第 31 卷 第 5 期　应 用 数 学 学 报　Vol. 31 No. 5
2008 年 9 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　Sep., 2008

Ford-Fulkerson 算法与嵌入图中的短圈 *

张 燕　任 韩

(华东师范大学数学系，上海 200062)

(E-mail: hren@math.ecnu.edu.cn)

摘 要 关于嵌入图中最短圈的多项式算法的存在性问题，是由 Thomassen 最早提出的. 本文通过改进的 Ford-Fulkerson 算法，可以得到最短割算法. 另一方面，通过定义嵌入图的几何对偶图及其相应的嵌入系统，得到几何对偶图中的可分离圈就对应于原图中的割；反之，若几何对偶图中的割在原图中对应于一个圈，那么该圈一定可分离. 从而在射影平面上解决了 Mohar 与 Thomassen 关于是否存在多项式算法寻找短圈的问题. 对于一般曲面上嵌入图，只要它的面宽度充分大，那么同样有多项式算法发现最短可收缩圈.

关键词 割；可分离圈；可收缩圈；双侧圈

MR(2000) 主题分类 05C10; 05C40

中图分类 O175.8

1 最短割算法

网络最大流问题是 1955 年首先由 Ford 和 Fulkerson 提出来的，这个问题的提出及许多有有关理论和方法的出现，密切了图论和运筹学，特别是与线性规划的联系，开辟了图论应用的一条新途径. 在这里，我们将通过改进 Ford-Fulkerson 算法，得到最短割的一个算法.

首先，介绍一下几个基本概念.

定义 1 给定一个有向图 $D=(V,E)$，$c(e)$ 是定义在 E 上的一个非负函数，称为*容量*, 若弧 $e=v_iv_j$, 我们也记 $c(e)$ 为 c_{ij}, 并称之为弧 e 上的容量. 给了容量函数，我们就称 D 为*(有向)容量网络*, 记为 $D=(V,E,c(e))$. 进一步，若 D 中给定两个点，一个点称为发点，记为 v_s; 另一个点称为收点，记为 v_t; 网络中其余的点称为中间点，则称这样的网络为*带收发点的(有向)容量网络*.

定义 2 设定义在 E 上的函数 $f=\{f_{ij}\}$ 是带收发点的容量网络 D 上的一个流，如果 f 满足下述两个条件：

(1) 对任一弧 $v_iv_j\in E$ 均有 $0\le f_{ij}\le c_{ij}$;

(2) 对任一点 $v_i\in V\setminus\{v_s,v_t\}$ 均有 $\sum\limits_{v_iv_j\in E} f_{ij}-\sum\limits_{v_jv_i\in E} f_{ji}=0$;

则称 f 是一个*可行流*, 称 $\sum\limits_{v_sv_j\in E} f_{sj}-\sum\limits_{v_jv_s\in E} f_{js}$ 为可行流 f 的*流量*, 并记为 $v(f)$.

定义 3 给定带收发点的容量网络 $D=(V,E,c(e))$. 设 X 是 V 的一个子集，使得 $v_s\in X, v_t\notin X$，$O(X)$ 是一个连结 X 与 $\overline{X}$ 中节点的边子集，如果 $D-O(X)$ 中不存在

本文 2008 年 5 月 5 日收到. 2008 年 9 月 2 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10671073) 和上海市重点学科建设资助项目 (B407).

$(v_s - v_t)$ 路，我们称 $O(X)$ 是分离 v_s, v_t 的一个 截集, 称 $c(O(X))$ 为 截集 $O(X)$ 的容量, 简称 截量.

定义 4 如果我们得到一个可行流 f^*, 及一个截集 $O(X^*)$, 使得 $v(f^*) = c(O(X^*))$, 那么 f^* 就是最大流，而 $O(X^*)$ 是 D 的所有截集中容量最小的一个，称为 最小截集.

定理 1 (最大流最小截集定理 [1]) 任一个带收发点的容量网络中，最大流的流量等于最小截集的容量.

定理 2 (整数最大流定理) 在带收发点的容量网络中，若所有弧的容量都是整数，则必定存在整数最大流 (即，每弧的流量都取整数值).

