Klein-Gordon-Zakharov 系统中的交叉强制变分方法 *

甘在会

(四川师范大学数学与软件科学学院，成都 610068)

(E-mail: ganzaihui2008cn@yahoo.com.cn)

摘　要　本文我们提出一类交叉强制变分方法来研究二维空间中的 Klein-Gordon-Zakharov 系统的整体解. 首先，通过构造交叉强制变分问题，建立发展流的交叉不变流形，得到所研究系统解爆破和整体存在的一个最佳条件. 其次，利用这个结论，我们回答了如下问题：当初值为多小时，所研究系统的整体解存在.

关键词　Klein-Gordon-Zakharov 系统；交叉强制变分方法；最佳条件；整体解；爆破

MR(2000) 主题分类　35A15; 35L05

中图分类　O175.27

1　引言

考虑二维空间中 Klein-Gordon-Zakharov 系统的柯西问题：

$$u_{tt}-\triangle u+u=-nu,\qquad t>0,\quad x\in R^2, \tag{1.1}$$

$$n_t+\nabla\cdot V=0,\qquad t>0,\quad x\in R^2, \tag{1.2}$$

$$V_t+\triangledown n+\triangledown|u|^2=0,\qquad t>0,\quad x\in R^2, \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} u(0,x)=u_0(x), & u_t(0,x)=u_1(x), \qquad x\in R^2,\\ n(0,x)=n_0(x), & V(0,x)=v_0(x), \qquad x\in R^2, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $u=u(t,x)$ 是一个未知复值矢量函数， $n=n(t,x)$ 是一个未知实值标量函数，$V=V(t,x)$ 是一个未知实值矢量函数. 系统 (1.1)–(1.3) 描述了高频等离子区域中朗谬尔波与离子声波的相互作用 [1−3]. 在等离子物理中，对强朗谬尔扰动的动力学行为的理论研究中，各种类型的 Zakharov 方程起着非常重要的作用 [2,4−6]. 对三维空间中的 Klein-Gordon-Zakharov 系统的研究，已有了一些工作 [5−9]. 一方面， Ozawa, Tsutaya 和 Tsutsumi[7] 利用 Shatah[10] 中引进的范数形式方法研究了 Klein-Gordon-Zakharov 系统的柯西问题, 证明了当初值充分小时, 该系统存在唯一的整体解, 并且当 $t\to\infty$ 时, 这些整体解渐近地趋于自由解；Tsutaya[6] 避开零条件技术，而利用不变 Sobolev 空间，证明了 Klein-Gordon-Zakharov 系统小初值整体解的存在性, 并且改进了对初值的正则性要求. 另一方面，Ozawa, Tsutaya 和 Tsutsumi[5] 证明了 Klein-Gordon-Zakharov 系统中, 由于朗谬尔波与离子声波传播速度的不同产生了该系统的柯西问题在空间 $H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times$

本文 2008 年 1 月 2 日收到.

* 国家自然科学基金 (10771151, 10726034), 四川省青年科技基金 (07ZQ026-009) 资助项目.

$L^2(R^2)\times L^2(R^2)$ 中关于时间的局部适定性，利用这些结果及其能量守恒，在该文中他们还得到 Klein-Gordon-Zakharov 系统在能量空间中小初值整体解的存在唯一性． Gan 和 Zhang[8] 利用精妙的变分讨论证明了 Klein-Gordon-Zakharov 系统具基态的驻波的存在性, 并利用 Pagne 与 Sattinger[11] 中的势井方法与 Levine[12] 中的凹方法, 证明了该驻波的不稳定性．最近， Ohta 与 Todorova[13] 研究了二维和三维空间中 Klein-Gordon-Zakharov 系统驻波解的不稳定性．此外， Zhang 和 Gan[3] 证明了三维 Klein-Gordon-Zakharov 系统柯西问题整体解存在的一个最佳条件． Guo 和 Yuan[14] 利用所谓的连续方法及精妙的先验估计，在没有柯西初值充分小的假设下，得到了二维 Klein-Gordon-Zakharov 系统与初值问题整体光滑解的存在性和唯一性.

本文，我们将引入一类交叉强制变分方法来研究 Klein-Gordon-Zakharov 系统的柯西问题 (1.1)–(1.4) 的解爆破和整体存在的最佳条件．首先，我们构造一类交叉强制变分问题, 导出它的一些性质, 然后将它应用到 Klein-Gordon-Zakharov 系统 (1.1)–(1.3). 通过研究在柯西问题 (1.1)–(1.4) 生成流下的交叉不变流形，我们得到了柯西问题 (1.1)–(1.4) 的解爆破和整体存在的最佳条件，并且回答了" 当初值为多小时，柯西问题 (1.1)–(1.4) 的整体解存在" 这个问题.

