第 31 卷 第 5 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 31 No. 5
2008 年 9 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Sep., 2008

高亏格曲面上地图的计数

许　燕

(天津工业大学理学院，天津 300160)

(E-mail: xu_yanr@163.com)

摘　要　本文给出了可定向曲面 (亏格 2, 3) 和不可定向曲面 (亏格 5) 上根瓣丛以边数为参数时相应的计数显式．与此同时，考虑一类与瓣丛拓扑等价的地图类：(无环，简单) 近 2- 正则地图，通过一种组合方法，给出了多参数下平面近 2- 正则地图的计数显式，亦得到了任意亏格曲面上该类地图的具体个数.

关键词　根地图；计数函数；参数表达式；瓣丛；近 2- 正则地图

MR(2000) 主题分类　05C10; 05C30

中图分类　O157.5

1　引言

从几何直观上讲，一个 地图 就是图在某曲面上的一个 2- 胞腔嵌入．这里所说的 曲面 就是无边缘的 2- 维紧流形．带有 p 个手柄 (或 q 个交叉帽) 的曲面，即 O_p(或 N_q) 被称为 亏格为 p(或 q) 的可定向曲面 (或不可定向曲面). 一个图 G 在曲面 S 上的 2- 胞腔嵌入 是指 G 能画在 S 上使得边与边的交点只可能是 G 的顶点，且 G 在 S 上的补 $S-G$ 的每一个连通分支都拓扑等价于开圆盘．如果将地图中的一条边指定一个方向，那么该边称为 根边, 根边的始端称为 根点, 与根边关联的一个面称为 根面. 二个带根地图 M_1 和 M_2, 当存在一个同构使得它们的根相对应时，才称它们是 同构的; 否则，称为 非同构的. 两个地图是同构的当且仅当他们的对偶地图亦同构．所谓 地图计数 就是要确定在给定条件下非同构地图的数目 (研究给定条件下安置事物的方法数). 未解释的术语，读者可参见 [1] 或 [2].

平面地图计数首先是由 Tutte W T[3,4] 在 20 世纪 60 年代初提出并着手研究的．当时他具有开创性的研究工作奠定了地图计数理论的基础．之后， Brown W G, Mullin R C, Harary F, Tutte, 刘彦佩 [1,2,5], Bender E A 等人对此领域做了进一步的研究与推广，几乎涉及到了各种类型的平面地图计数问题．然而，对任何一类非平面地图的精确计算都是不容易的．二十世纪六十年代中期， Brown W T 和 Tutte W T 首先计算了一类非平面地图．随后，诸多学者，如 Bender E A[6], Canfield E R, Robinson R W, 刘彦佩以及 Gao 等人在本领域均做了大量有创造性的工作.

一个 瓣丛 就是这样一个地图，它只有一个顶点，或者说所有棱都是自环．在亏格为 g 的曲面上，一个瓣丛的对偶地图就是 单面地图, 亦或者是 g- 本质地图. 一个球面 (平面) 上的瓣丛即是环束，同样一个球面 (平面) 上的单面地图即是平面树．很明显，瓣丛或单面地图均是地图类里最简单的，对之进行详细的研究，从中发现规律可以为更一般的地图类的研究奠定基础．一 2- 正则地图 就是这样一个地图，使得它所有节点的

本文 2008 年 5 月 14 日收到．2008 年 7 月 20 日收到修改稿.

次均为 2. 所谓 近 *2*- 正则地图 是指除一个节点可能次不是 2 外，其他节点次均为 2. 这个例外的节点总规定为根节点．显然，一个近 2- 正则地图的对偶为近二边剖分地图 [7].

1972 年， Walsh 和 Lehman 首先计算了任意亏格可定向曲面上单面地图 (单点地图) 在给定边数下的具体数目．之后，刘彦佩， Didier Arquès, Alain Giorgetti, 任韩 [8], 郝荣霞 [9], 李赵祥 [10] 等等均对瓣丛，单面地图或 g- 本质地图进行过详细的讨论，尤其在不可定向曲面上，取得了很大的进展．但是，目前对于这些地图类的精确计算，尤其在不可定向曲面上，往往主要集中在小亏格曲面上或者是只含有一个参数 (边数) 的情况下，而且结果比较繁琐.