设 μ 是 D 中一条 $(v_s - v)$ 链，我们规定 μ 的正方向是从 v_s 到 v. 在这个规定之下，μ 上的弧被分为两部分：一部分弧是与 μ 的正方向方向相同的，记为 μ^+; 一部分弧是与 μ 的正方向方向相反的，记为 μ^-. (μ^+ 与 μ^- 中可能有一个是空集)

定义 5 设 f 是 D 中的一个可行流， μ 是一条 $(v_s - v)$ 链，若对 μ 上的任一条弧 v_iv_j, 有

$$f_{ij} \quad \begin{cases} < c_{ij}, & v_iv_j \in \mu^+, \\ > 0, & v_iv_j \in \mu^-, \end{cases}$$

则称 μ 是 (关于 f 的) 一条 $(v_s - v)$增广链.

定理 3 可行流 $f^* = \{f^*_{ij}\}$ 是最大流当且仅当 D 中不存在关于 f^* 的 $(v_s - v_t)$ 增广链.

通过上述定理，我们可以得到一条求最大流的途径，从一个可行流 f(例如 $f \equiv 0$) 出发，判断 D 中有无关于 f 的 $(v_s - v_t)$ 增广链. 若没有这样的增广链，则 f 是最大流; 若有这样的增广链，那么可以对 f 进行调整，得到一个新的可行流 f',

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta, & v_iv_j \in \mu^+, \\ f_{ij} - \theta, & v_iv_j \in \mu^-, \\ f_{ij}, & v_iv_j \notin \mu, \end{cases}$$

其中， $0 < \theta \le \min \big[\min\limits_{v_iv_j \in \mu^+} (c_{ij} - f_{ij}), \min\limits_{v_iv_j \in \mu^-} f_{ij} \big]$.

不难发现， f' 的流量是大于 f 的流量的. 对 f' 再重复上述过程. 根据整数最大流定理，只要所有的弧上的容量都是整数，最大流是有上界的 (事实上，只要都是有理数，因为可以把容量乘上适当的因子，化为全是整数的情形). 因此，可以在有限步内求得最大流.

由此可见,求最大流的这个方法之关键在于如何判断 D 中有无关于可行流的 $(v_s - v_t)$ 增广链. 这里介绍一下用反圈法寻求 $(v_s - v_t)$ 增广链的原则.

$(v_s - v_t)$ **增广链算法** 设 f 是一个可行流，

(1) 开始，令 $X^{(0)} = \{v_s\}$.

(2) 一般地，设有 $X^{(k)}$, 在 $\Phi(X^{(k)}) = \{(x, y) \in E(G) \mid x \in X^{(k)},\ y \in V(G) - X^{(k)}\}$ 中按下述准则选弧：在 $O(X^{(k)})$ 中选使 $f_{ij} < c_{ij}$ 的弧 v_iv_j; 在 $I(X^{(k)})$ 中选使 $f_{ji} > 0$ 的弧 v_jv_i ，这里 $v_i \in X^{(k)}$, $v_j \notin X^{(k)}$.

(3) 若在某一步，存在 $v_t \in X^{(k)}$, 则表明找到了一条 $(v_s - v_t)$ 增广链，按照前面介绍方法对 f 施行调节，然后令 $X^{(k)} := X^{(k)} + \{v_t\}$. 若在某一步， $\Phi(X^{(k)})$ 中无可选弧，而 $v_t \notin X^{(k)}$, 则说明 D 中不存在 $(v_s - v_t)$ 增广链. 由定理 2.3.3 可知，这时的 f 是最大流，而这时的 $O(X^{(k)})$ 便是最小截集.

以上便是网络最大流的 Ford-Fulkerson 算法，稍做改进便可得到最短割算法．在介绍最短割算法之前我们先根据 G 定义一个有向图，并对每条边附上一个容量.

定义 6 给定一个图 G, 把 G 中的每一边 v_iv_j 换为一对方向相反的弧 v_iv_j 和 v_jv_i, 称所得的有向图为与 G 对应的对称有向图，记为 $\overrightarrow{G}$.