为了简便，本文用 $\int\cdot\,\mathrm{d}x$ 表示 $\int_{R^2}\cdot\,\mathrm{d}x$, 且作如下假设：

(A1): 存在一个实值矢量函数 $g(t,x)$ 使得 $g_t(t,x)=V(t,x)$.

2 交叉强制变分问题

利用 Ozawa, Tsutaya 和 Tsutsumi[5] 与 Guo 和 Yuan[14] 中的思想，可得到柯西问题 (1.1)–(1.4) 在能量空间中的局部适定性，即

命题 2.1 任意 $(u_0,u_1,n_0,v_0)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$, 柯西问题 (1.1)–(1.4) 存在一个唯一解 $(u,u_t,n,V)\in C([0,T_{max});H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2))$, 且满足能量守恒

$$E(u,u_t,n,V)=E(u_0,u_1,n_0,v_0),\tag{2.1}$$

其中,

$$\begin{aligned}E(u,u_t,n,V)=&\int_{R^2}|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int_{R^2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{R^2}|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{R^2}|n|^2\,\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}\int_{R^2}|V|^2\,\mathrm{d}x+\int_{R^2}n|u|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.2}$$

对于 $(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$, 我们定义如下的泛函及流形.

$$J(\phi,\psi,\varphi):=\int|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x,\tag{2.3}$$

$$K(\phi,\psi,\varphi):=2\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+2\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x,\tag{2.4}$$

$$I(\phi,\psi,\varphi):=2\int|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x,\tag{2.5}$$

$$R(\phi,\psi,\varphi):=2\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+2\int|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+3\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x,\tag{2.6}$$

$$N:=\big\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2),K(\phi,\psi,\varphi)=0,(\phi,\psi)\neq(0,0)\big\},\tag{2.7}$$

$$M:=\big\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2),K(\phi,\psi,\varphi)<0,I(\phi,\psi,\varphi)=0\big\}.\tag{2.8}$$

根据 Sobolev 嵌入定理，如上泛函是适定的．于是我们可以得到

引理 2.1 M 是一个非空集.

证 由 Gan 和 Zhang[8] 知, 存在 $(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$ 且 $(\phi,\psi)\neq(0,0)$ 使得

$$2\int|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+2\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+3\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x=0, \tag{2.9}$$

且 (ϕ,ψ,φ) 是如下系统的一个解:

$$\begin{cases}-\triangle\phi+\phi=-\psi\phi,\\ \nabla\cdot\varphi=0,\\ -\nabla\psi=\nabla|\phi|^2.\end{cases} \tag{2.10}$$

令 $\phi_\beta(x)=\phi(x/\beta)$, $\psi_\beta(x)=\psi(x/\beta)$ 及 $\varphi_\beta(x)=\varphi(x/\beta)$, 于是可得

$$(dJ(\phi_\beta,\psi_\beta,\varphi_\beta))/(d\beta)|_{\beta=1}=0,$$

即

$$2\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+2\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x=K(\phi,\psi)=0,$$

于是 $K(\phi,\psi,\varphi)=0$. 故由 (2.9) 可得 $I(\phi,\psi,\varphi)=0$. 现在利用 $K(\phi,\psi,\varphi)=0$ 及 $I(\phi,\psi,\varphi)=0$, 且 $(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$, $(\phi,\psi)\neq(0,0)$, 令 $\phi_\lambda(x)=\lambda\phi(\lambda x)$, $\psi_\lambda(x)=\lambda^2\psi(\lambda x)$ 及 $\varphi_\lambda(x)=\lambda^2\varphi(\lambda x)$, 于是有 $(\phi_\lambda,\psi_\lambda,\varphi_\lambda)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$, $(\phi_\lambda,\psi_\lambda)\neq(0,0)$ 且存在 $\lambda>1$ 使得

$$K(\phi_\lambda,\psi_\lambda,\varphi_\lambda)=2\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+\lambda^2\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+2\lambda^2\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x<0,$$

及

$$I(\phi_\lambda,\psi_\lambda,\varphi_\lambda)=2\lambda^2\int|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\lambda^2\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

于是 $(\phi_\lambda,\psi_\lambda,\varphi_\lambda)\in M$, 引理 2.1 得证.