本文中, 我们将曲面亏格提高, 基于 [11] 中的结果, 给出了根瓣丛在可定向 (亏格 2, 3) 及不可定向 (亏格 5) 曲面上的计数显式．由于瓣丛与单面地图之间是一一对应的，因此，可以知道相对应的单面地图 (g- 本质地图) 非同构地图的数目．对于平面近 2- 正则地图和射影平面上近二剖分地图，郝荣霞 [9] 和李赵祥分别对之进行了讨论，但均是用的经典的解析方法．在此，我们通过发现在任意亏格曲面上近 2- 正则地图与瓣丛之间的一种关系，通过一个很简单的组合数将二者联系在一起，利用根瓣丛的结果，相应的曲面上 (无环，简单) 近 2- 正则地图的数目亦可以得出，且比已有结果更为简洁直观.

在此，我们依然延续 [11] 中的符号记法．令 $\mathcal{O}_p$ 和 $\mathcal{N}_q$ 分别为可定向曲面 O_p 和不可定向曲面 N_q 上所有根瓣丛的集合．它们的计数函数分别为：

$$g_p(x,y)=\sum_{M\in\mathcal{O}_p}x^{m(M)}y^{n(M)}=\sum_{m,n\geq 0}G^p_{m,n}x^my^n;$$
$$f_q(x,y)=\sum_{M\in\mathcal{N}_q}x^{m(M)}y^{n(M)}=\sum_{m,n\geq 1}F^q_{m,n}x^my^n.$$

其中， $p\geq 0$, $q\geq 1$, $m(M)$ 和 $n(M)$ 分别为地图 M 的根面次和边数.

并且，令 $\mathcal{D}^p_i$ $(p\geq 0)$ 和 $\mathcal{L}^q_i$ $(q\geq 1)$ 分别为可定向曲面 O_p 和不可定向曲面 N_q 上所有带 i $(i\geq 0)$ 个被标识非根面根瓣丛的集合.

记 $i\geq 1$ 时,

$$\underline{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_i),\qquad \widetilde{\underline{z}}=(z_1,\cdots,z_i,z_{i+1}),$$

以及

$$\dot{\underline{z}}=(z_1,\cdots,z_{j-1},z_{j+1},\cdots,z_i).$$

$\mathcal{D}^p_i$ 和 $\mathcal{L}^q_i$ $(i\geq 1)$ 的计数函数分别为：

$$D^p_i(x,y,\underline{z})=\sum_{M\in\mathcal{D}^p_i}x^{m(M)}y^{n(M)}\underline{z}^{\underline{k}(M)}=\sum_{m,n,\underline{k}\geq 0}d^p_{m,n,\underline{k}}x^my^n\underline{z}^{\underline{k}};$$
$$L^q_i(x,y,\underline{z})=\sum_{M\in\mathcal{L}^q_i}x^{m(M)}y^{n(M)}\underline{z}^{\underline{k}(M)}=\sum_{m,n,\underline{k}\geq 1}l^q_{m,n,\underline{k}}x^my^n\underline{z}^{\underline{k}},$$

其中， $d^p_{m,n,\underline{k}}$ 和 $l^p_{m,n,\underline{k}}$ 分别为根瓣丛在集合 $\mathcal{D}^p_i$ 和 $\mathcal{L}^q_i$ 中根面次为 m, 边数 n 以及第 j 个被标识非根面次为 k_j $(j=1,\cdots,i)$ 的地图数目.

[11] 中主要结果列举如下：令

$$\gamma_q=\begin{cases}1, & q \text{ 为奇数;}\\ 0, & q \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

定理 1 计数函数 $D_i^p(x)=D_i^p(x,y,\underline{z})$ $(p\geq 0)$, $i=p=0$ 除外，满足如下方程：

$$\begin{aligned}(1-x+x^2y)D_i^p(x)=&xyD_i^{p^*}+(1-x)\sum_{j=1}^{i}xyz_j\delta_{z_j,x}(uD_{i-1}^p(u))\\&+(1-x)x^3y\frac{\partial D_{i+1}^{p-1}}{\partial z_{i+1}}(x,x),\end{aligned}\tag{1}$$

其中,

$$D_i^{p^*}=D_i^p(1),\qquad \delta_{z_j,x}(uD_{i-1}^p(u))=\frac{z_jD_{i-1}^p(z_j,y,\dot{\underline{z}})-xD_{i-1}^p(x,y,\dot{\underline{z}})}{z_j-x}$$

(见文献 [2] 中式 (1.6.7)).