令 $\overrightarrow{G}$ 中每弧的容量为 1, 取 G 的两点 u,v 分别为收，发点．由此，我们得到了一个带收发点的有向容量网络 D_G.

根据 Ford-Fulkerson 算法，可以求出分离 u, v 的最小截集 $O(X_{uv})$. 如果不计弧的方向，该截集一定对应于 G 中的一个边集，且该边集一定是 G 中分离节点 u, v 的最短割.

由此我们可以得到一个割的集合 $\{O(X_{uv}) \mid u \in V(G),\ v \in V(G)\}$, 显然其中最短的那个一定就是图 G 的最短割．因此，求最短割的算法就是最大流算法的一个推广．又因为 Ford-Fulkerson 算法是有效的 (至多是 $O(n^2m^3)$ 级别，其中 n 与 m 分别是图的节点数与边数), 从而以下结果明显成立.

定理 4 判定一个图的最短割是可以在多项式级时间内求解的.

2 应用

以下我们介绍 Ford-Fulkerson 算法在拓扑图论方面的一个重要应用．在拓扑图论领域，有以下三个公开问题至今未获解决， Mohar B 与 Thomassen C 在他们的文章 [2] 和著作 [3] 中号召人们攻克它们.

问题 1 是否存在多项式算法用以求出一个嵌入图中的一个最短可收缩圈？

问题 2 是否存在多项式算法用以求出一个嵌入图中最短可分离圈？

问题 3 是否存在多项式算法用以求出一个嵌入图中最短双侧圈？

短圈问题在理论上有着深刻的意义，例如：一个嵌入图中的边宽度就是其最短不可收缩圈的长度. 另一方面，Thomassen C 建立的 3- 路条件 [2] 表明：图的圈空间的任一子空间以外的最短圈都是容易解决的 (即有多项式算法); 而这些子空间内部的最短圈问题却是十分困难的. 细心的读者不难发现，上述 3 个公开问题都是无法用 C.Thomassen 的基本圈方法 [2] 方法解决的, 这就是问题的深刻所在. 接下来, 我们将运用 Ford-Fulkerson 算法对上述三个问题进行探讨，从而得出部分结果.

先介绍一下拓扑图论的一些概念，可参见 [3].

图 G 的嵌入是一个有序对 $\Pi = (\pi, \lambda)$, 这里 $\pi = \{\pi_v \mid v \in V(G)\}$ 是一个 旋转系统, 即对 $\forall v \in V(G)$, π_v 是指与 v 相关联的边的长为 $d(v)$ 的循环置换， λ 是一个关于边的符号映射，即 $\forall e \in E(G)$, $\lambda(e) \in \{1, -1\}$; 给定图 G 的一个嵌入 Π, 称 G 是 Π 嵌入的.

在 G 的一个 2- 胞腔嵌入 Π 中，如果一个圈上有奇数个边按 λ 取值 -1, 则这个圈称为 单侧 的；否则称为 双侧 的．在 G 的一个 2- 胞腔嵌入 Π 中，如果存在一个单侧圈，则称 Π 是 G 在一个 不可定向曲面上的嵌入; 否则称 Π 是 G 在一个 可定向曲面上的嵌入.

在 G 的一个 2- 胞腔嵌入 Π 上，设 $C = v_0e_1v_1e_2\cdots e + lv_l$ 是一个双侧圈．对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, l$, 如果 $e_{i+1} = \pi_{v_i}^{k_i}(e_i)$, 则所有边 $\pi_{v_i}(e_i), \pi_{v_i}^2(e_i), \cdots, \pi_{v_i}^{k_i-1}(e_i)$ 称为圈 C 的左侧边，所有含有圈 C 的左侧边的 C 的桥的并集称为 C 的 左图, 记为 $G_l(C)$; 类似地，可以定义 C 的 右图, 记为 $G_r(C)$. 在 G 的一个 2- 胞腔嵌入 Π 上，如果 C 是双侧圈且 $G_l(C)$ 与 $G_r(C)$ 没有公共边，则称 C 在 Π 上是 可分离 的；否则，称 C 在 Π 上 不可分离. 如果 $G_l(C) \cup C$ 与 $G_r(C) \cup C$ 中有一个在 Π 上的亏格为 0, 则称 C 在 Π 上是 可收缩 的；否则，称 C 在 Π 上 不可收缩.