现在定义两个强制变分问题为

$$d_N:=\inf_{(\phi,\psi,\varphi)\in N}J(\phi,\psi,\varphi), \tag{2.11}$$

$$d^*:=\inf_{(\phi,\psi,\varphi)\in B}J(\phi,\psi,\varphi), \tag{2.12}$$

其中 $B=\big\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2),R(\phi,\psi,\varphi)=0,(\phi,\psi)\neq(0,0)\big\}$, 及再定义一个交叉强制变分问题为

$$d_M:=\inf_{(\phi,\psi,\varphi)\in M}J(\phi,\psi,\varphi). \tag{2.13}$$

利用 Shatah[10], Gan 和 Zhang[8] 及 Zhang[15] 中的方法可得 $d_N>0$, $d^*>0$, $d_M>0$. 若令

$$d:=\min\{d_M,d_N,d^*\}, \tag{2.14}$$

于是可得 $d>0$. 由 (2.14), 定义一个交叉流形 S 为

$$S:=\big\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2), J(\phi,\psi,\varphi)<d,\\ K(\phi,\psi,\varphi)<0,\ I(\phi,\psi,\varphi)<0,\ (\phi,\psi)\neq(0,0)\big\}.$$

故如下结论成立.

引理 2.2 S 是一个非空流形.

证　由引理 2.1 的证明可知, 存在 $(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$, $(\phi,\psi)\neq(0,0)$ 使得 $K(\phi,\psi,\varphi)=0$ 及 $I(\phi,\psi,\varphi)=0$. 根据 (2.3)–(2.5) 知，存在 $\beta>1$ 使得

$$K(\beta\phi,\beta\psi,\beta\varphi)=2\beta^2\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+\beta^2\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+2\beta^3\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x<0,$$
$$I(\beta\phi,\beta\psi,\beta\varphi)=2\beta^2\int|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\beta^3\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x<0,$$
$$J(\beta\phi,\beta\psi,\beta\varphi)=\beta^2\int|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\beta^2\int|\phi|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\beta^2}{2}\int|\psi|^2\,\mathrm{d}x+\beta^3\int\psi|\phi|^2\,\mathrm{d}x<d.$$

于是 $(\beta\phi,\beta\psi,\beta\varphi)\in S$ 且 S 是一个非空流形.

引理 2.3 如果 $E(u_0,u_1,n_0,v_0)<d$, 那么 S 是在柯西问题 (1.1)-(1.4) 生成流下的不变流形.

证　令 $(u_0,n_0,v_0)\in S$, 则 $J(u_0,n_0,v_0)<d$, $K(u_0,n_0,v_0)<0$, $I(u_0,n_0,v_0)<0$ 且 $(u_0,n_0)\neq(0,0)$. 由命题 2.1 知, 存在 $(u(t,x),u_t(t,x),n(t,x),V(t,x))\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$ 使得 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))$ 是柯西问题 (1.1)–(1.4) 在 $[0,T)$ (T 为最大存在时间) 上的一个解. 由 (2.1), (2.2) 及 (2.3) 知

$$J(u,n,V)<E(u,u_t,n,V)=E(u_0,u_1,n_0,v_0)<d. \tag{2.15}$$

我们首先用反证法证明对 $\forall t\in[0,T)$, $K(u(t),n(t),V(t))<0$. 如果存在某个 t 使得 $K(u(t),n(t),V(t))\geq 0$, 那么由 $K(u(t),n(t),V(t))$ 的连续性知，必存在 $t_1\in(0,T)$ 使得 $K(u(t_1),n(t_1),V(t_1))=0$. 于是, 将 $J(u(t_1),n(t_1),V(t_1))$ 限制到 $K(u(t_1),n(t_1),V(t_1))=0$ 及 $(u(t_1),n(t_1))\neq(0,0)$ 上，由 (2.7) 和 (2.14) 可得 $J(u(t_1),n(t_1),V(t_1))\geq d_N\geq d$, 此与 (2.15) 矛盾．故对 $\forall t\in[0,T)$ 都成立 $K(u(t),n(t),V(t))<0$.