定理 2 计数函数 $L_i^q(x)=L_i^q(x,y,\underline{z})$ $(q\geq 1)$ 满足如下方程：

$$\begin{aligned}(1-x+x^2y)L_i^q(x)=&\,xyL_i^{q^*}+(1-x)\sum_{j=1}^{i}xyz_j\delta_{z_j,x}(uL_{i-1}^q(u))\\&+(1-x)x^2y[(xL_i^{q-1}(x))'+\gamma_q(xD_i^{\frac{q-1}{2}}(x))']\\&+(1-x)x^3y[2\frac{\partial L_{i+1}^{q-2}}{\partial z_{i+1}}(x,x)+\gamma_{q+1}\frac{\partial D_{i+1}^{\frac{q}{2}-1}}{\partial z_{i+1}}(x,x)]\end{aligned}\tag{2}$$

其中， $L_i^{q^*}=L_i^q(1)$, $\delta_{z_j,x}(uL_{i-1}^q(u))=\dfrac{z_jL_{i-1}^q(z_j,y,\dot{\underline{z}})-xL_{i-1}^q(x,y,\dot{\underline{z}})}{z_j-x}$.

2 根瓣丛在高亏格曲面上

对于计数函数 $g_1(x,y)$, [11] 中已给出其参数表达式如下：

$$\begin{cases}\eta=y(\eta+1)^2, g_1^*=\dfrac{\eta^2(\eta+1)}{(1-\eta)^5}, x=\beta(\eta+1);\\ D_1^0=\dfrac{\beta\zeta\eta}{(1-\zeta\eta)(1-\eta)(1-\beta\eta)^2};\\ g_1=\dfrac{\beta\eta^3}{(1-\eta)^5(1-\beta)(1-\beta\eta)}+\dfrac{\beta^4\eta^2[1-\beta(\eta+1)]}{(1-\eta)(1-\beta)(1-\beta\eta)^5}.\end{cases}\tag{3}$$

在此，更进一步，基于方程 (1), 当 $p=0,1,2$ 对应 $i=2,1,0$ 时，再由式 (3), 可求得参数表达式如下：

$$\begin{cases}\eta=y(\eta+1)^2,\quad g_2^*=\dfrac{\eta^4(\eta+1)(21\eta^2+63\eta+21)}{(1-\eta)^{11}},\quad x=\beta(\eta+1);\\ g_2=\dfrac{\beta\eta^4}{(1-\eta)^4(1-\beta\eta)^4}\Big[\dfrac{(8\eta^2+54\eta+33)\beta^4\eta}{(1-\eta)^3(1-\beta\eta)^2}+\dfrac{(16\eta^2+63\eta+26)\beta^3\eta}{(1-\eta)^4(1-\beta\eta)}\\ \qquad+\dfrac{21(\eta^2+3\eta+1)\eta[(1+\beta)(1-3\beta\eta)+\beta^2(1+3\eta^2)]}{(1-\eta)^7}\\ \qquad+\dfrac{3(12\eta+13)\beta^5\eta}{(1-\eta)^2(1-\beta\eta)^3}+\dfrac{49\beta^6\eta}{(1-\eta)(1-\beta\eta)^4}+\dfrac{21\beta^7}{(1-\beta\eta)^5}\Big].\end{cases}\tag{4}$$

记

$$A_{m,n}(p,q,\lambda)=\sum_{i\geq 0}^{n-m-p}\frac{(i+q)!\lambda(i)}{q!i!}\binom{2n-m-1}{n-m-p-i}.$$

