Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Ural'ceva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs, 23, AMS, 1968

Global Existence and Convergence of Classical Solutions for the Three-Species Food-Chain Model with Cross-Diffusion

WEN Zijuan FU Shengmao

(*College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070)

(*E-mail: wzj043527@163.com; fusm@nwnu.edu.cn*)

Abstract Using the energy methods and the bootstrap arguments, the global existence of classical solutions for a Lotka-Volterra food-chain model of three interacting species with self and cross-population pressure is proved when the space dimension is at most 5. Under certain conditions for the coefficients of the reaction functions, the convergence of solutions is established for the system by constructing Lyapunov function.

Key words self-diffusion; cross-diffusion; classical solutions; global existence; convergence

MR(2000) Subject Classification 35K57; 35B35; 92D25

Chinese Library Classification O175.26