最后用反证法证明对 $\forall t\in[0,T)$, $I(u(t),n(t),V(t))<0$. 如果存在某个 t 使得 $I(u(t),n(t),V(t))\geq 0$, 那么由 $K(u(t),n(t),V(t))$ 的连续性知，必存在 $t_2\in(0,T)$ 使得 $I(u(t_2),n(t_2),V(t_2))=0$. 又因 $K(u(t_2),n(t_2),V(t_2))<0$, 故 $(u(t_2),n(t_2),V(t_2))\in M$. 因此由 (2.13) 和 (2.14) 可得 $J(u(t_2),n(t_2),V(t_2))\geq d_M\geq d$, 此与 (2.15) 矛盾．故对 $\forall t\in[0,T)$ 都成立 $I(u(t),n(t),V(t))<0$.

由上面的讨论可知，对 $\forall t\in[0,T)$, $(u(t),n(t),V(t))\in S$. 故引理 2.3 得证.

类似于引理 2.3 的证明可得

引理 2.4 令 $E(u_0,u_1,n_0,v_0)<d$. 若定义

$$S_+:=\big\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2), J(\phi,\psi,\varphi)<d, K(\phi,\psi,\varphi)<0,\\ I(\phi,\psi,\varphi)>0,\ R(\phi,\psi,\varphi)>0,\ (\phi,\psi)\neq(0,0)\big\},$$
$$S_-:=\big\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2), J(\phi,\psi,\varphi)<d,\ K(\phi,\psi,\varphi)<0,\\ I(\phi,\psi,\varphi)>0,\ R(\phi,\psi,\varphi)<0,\ (\phi,\psi)\neq(0,0)\big\},$$
$$K_+:=\big\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2),\ J(\phi,\psi,\varphi)<d,\ K(\phi,\psi,\varphi)>0\big\}\\ \cup\big\{(\phi,\psi)=(0,0)\big\},$$

则 S, S_+, S_- 及 K_+ 是在柯西问题 (1.1)–(1.4) 生成流下的不变流形.

由 S, S_+, S_-, K_+ 的定义及 (2.11)–(2.14), 我们可得如下结论:

引理 2.5

$$\left\{(\phi,\psi,\varphi)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2),\ J(\phi,\psi,\varphi)<d\right\}=S\cup S_+\cup S_-\cup K_+.$$

3 解爆破和整体存在的最佳条件

本节, 我们将研究 Klein-Gordon-Zakharov 系统的柯西问题 (1.1)–(1.4) 的解爆破和整体存在的最佳充分条件. 首先可得

定理 3.1 令 $(u_0,u_1,n_0,v_0)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$ 且满足 $E(u_0,u_1,n_0,v_0)<d$. 如果 $(u_0,n_0,v_0)\in S\cup S_-$, 那么柯西问题 (1.1)–(1.4) 的解 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))$ 在有限时间内爆破.

证 因为 $(u_0,n_0,v_0)\in S\cup S_-$, 故由引理 2.3 和引理 2.4 可得在 $t\in[0,T)$ 上, $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))\in S\cup S_-$. 于是

$$K(u,n,V)<0,\qquad R(u,n,V)<0, J(u,n,V)<d. \tag{3.1}$$

令

$$F(t)=2\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\int|g|^2\,\mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

则

$$F'(t)=\int[2(u_tu^*+uu_t^*)+2gg_t]\,\mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

这里 u^* 表示 u 的复共轭并且

$$\begin{aligned}F''(t)=&4\int|u_t|^2\,\mathrm{d}x+4\mathrm{Re}\int u_{tt}u^*\,\mathrm{d}x+2\int|g_t|^2\,\mathrm{d}x+2\int gg_{tt}\,\mathrm{d}x\\=&4\int|u_t|^2\,\mathrm{d}x+2\int|V|^2\,\mathrm{d}x-4\int|u|^2\,\mathrm{d}x-4\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&-4\int n|u|^2\,\mathrm{d}x+2\int g(-\nabla n-\nabla|u|^2)\,\mathrm{d}x\\=&2\Big(2\int|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int|V|^2\,\mathrm{d}x\Big)-2K(u,n,V)-2I(u,n,V).\end{aligned} \tag{3.4}$$

根据 (3.1) 和 (3.4) 可得

$$\text{对任意}\ \ t\in[0,T),\qquad F''(t)>0. \tag{3.5}$$

又根据 (2.1), (2.2) 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}F''(t)=&5\Big(2\int|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int|V|^2\,\mathrm{d}x\Big)+2\int|u|^2\,\mathrm{d}x+2\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\&+\int|n|^2\,\mathrm{d}x-6E(u_0,u_1,n_0,v_0).\end{aligned} \tag{3.6}$$