定理 3 双环面上根面次为 m 且边数为 n 的根瓣丛数目为 $G^2_{8,4}=21$

$$\begin{aligned}G^2_{m,n}&=21mA_{m,n}(6,9,1)+\frac{m}{2}A_{m,n}(5,8,\lambda_1)+\frac{m}{48}A_{m,n}(4,7,\lambda_2)\\&+\frac{m!}{48(m-2)!}A_{m,n}(3,6,\lambda_3)+\frac{m!}{240(m-3)!}A_{m,n}(2,5,\lambda_4)\\&+\frac{m!}{6!(m-4)!}A_{m,n}(1,5,\lambda_5)+\frac{m!}{600(m-5)!}A_{m,n}(0,4,\lambda_6)\\&+\frac{39m!}{6!(m-6)!}A_{m,n}(-1,4,1)+\frac{49m!}{7!(m-7)!}A_{m,n}(-2,3,1)\\&+\frac{21m!}{8!(m-8)!}A_{m,n}(-4,2,1),\end{aligned}\tag{5}$$

其中,

$$\begin{cases}\lambda_1(i)=21m+14i+105;\\\lambda_2(i)=168m^2+14i^2+189im+1008m+49i-168;\\\lambda_3(i)=9(i+7)(i+8)+72(i+7)(m-2)+32(m-2)(m-3);\\\lambda_4(i)=20(i+6)(i+7)+105(m-3)(i+6)+16(m-4)(m-3);\\\lambda_5(i)=130i+324m-516;\\\lambda_6(i)=33i+30m+15.\end{cases}$$

推论 1 双环面上具有 n 条边的根瓣丛 (或单面地图) 数目为

$$\sum_{i\geq 0}^{n-6}\frac{21(i+9)!(2n)!(5n^2-i^2+8n-10i-22)}{i!9!(n+i+6)!(n-i-4)!}+\frac{21(n+4)!(2n^2-4n-7)}{(n-4)!9!}.\tag{6}$$

由式 (5), 下面我们给出 $n\leq 8$ 时的情形.

$$\begin{aligned}G^2_{\cdot,4}(x)&=21x^8;\\G^2_{\cdot,5}(x)&=21x+21x^2+21x^3+26x^4+33x^5+39x^6+49x^7+84x^8+189x^9;\\G^2_{\cdot,6}(x)&=483x+483x^2+462x^3+511x^4+580x^5+624x^6+665x^7+770x^8\\&+945x^9+945x^{10};\\G^2_{\cdot,7}(x)&=6468x+6468x^2+5985x^3+6132x^4+6440x^5+6489x^6+6349x^7\\&+6300x^8+6300x^9+5670x^{10}+3465x^{11};\\G^2_{\cdot,8}(x)&=66066x+66066x^2+59598x^3+57750x^4+57225x^5+54873x^6\\&+50813x^7+46459x^8+41895x^9+35175x^{10}+24255x^{11}+10395x^{12}.\end{aligned}$$

基于方程 (1), 取 $p=0\sim 3$ 对应 $i=3\sim 0$, 同样可得到一系列方程。由这些方程, 我们可以得到 $g_3(x,y)$ 所满足的参数表达式，因其过于繁琐，在此只给出 g_3^* 的参数表

达式:

$$\eta = y(\eta+1)^2, \qquad g_3^* = \frac{\eta^6(\eta+1)(1485\eta^4+12078\eta^3+22924\eta^2+12078\eta+1485)}{(1-\eta)^{17}}.$$

定理 4 亏格为 3 的可定向曲面上具有 n 条边的根瓣丛数目为

$$\begin{aligned}&\sum_{i\geq 0}^{n-10}\frac{11(i+15)!(2n)!\sigma_i(n)}{i!15!(n-i-8)!(n+i+10)!}\\&+\sum_{i\geq 0}^{n-7}\frac{99(i+15)!(2n)!(137n-107i-627)}{i!15!(n-i-6)!(n+i+7)!}\\&+\frac{22(n+6)!(2084n^2-15081n+2902)}{(n-8)!15!}+\frac{1485(n+9)!}{(n-6)!15!},\end{aligned} \tag{7}$$

其中, $\sigma_i(n) = 3317n^2+1121i^2+3898in+39497n+22127i+109440.$

由式 (7) 容易验证,

$$g_3(1,y) = 1485y^6+56628y^7+1169740y^8+1745580y^9+211083730y^{10}+\cdots.$$

下面给出 $n\leq 8$ 时, 亏格为 3 的可定向曲面上根面次为 m 的根瓣丛具体数目:

$$\begin{aligned}G^3_{\cdot,6}(x) &= 1485x^{12};\\G^3_{\cdot,7}(x) &= 1485x+1485x^2+1485x^3+1674x^4+1905x^5+2115x^6+2385x^7\\&\quad+2820x^8+3429x^9+4185x^{10}+5445x^{11}+8910x^{12}+19305x^{13};\\G^3_{\cdot,8}(x) &= 56628x+56628x^2+55143x^3+58971x^4+63765x^5+67509x^6\\&\quad+71554x^7+77454x^8+84798x^9+92190x^{10}+100485x^{11}+114345x^{12}\\&\quad+135135x^{13}+135135x^{14}.\end{aligned}$$