定义 7 G 是曲面 Π 上的一个 2- 胞腔嵌入，如果存在 k 个面迹 $W_1, \cdots, W_k$ 闭链，使得它们的并包含不可收缩圈，那么把满足上述条件的最小 k 定义为 G 的面宽度，记为 $fw(G, \Pi)$, 简记为 $fw(G)$.

定义 8 给定图 G 的一个 2- 胞腔嵌入 $\Pi=(\pi,\lambda)$, 可以定义其相应的几何对偶图 G^* 及其相应的嵌入系统 $\Pi^*=(\pi^*,\lambda^*)$ 如下：对于图 G 的每个面迹 f, 都有 G^* 的顶点 f^* 与之对应；对于 G 的每条边 e, 都有 G^* 的边 e^* 与之对应； G^* 中顶点 f^* 和 g^* 由边 e^* 连接，当且仅当 G 中与顶点 f^* 和 g^* 对应的面 f 和 g 都与 e 关联．若 $f=e_1e_2\cdots e_k$ 为 G 中的面迹，则 G^* 中与 f 对应的顶点 f^* 的循环置换可定义为 $\pi^*_{f^*}=(e_1^*,e_2^*,\cdots,e_k^*)$, 其中 e_i^* 分别对应于 G 中的 e_i $(i=1,2,\cdots,k)$. 由此便得到了图 G^* 的一个旋转系统．另外，为保证图 G^* 的几何意义，可定义其符号映射 λ^* 为 $\lambda^*(e^*)=\lambda(e)$, 这里 e^* 为 G^* 中的边，与 G 中的边 e 相对应.

通过上述定义，我们不难发现，如果 G 是在曲面 S 上的一个 2- 胞腔嵌入，那么 G^* 也是 2- 胞腔嵌入在曲面 S 上的．反之，亦成立，因为 G^* 在曲面 S 上的的几何对偶图就是 G.

为了方便起见，我们先约定几个记号，下文中如无特别说明，我们就不再赘述了.

(1) 若 W 是 G 中的一个面迹，则以 w 表示 G^* 中与面迹 W 相对应的那个节点；

(2) 若 e 是 G 中的一条边，则以 e^* 表示 G^* 中与边 e 相对应的那条边；

(3) 若 C 是 G 中的一个边集，则以 C^* 表示 G^* 中所有与 C 中边对应的边的全体.

引理 5 图 $G=(V,E)$ 为 Π 上的 2- 胞腔嵌入， $G^*=(V^*,E^*)$ 是其几何对偶图． C 是 G 的一个圈， C^* 为与 C 对应的 G^* 中的边集．那么， C 是 G 中的可分离圈当且仅当 C^* 是 G^* 中的割.

证 *充分性* 由于 C 是 G 中的 Π- 可分离圈，则它一定是双侧的，且 $G_l(C)$ 与 $G_r(C)$ 没有公共边．不妨设 $C=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{l-1}e_lv_l$, 其中 $\lambda(e_i)=1,\ i=1,\cdots,l$.

我们将 G^* 中的节点分成两部分 V_l^* 和 V_r^*, 其中 V_l^* 中的点对应于 G 中那些含有 $G_l(C)$ 中的边的面迹，同理可定义 V_r^*. 由此我们有如下断言：

断言 $V_l^*\cap V_r^*=\emptyset$, 即对于 G 中的任一面迹中的所有边或者包含于 $G_l(C)\cup C$ 中，或者包含于 $G_r(C)\cup C$ 中．假设结论不成立，则存在 G 中的一个面迹 W, 使得 W 中同时包含 C 的左图与右图中的边．令 $W=P_1Q_1\cdots P_kQ_k$, 其中 P_i 与 C 没有公共边，而 Q_i 为 C 的一个子集 $(i=1,2,\cdots,k)$. 由于 P_i 必包含在某一 C 桥中，故而存在 $t\in\{1,\cdots,k\}$ 使得 $P_t\subseteq G_l(C), P_{t+1}\subseteq G_r(C)$ (注意到 $P_{k+1}=P_1$).