由 (3.5) 知, $F(t)$ 是 t 的凸函数, 于是若存在某个 t_1 使得 $F'(t)|_{t=t_1}>0$, 那么在存在区间之内, 对任意 $t>t_1$, $F(t)$ 是逐渐增加的, 故 $2\int|u|^2\,\mathrm{d}x+2\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int|n|^2\,\mathrm{d}x-$

$6E(u_0,u_1,n_0,v_0)$ 将最终变为正，且随后将保持为正. 于是当 t 充分大时，由 (3.1) 和 (3.6) 可得

$$F''(t)\geq 5(2\int |u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int |V|^2\,\mathrm{d}x). \tag{3.7}$$

根据 (3.2), (3.3) 及 (3.7), 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
F(t)F''(t)\geq & 5\Big(2\int |u|^2\,\mathrm{d}x+\int |g|^2\,\mathrm{d}x\Big)\Big(2\int |u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int |V|^2\,\mathrm{d}x\Big)\\
=&5(4\int |u^*|^2\,\mathrm{d}x\int |u_t|^2\,\mathrm{d}x+2\int |u|^2\,\mathrm{d}x\int |V|^2\,\mathrm{d}x.\\
&+2\int |u_t|^2\,\mathrm{d}x\int |g|^2\,\mathrm{d}x+\int |g|^2\,\mathrm{d}x\int |V|^2\,\mathrm{d}x\Big)\\
\geq & 5\Big(4\Big(\int |u^*u_t|\,\mathrm{d}x\Big)^2+2\Big(\int |uV|\,\mathrm{d}x\Big)^2+2\Big(\int |u_tg|\,\mathrm{d}x\Big)^2+\Big(\int |gV|\,\mathrm{d}x\Big)^2\Big)\\
\geq & \frac{5}{4}(F'(t))^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

因为

$$\Big(F^{-\frac14}(t)\Big)''=-\frac14 F^{-\frac94}(t)\Big(F(t)F''(t)-\frac54(F'(t))^2\Big),$$

由 (3.8) 可得 $(F^{-\frac14}(t))''\leq 0$. 因此，对充分大的 t, $F^{-\frac14}(t)$ 是凹的，由此可知存在有限时间 T^* 使得

$$\lim_{t\to T^*}F^{-\frac14}(t)=0,$$

即

$$\lim_{t\to T^*}F(t)=0.$$

故存在 $T<\infty$ 使得 $\lim\limits_{t\to T}(\int |u|^2\,\mathrm{d}x+\int |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int |g|^2\,\mathrm{d}x)=\infty$. 下面我们用反证法证明如下结论来完成定理 3.1 的证明.

结论 3.1 存在某个 t 使得 $F'(t)>0$.

证 假设对任意 t,

$$F'(t)\leq 0. \tag{3.9}$$

于是，因 $F(t)>0$ 且 $F(t)$ 是 t 的凸函数，当 $t\to\infty$ 时， $F(t)$ 必趋于一个有限的，非负的极限 L. 由引理 2.3 及引理 2.4, 我们可断言 $L>0$. 所以，当 $t\to\infty$ 时可得

$$F(t)\to L>0,\qquad F'(t)\to 0,\qquad F''(t)\to 0.$$

于是由 (3.4) 可得

$$\lim_{t\to\infty}2\Big(2\int |u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int |V|^2\,\mathrm{d}x\Big)=0, \tag{3.10}$$

且当 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))\in S$ 时,

$$\lim_{t\to\infty}K(u,n,V)=0,\qquad \lim_{t\to\infty}I(u,n,V)=0, \tag{3.11}$$

当 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))\in S_-$ 时,

$$\lim_{t\to\infty}R(u,n,V)=0. \tag{3.12}$$

下面我们分两种情形继续结论 3.1 的证明.

情形 1 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))\in S$.

对任意固定的 $t>0$, 令 $u_\lambda(x)=u(x/\lambda)$, $n_\lambda(x)=n(x/\lambda)$ 及 $V_\lambda(x)=V(x/\lambda)$, 由 (2.4) 和 (2.5) 知,

$$K(u_\lambda,n_\lambda,V_\lambda)=2\lambda^2\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\lambda^2\int|n|^2\,\mathrm{d}x+2\lambda^2\int n|u|^2\,\mathrm{d}x, \tag{3.13}$$

$$I(u_\lambda,n_\lambda,V_\lambda)=2\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\lambda^2\int n|u|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