基于方程 (2), $q=5,3,1$ 对应 $i=0,1,2$ 时, 可得 $f_5(x,y)$ 所满足的一系列方程. 利用 [11] 中的一些已知结果, 通过一系列运算, 我们可以得到

$$f_5^* = \frac{\eta^5(\eta+1)(1680\eta^4+26667\eta^3+74510\eta^2+52754\eta+8229)}{(1-\eta)^{14}}.$$

利用 Lagrangian 反演公式, 有

定理 5 亏格为 5 的不可定向曲面上具有 n 条边的根瓣丛 (或单面地图) 数目为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-9}\frac{(i+12)!(2n)!\sigma_i'(n)}{i!12!(n+i+9)!(n-8-i)!}\\&+\sum_{i=0}^{n-7}\frac{(i+12)!(2n)!\sigma_i(n)}{i!12!(n+i+7)!(n-5-i)!}\\&+\frac{2(n+4)!\lambda(n)}{12!(n-5)!},\end{aligned} \tag{8}$$

其中,

$$\begin{cases} \lambda(n) = 8229n^4 + 93199n^3 - 213405n^2 - 26839n - 5892540; \\ \sigma_i(n) = 135493n^2 - 132562in - 607125n + 29985i^2 + 293539i + 734528; \\ \sigma_i'(n) = 28347n + 24987i + 226563. \end{cases}$$

由式 (8), 可以验证：

$$f_5(1,y) = 8229y^5 + 258479y^6 + 4494224y^7 + 57462482y^8 + 604251858y^9 + \cdots.$$

下面给出 $n \le 7$ 时，亏格为 5 的不可定向曲面上根面次为 m 的根瓣丛具体数目：

$$\begin{aligned} G^5_{\cdot,5}(x) &= 8229x^{10}; \\ G^5_{\cdot,6}(x) &= 8229x + 8229x^2 + 9247x^3 + 10330x^4 + 11905x^5 + 13807x^6 \\ &\quad + 16667x^7 + 20660x^8 + 27741x^9 + 41145x^{10} + 90519x^{11}; \\ G^5_{\cdot,7}(x) &= 258479x + 258479x^2 + 274536x^3 + 290870x^4 + 312430x^5 \\ &\quad + 335223x^6 + 363503x^7 + 395732x^8 + 435609x^9 + 483135x^{10} \\ &\quad + 543114x^{11} + 543114x^{12}. \end{aligned}$$

在此, 所列出的可定向根瓣丛 (亏格为 $2,3$) 及不可定向根瓣丛 (亏格 5) 在给定边数 n, 根面次 $m=1$ 时的数值，经对照都与 [12] 中表 I 给出的具有 $e=n-1$ 条边单面地图数目同.

基于以上研究发现，目前对根瓣丛仍存在一些值得更进一步探讨的问题：

由前面所述，亏格 1-5 的不可定向曲面上根瓣丛 (以边数为参数时) 的计数函数 $f_q^* = f_q(1,y)$ 所满足的参数表达式如下：

$$\begin{aligned} &f_1^* = \frac{\eta(\eta+1)}{(1-\eta)^2}; \quad f_2^* = \frac{\eta^2(\eta+1)(2\eta+4)}{(1-\eta)^5}; \quad f_3^* = \frac{\eta^3(\eta+1)(12\eta^2+75\eta+41)}{(1-\eta)^8}; \\ &f_4^* = \frac{\eta^4(\eta+1)(120\eta^3+1272\eta^2+1900\eta+488)}{(1-\eta)^{11}}; \\ &f_5^* = \frac{\eta^5(\eta+1)(1680\eta^4+26667\eta^3+74510\eta^2+52754\eta+8229)}{(1-\eta)^{14}} \end{aligned}$$