设 $P_t=\cdots e^lv_p,\ Q_t=v_pe_{p+1}\cdots e_qv_q,\ P_{t+1}=v_qe^r\cdots$, 其中 $e^l\in G_l(C),\ e^r\in G_r(C)$. 因此，有 $\pi_{v_p}(e^l)=e_{p+1},\ \pi_{v_q}(e^r)=e_q$. 由于 W 是一个面迹，则必存在 Q_t 中的一条边 e ，使得 $\lambda(e)=-1$. 另一方面， e 是 C 中的一条边，其符号必为 1, 因此得到矛盾．至此断言得证.

由以上断言可以说明 $[V_l^*,V_r^*]$ 是 G^* 中的一个割，接下来只需证明 $C^*=[V_l^*,V_r^*]$ 即可．考虑 G^* 中的边 $e^*=w_1w_2$, 其中 w_1,w_2 分别对应于 G 中包含边 e 的面迹 W_1,W_2.

若 $e^*\in[V_l^*,V_r^*]$, 则不妨设 $w_1\in V_l^*,\ w_2\in V_r^*$, 那么 $W_1\subseteq G_l(C)\cup C, W_2\subseteq G_r(C)\cup C$. 由于 $G_l(C)$ 与 $G_r(C)$ 没有公共边，因此 $e\in C$, 即 $e^*\in C^*$. 故而 $[V_l^*,V_r^*]\subseteq C^*$.

反之，若 $e^*\in C^*$, 即 $e\in C$. 假设 $W_1=W_2=u_0eu_1\widetilde{e}_1u_2\widetilde{e}_2\cdots u_k\widetilde{e}_ku_1eu_0\cdots$ 显然， $\{\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2,\cdots,\widetilde{e}_k\}$ 不是 $E(C)$ 的子集，否则 C 不是圈．不妨设 $\widetilde{e}_s$ 与 $\widetilde{e}_t$ 分别为 $\{\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2,\cdots,\widetilde{e}_k\}$ 中第一个与最后一个不属于 C 的边. 由于圈 C 上边的符号全为 1, 于是就有 $\widetilde{e}_s\in G_l(C)$ 而 $\widetilde{e}_t\in G_r(C)$, 这与之前的断言相矛盾. 因此 $W_1\neq W_2$, 再假设 W_1 与 W_2 同时包含在 C 的左图中 (右图中的情况可以类似讨论). 设：$W_1=v_0ev_1e_1^1v_2^1e_2^1\cdots v_0,\ W_2=v_0ev_1e_1^2v_2^2e_2^2\cdots v_0$, 且不妨设 $e_1^1\neq e_1^2$, 否则就考虑 e_2^1 与 e_2^2. 接下来，可以分成以下四种情况进行讨论：

情况 1 $e_1^1\in C, e_1^2\in C$.

显然 $e_1^1=e_1^2$, 这与之前的假设矛盾.

情况 2 $e_1^1\notin C,\ e_1^2\notin C$.

那么根据假设 W_1 与 W_2 同时包含在 C 的左图中，则有 $e_1^1, e_1^2 \in G_l(C)$, 因此 $e_1^1 = e_1^2 = \pi_{v_1}(e)$, 又得出矛盾.

情况 3 $e_1^1 \in C$， $e_1^2 \notin C$.

那么 $\pi_{v_1}^{-1}(e) = e_1^1$, $\pi_{v_1}(e) = e_1^2$. 不妨设 e_t^1 是 $e_1^1, e_2^1, \cdots$ 中第一个不属于 C 的边. 由于 C 上边的符号全为 1, 那么 $\pi_{v_t^1}^{-1}(e_{t-1}^1) = e_t^1$, 即 $e_t^1 \in G_r(C)$. 而 $W_1 \subseteq G_l(C) \cup C$, 又与断言矛盾.

情况 4 $e_1^1 \notin C$, $e_1^2 \in C$.

类似于情况 3, 这里就不再讨论了.