因 $I(u,n,V)<0$, 由 (3.14) 知，存在 $\lambda^*\in(0,1)$ 使得 $I(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})=0$ 且当 $\lambda\in(\lambda^*,1)$ 时， $I(u_\lambda,n_\lambda,V_\lambda)<0$. 对 $\lambda\in[\lambda^*,1]$, 因为 $K(u,n,V)<0$, $K(u_\lambda,n_\lambda,V_\lambda)<0$, 所以 $I(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})=0$ 且 $K(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})<0$. 又根据 (2.11) 和 (2.14) 可得到

$$J(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})\geq d_M\geq d. \tag{3.15}$$

另一方面，由 $K(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})<0$ 可得

$$\begin{aligned}
J(u,n,V)-J(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})=&\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac12\int|n|^2\,\mathrm{d}x\\
&+\int n|u|^2\,\mathrm{d}x-\Big(\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\lambda^{*2}\int|u|^2\,\mathrm{d}x\Big)\\
&-\Big(\frac12\lambda^{*2}\int|n|^2\,\mathrm{d}x+\lambda^{*2}\int n|u|^2\,\mathrm{d}x\\
=&\int|u|^2\,\mathrm{d}x-\lambda^{*2}\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac12\int|n|^2\,\mathrm{d}x\\
&-\frac12\lambda^{*2}\int|n|^2\,\mathrm{d}x+\int n|u|^2\,\mathrm{d}x-\lambda^{*2}\int n|u|^2\,\mathrm{d}x\\
=&\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac12\int|n|^2\,\mathrm{d}x+\int n|u|^2\,\mathrm{d}x-\frac12K(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})\\
\geq&\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac12\int|n|^2\,\mathrm{d}x+\int n|u|^2\,\mathrm{d}x\\
=&\frac12K(u,n,V).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

因此，由 (2.11), (2.13), (2.14), (3.11) 及 (3.16) 可得，当 $t\to\infty$ 时，

$$J(u,n,V)\geq J(u_{\lambda^*},n_{\lambda^*},V_{\lambda^*})\geq d,$$

此与 $J(u,n,V)<d$ 矛盾.

情形 2 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))\in S_-$. 对任意固定的 $t>0$, 因为 $R(u,n,V)<0$, 所以存在 $0<\mu<1$ 使得 $R(\mu u,\mu n,\mu V)=0$. 此外，我们容易得到

$$J(u,n,V)-J(\mu u,\mu n,\mu V)\geq\frac12R(u,n,V). \tag{3.17}$$

由 (2.12), (2.14), (3.12) 及 (3.17), 我们可以得到

$$J(u,n,V)\geq J(\mu u,\mu n,\mu V)\geq d^*\geq d,$$

此与 $J(u,n,V)<d$ 矛盾.

由情形 1 和情形 2 的证明知，假设 (3.9) 不成立，故结论 3.1 成立．于是，定理 3.1 得证.

下面我们给出 Klein-Gordon-Zakharov 系统的柯西问题 (1.1)–(1.4) 整体解存在的一个充分条件.

定理 3.2 令 $(u_0,u_1,n_0,v_0)\in H^1(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)\times L^2(R^2)$ 且满足 $E(u_0,u_1,n_0,v_0)<d$. 如果 $(u_0,n_0,v_0)\in S_+\cup K_+$, 那么柯西问题 (1.1)–(1.4) 的解 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))$ 在 $t\in[0,\infty)$ 上整体存在.

证 我们将分两步来证明这个定理.

步骤 1 令 $(u_0,n_0,v_0)\in K_+$, 由引理 2.4 可得, 对 $\forall t\in[0,T)$ 有 $(u(t,x),n(t,x),V(t,x))\in K_+$, 于是有 (1) $(u,v)=(0,0)$ 或者 (2) $J(u,n,V)<d$, $K(u,n,V)>0$. 当 $(u,v)=(0,0)$ 时，定理结论显然成立．当 (2) 成立时，由 $J(u,n,V)<d$ 和 $K(u,n,V)>0$ 可得 $(u,n)\neq(0,0)$ 且

$$\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x<d. \tag{3.18}$$

因为 $K(u,n,V)>0$, 所以 $\int n|u|^2\,\mathrm{d}x$ 有两种情形：i) $\int n|u|^2\,\mathrm{d}x\geq 0$ 及 ii) $\int n|u|^2\,\mathrm{d}x<0$.

当 i) $\int n|u|^2\,\mathrm{d}x\geq0$ 时，由 $J(u,n,V)<d$ 可得

$$\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\int|n|^2\,\mathrm{d}x<d. \tag{3.19}$$

当 ii) $\int n|u|^2\,\mathrm{d}x<0$ 时，可令 $u_\alpha(x)=\alpha u(x), n_\alpha(x)=\alpha n(x)$ 及 $V_\alpha(x)=\alpha V(x)$, 于是 $K(u,n,V)>0$ 蕴涵着存在 $\alpha^*>1$ 使得

$$K(u_{\alpha^*},n_{\alpha^*},V_{\alpha^*})=2\alpha^{*2}\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\alpha^{*2}\int|n|^2\,\mathrm{d}x+2\alpha^{*3}\int n|u|^2\,\mathrm{d}x=0, \tag{3.20}$$

且

$$J(u_{\alpha^*},n_{\alpha^*},V_{\alpha^*})=\alpha^{*2}\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

根据 (3.20) 和 (3.21) 可得 $(u_{\alpha^*},n_{\alpha^*},V_{\alpha^*})\in N$ 且

$$J(u_{\alpha^*},n_{\alpha^*},V_{\alpha^*})\geq d_N\geq d>J(u,n,V). \tag{3.22}$$

于是 $J(u,n,V)-J(u_{\alpha^*},n_{\alpha^*},V_{\alpha^*})<0$, 即

$$\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int|n|^2\,\mathrm{d}x+\int n|u|^2\,\mathrm{d}x-\alpha^{*2}\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x<0. \tag{3.23}$$

又由 (3.20) 可推知

$$\int n|u|^2\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\alpha^*}\int\Big(|u|^2+\frac{1}{2}|n|^2\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

利用 (3.23) 和 (3.24) 可得

$$\Big(1-\frac{1}{\alpha^*}\Big)\int\Big(|u|^2+\frac{1}{2}|n|^2\Big)\,\mathrm{d}x<\Big(\alpha^{*2}-1\Big)\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.25}$$

因此，(3.18), (3.19), (3.25) 及其 $\alpha^* > 1$ 蕴涵着

$$\int |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int |u|^2 \,\mathrm{d}x + \int |n|^2 \,\mathrm{d}x < C,$$

其中 C 表示不同的正常数. 因此，由命题 2.1 可得，(u, n, V) 在 $t \in [0, \infty)$ 上整体存在.

步骤 2 令 $(u_0, n_0, V_0) \in S_+$, 由引理 2.4 知, 对 $\forall t \in [0, T)$ 可得 $(u(t, x), n(t, x), V(t, x)) \in S_+$, 即 $J(u, n, V) < d$, $K(u, n, V) < 0$, $I(u, n, V) > 0$ 且 $R(u, n, V) > 0$. 于是,

$$2\int |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int |u|^2 \,\mathrm{d}x + \int |n|^2 \,\mathrm{d}x + 3\int n|u|^2 \,\mathrm{d}x > 0. \tag{3.26}$$

又由 $J(u, n, V) < d$ 及 (3.23) 可得

$$\frac{1}{3}\int |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int |u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int |n|^2 \,\mathrm{d}x \leq J(u, n) < d. \tag{3.27}$$

故命题 2.1 蕴涵着 (u, n, V) 在 $t \in [0, \infty)$ 上整体存在.

因此，利用步骤 1 和步骤 2 的讨论，定理 3.2 得证.

利用定理 3.1, 定理 3.2 及引理 2.5 可得到 Klein-Gordon-Zakharov 系统解爆破的一个充分必要条件.

定理 3.3 令 $(u_0, n_0, u_1, v_0) \in H^1(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2)$ 且满足 $E(u_0, n_0, u_1, v_0) < d$, 则柯西问题 (1.1)–(1.4) 的解在有限时间内爆破当且仅当 $(u_0, n_0, v_0) \in S \cup S_-$.

此外, 利用定理 3.2, 我们可得到 Klein-Gordon-Zakharov 系统的柯西问题 (1.1)–(1.4) 整体解存在的另一个充分条件.

推论 3.1 若 $(u_0, n_0, u_1, v_0) \in H^1(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2) \times L^2(R^2)$ 满足

$$\|u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|n_0\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2(R^2)} < d, \tag{3.28}$$

那么柯西问题 (1.1)–(1.4) 的解在 $t \in [0, \infty)$ 上整体存在.