由于上述四种情况均不成立，进而说明 W_1 与 W_2 不可能同时包含在 C 的左图或右图中. 所以 $e^* \in [V_l^*, V_r^*]$, 那么 $C^* \subseteq [V_l^*, V_r^*]$. 至此，充分性得证.

必要性 由于 C^* 是图 G^* 的割, 则可令 $C^* = [V_1^*, V_2^*]$, 其中 $V_1^* = V^* \setminus V_2^*$. 因此 G 中的面迹被分成不相交的两部分 F_1 与 F_2, 其中 F_i 中的面迹对应于 V_i^* 中的节点 $(i = 1, 2)$. 令 $C = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_l e_l v_1$

首先，我们先证明圈 C 是双侧的. 假设 C 是单侧圈，其中只有 e_1 的符号为 -1. 则由 G^* 的定义可知，$\lambda^*(e_1^*) = -1$, $\lambda^*(e_i^*) = 1$, $i = 2 \cdots, l$. 设 W_1, W_2 是 G 中包含 e_1 的面迹，且分别对应于 G^* 中的节点 w_1, w_2, 因此，$e_1^* = w_1 w_2$. 不妨设 $w_1 \in V_1^*$, $w_2 \in V_2^*$, 那么 $W_1 \in F_1$, $W_2 \in F_2$. 由于 W_1 是面迹, 则 W_1 上必存在异与 e_1 的边 $\widetilde{e}_1$, 使得 $\lambda(\widetilde{e}_1) = -1$, 且 $\widetilde{e}_1$ 在 W_1 中仅出现一次. 令 U_1 是包含 $\widetilde{e}_1$ 的另一个面迹，u_1 是与之对应的 G^* 中的节点. 由于 $w_1 u_1 = \widetilde{e}_1^*$, 且 $\lambda^*(\widetilde{e}_1^*) = -1$, 则 $u_1 \notin V_2^*$, 即 $u_1 \in V_1^*$, 故而 $U_1 \in F_1$.

再对 U_1 重复上述过程，我们可以得到一个序列 $W_1 \widetilde{e}_1 U_1 \widetilde{e}_2 U_2 \cdots$, 其中 $\lambda^*(\widetilde{e}_i) = -1$, U_i, U_{i+1} 为包含 $\widetilde{e}_i$ 的两个面迹. 不难看出，该序列中的面迹都在集合 F_1 中. 由于 G 是有限图，则 W_2 必在该序列中，于是有 $W_2 \in F_1$. 因此 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, 与之前的假设矛盾，所以 C 必为双侧圈.

其次，我们要证 C 的左图与右图没有公共边. 否则，取 $G_l(C)$ 和 $G_r(C)$ 中的一段路 $P = x_0 \overline{e}_1 x_1 \overline{e}_2 \cdots x_{k-1} \overline{e}_k x_k$ 使得 x_0 与 x_k 为 C 上的节点，且 $\overline{e}_1$ 与 $\overline{e}_k$ 分别在圈 C 的左侧与右侧.

由于 $x_1 \notin C$, 那么所有经过节点 x_1 的面迹必为 F_1 或 F_2 的子集, 不妨设为 F_1 的子集. 同理，不难看出所有经过节点 $x_2, \cdots, x_{k-1}$ 的面迹也全都包含于 F_1 中. 特别地，包含边 $\overline{e}_k$ 的面迹也在 F_1 中. 由于包含边 $\overline{e}_1$ 的面迹属于 F_1, 而 $\overline{e}_1$ 在 C 的左侧，我们可以通过类似的方说明包含圈 C 左侧边的面迹全属于 F_1. 同理，由于 $\overline{e}_k$ 在圈 C 的右侧，用同样的方法可以说明包含圈 C 右侧边的面迹也全在 F_1 中. 综上，包含圈 C 上边的面迹都在 F_1 内，这与之前 F_1, F_2 的定义矛盾.

定理 6 上述 3 个问题在射影平面上嵌入图中有多项式算法求解.

证 运用 Ford-Fulkerson 算法可以求出射影平面上的任一个图 G 的最小边割 A, 而 G 在射影平面上的几何对偶图 G^* 中与 A 对应的边集 A^* 恰好是 G^* 中最短可分离圈，同时注意到：射影平面上任一可分离圈都是可收缩的，也是双侧的. 从而定理得证.

根据曲面上嵌入图的理论，当嵌入图的面宽度充分大时，在局部范围内就会产生平面图的特征. 注意到 Thomassen 的上述三个问题在平面 (和射影平面) 上都有多项式算法求解，因此，可以想象到，如果在一般曲面上我们将嵌入图的面宽度适当加大，则应该会体现出平面结构特征来. 基于这个思想，我们有以下的结果：

定理 7 G 为 Π 上的 2- 胞腔嵌入，G^* 是其几何对偶图. 如果 G 的面宽度大于 G^* 的边连通度，那么就存在多项式算法求出 G 在 Π 上的最短可收缩圈.

证 只需证明：如果 C^* 是 G^* 中的最短割，那么 C 是 G 中的可收缩圈. 首先，我们先证明 $G(C)$ 中一定没有度为 1 的节点. 假设存在 v 使得 $d_{G(C)}(v) = 1$. 设点 v 处的循环系统为 $\pi_v = (e_0, e_1, \cdots, e_k)$ (其中 $e_0 \in G(C)$), 点 v 处的面迹为 $W_i = \cdots e_i v e_{i+1} \cdots$, $i = 0, 1, \cdots k$ (记 $e_{k+1} = e_o$). 由此，得 G^* 中与面迹 W_i 对应的节点 w_i 可以构成一个圈

$w_0e_1^*w_1e_2^*\cdots e_k^*w_ke_0^*w_0$. 由于 C^* 是一个分离节点 w_0 与 w_k 的一个割，则一定存在 $t\in\{1,2,\cdots k\}$ 使得 $e_t^*\in C^*$, 即 $e_t\in C$. 故而与 $d_{G(C)}(v)=1$ 矛盾．因此，假设不成立，$G(C)$ 中一定有一个圈．

然后，我们可以证明 $G(C)$ 中的圈 X 一定可收缩，假设 X 是一个不可收缩圈，则 $fw(G)\le\ell(X)\le\ell(C)$, 这与已知的 G 的面宽度大于 G^* 的边连通度相矛盾．因此 C 中一定含有可收缩圈．

反之，由于可收缩圈 X 一定可分离，则由引理 5 得， X^* 为 G^* 的一个割．由 C^* 的最短性，可知 C 为可收缩圈，且必为最短的．任一可收缩圈均可分离，因此 C 也是 G 中的可分离圈．并且一定最短，否则与 C^* 是最短割矛盾．

参 考 文 献

[1] Ford L R Jr, Fulkerson D R. Maxmum Flow Through a Network. *Canad. J. Math.*, 1956, 8: 399–404

[2] Thomassen C. Embeddings of Graphs with no Short Noncontractible Cycles. *J. Combin. Theory* (Series B), 1990, 48: 155–177

[3] Mohar B, Thomassen C. Graphs on Surfaces. Maltimore: The Johns Hopkins University Press, 2001

Ford-Fulkerson Algorithm and Short Cycles in Embedded Graphs

ZHANG Yan REN Han

(*Mathematics Department of East China Normal University, Shanghai* 200062)

(*E-mail: hren@math.ecnu.edu.cn*)

Abstract It is Thomassen who firstly asked if there is a polynomial bounded algorithm for finding a shortest contractible cycle, a shortest separating cycle and a shortest two sided cycle in an embedded graphs.By an improved Ford-Fulkerson algorithm, we obtain a polynomially bounded algorithm for finding the shortest co-cycle. This implies the existence of a polynomially bounded algorithm to find a shortest contractible cycle, a shortest separating cycle, and shortest cycle in an embedded graph in the projective plane and answers the open problems raised by Mohar and Thomassen in the case of projective plane embedded graph. We also show that for a fixed surface S, if the face-width of an embedded graph G in S is large enough, then there exists a polynomially bounded algorithm to find a shortest contractible cycle in G.

Key words co-cycle; separating cycle; contractible cycle; twosided cycle

MR(2000) Subject Classification 05C10; 05C40

Chinese Library Classification O175.8