证　由 (3.28) 可得 $J(u_0, n_0, v_0) < d$ 且 $E(u_0, n_0, u_1, v_0) < d$. 此外，我们可断言 $K(u_0, n_0, v_0) > 0$. 否则, 存在 $0 < \lambda \leq 1$ 使得 $K(\lambda u_0, \lambda n_0, \lambda v_0) = 0$, 由此知 $J(\lambda u_0, \lambda n_0, \lambda v_0) \geq d$.

另一方面，由 (3.28) 可得

$$\begin{aligned}
&\|\lambda u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|\lambda n_0\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2(R^2)} \\
=&\lambda^2\|u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\lambda^2\|n_0\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2(R^2)} \\
<&\|u_0\|^2_{H^1(R^2)} + \frac{1}{2}\|n_0\|^2_{L^2(R^2)} + \|u_1\|^2_{L^2(R^2)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2(R^2)} < d.
\end{aligned}$$

由此知 $J(\lambda u_0, \lambda n_0, \lambda v_0) < d$, 此与 $J(\lambda u_0, \lambda n_0, \lambda v_0) \geq d$ 矛盾，因此有 $(u_0, n_0, v_0) \in K_+$. 再由定理 3.2 可知推论 3.1 的结论成立.

参 考 文 献

[1] Dendy R O. Plasma Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 1990

[2] Thornhill S G, Haar D.ter. Langmuir Turbulence and Modulational Instability. *Phys. Reports* (Sect. C of Phys. Lett.), 1978, 43: 43–99

[3] Zakharov V E. Collapse of Langmuir Waves. *Sov. Phys. JETP*, 1972, 35: 908–914

[4] Guo B. Global Smooth Solution for the System of Zakharov Equations in Nonhomogeneous Medium. *Northeastern Math. J.*, 1990, 6: 379–390

[5] Ozawa T, Tsutaya K, Tsutsumi Y. Well-posedness in Energy Space for the Cauchy Problem of the Klein-Gordon-Zakharov Equations with Different Propagation Speeds in Three Space Dimensions. *Math. Annalen.*, 1999, 313: 127–140

[6] Tsutaya K. Global Existence of Small Amplitudes Solutions for the Klein-Gordon-Zakharov Equations. *Nonlinear Anal. TMA*, 1996, 27(12): 1373–1380

[7] Ozawa T, Tsutaya K, Tsutsumi Y. Normal Form and Global Solutions for the Klein-Gordon-Zakharov Equations. *Annales De L'I. H. P.* (Section C), 1995, 12(4): 459–503

[8] Gan Z, Zhang J. Instability of Standing Waves for Klein-Gordon-Zakharov Equations with Different Propagation Speeds in Three Space Dimensions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, 307: 219–231

[9] Zhang J, Gan Z. Sharp Conditions of Global Existence for Klein-Gordon-Zakharov Equations in Three Space Dimensions. *Advances in Mathematics*, 2005, 34(2): 241–244

[10] Shatah J. Normal Forms and Quadratic Nonlinear Klein-Gordon Equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1985, 38: 685–696

[11] Payne L E, Sattinger D H. Saddle Points and Instability of Nonlinear Hyperbolic Equations. *Israel J. Math.*, 1975, 22(3-4): 273–303

[12] Levine H A. Instability and Non-Existence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, 192: 1–21

[13] Ohta M, Todorova G. Strong Instability of Standing Waves for the Nonlinear Klein-Gordon Equation and the Klein-Gordon-Zakharov System. *SIAM J. Math. Anal.*, 2007, 38(6): 1912–1931

[14] Guo B, Yuan G. Global Smooth Solution for the Klein-Gordon-Zakharov Equations. *J. Math. Phys.*, 1995, 36(8): 4119–4124

[15] Zhang J. Sharp Threshold for Blowup and Global Existence in Nonlinear Schrödinger Equations under a Harmonic Potential. *Commun. in PDE*, 2005, 30: 1429–1443

A Cross-Constrained Variational Method in the Klein-Gordon-Zakharov System

GAN Zaihui

(*College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu* 610068)

(*E-mail: ganzaihui2008cn@yahoo.com.cn*)

Abstract In this paper, we present a cross-constrained variational approach to study the global solutions of the Klein-Gordon-Zakharov system in two space dimensions. By constructing a type of cross constrained variational problem and establishing so-called cross-invariant manifolds of the evolution flow, we first derive a sharp threshold of global existence and blowup, then we answer the question that how small the initial data are for the global solutions to exist.

Key words Klein-Gordon-Zakharov system; cross-constrained variational method; sharp threshold; global existence; blowup

MR(2000) Subject Classification 35A15; 35L05

Chinese Library Classification O175.27