对于可定向根瓣丛，我们有

$$\begin{aligned} &g_1^* = \frac{\eta^2(\eta+1)}{(1-\eta)^5}; \quad g_2^* = \frac{\eta^4(\eta+1)(21\eta^2+63\eta+21)}{(1-\eta)^{11}}; \\ &g_3^* = \frac{\eta^6(\eta+1)(1485\eta^4+12078\eta^3+22924\eta^2+12078\eta+1485)}{(1-\eta)^{17}} \end{aligned}$$

由这些表达式，观察其规律很自然会发现，对任意亏格不可定向 (可定向) 曲面上根瓣丛是否有如下参数表达式成立？

$$f_q^* = \frac{\eta^q(\eta+1)\sigma(\eta)}{(1-\eta)^{3q-1}}; \quad g_p^* = \frac{\eta^{2p}(\eta+1)\phi(\eta)}{(1-\eta)^{6p-1}} \tag{9}$$

其中， $\sigma(\eta)$ 和 $\phi(\eta)$ 分别是次数为 $q-1$ 和 $2(p-1)$ 的 η 的多项式.

3 曲面上近 2- 正则地图

令 $\mathcal{M}_g$ 为亏格 g 的曲面上所有近 2- 正则地图的集合．这里， $\mathcal{M}_0$ 即为球面 (或平面) 上近 2- 正则地图的集合．本节主要考虑的计数函数如下：

$$h_g=\sum_{M\in\mathcal{M}_g}x^{2s(M)}y^{l(M)};\qquad h_0=\sum_{M\in\mathcal{M}_0}x^{2s(M)}y^{l(M)}z^{m(M)},$$

其中， $s(M),l(M)$ 和 $m(M)$ 分别为 M 的根点次，非根节点数及根面次．

3.1 多参数下平面近 2- 正则地图

由于平面根瓣丛 (环束) 的计数显式已知 [13], 在此，我们通过寻求平面近 2- 正则地图与瓣丛之间的一种关系，给出了三个参数下此类地图的计数显式．

定理 6 当 $s,l,m\geq 0$ 时，令 $\mathcal{M}_0(s,l,m)$ 和 $\mathcal{L}_0(s,m)$ 分别为所有根点次 $2s$, 根面次 m 且有 l 个非根节点的近 2- 正则地图和所有根点次 $2s$ 且根面次 m 的平面瓣丛的集合．那么，对于 $0\leq i\leq l$ 有

$$|\mathcal{M}_0(s,l,m+i)|=\binom{s+l-m-i-1}{l-i}\binom{m+i-1}{i}|\mathcal{L}_0(s,m)|$$

成立．

证 对任一 $M\in\mathcal{M}_0(s,l,m+i)$, 将其所有次为 2 的节点略之不计，可以唯一得到一个瓣丛 $L\in\mathcal{L}_0(s,m)$. 然而，对任一 $L\in\mathcal{L}_0(s,m)$, 添加 l 个新节点，我们看有多少个近 2- 正则地图与之对应．首先，若将此 l 个节点放置于 L 的 $s-m$ 条不属于根面的边上，则可以得到 $\binom{s+l-m-1}{l}$ 个属于集合 $\mathcal{M}_0(s,l,m)$ 的地图．再者，若将其中 1 个节点放在根面边界上，其余 $l-1$ 个节点放于不属于根面的边上，则有 $\binom{m}{1}\binom{s+l-m-2}{l-1}$ 个属于集合 $\mathcal{M}_0(s,l,m+1)$ 的地图被得到．依此类推，可以知道有 $\binom{s+l-m-i-1}{l-i}\binom{m+i-1}{i}$ 个属于 $\mathcal{M}_0(s,l,m+i)$ 的近 2- 正则地图与 L 相对应．由此，该定理得证．

基于定理 6, 易验证下面结果成立．

定理 7 在以根点次，非根节点数和根面次为参数下，平面近 2- 正则地图的计数显式如下：

$$h_0=\sum_{s,l\geq 0}\sum_{m=0}^{s}\sum_{i=0}^{l}\binom{s+l-m-i-1}{l-i}\binom{m+i-1}{i}\frac{m(2s-m-1)!}{(s-m)!s!}x^{2s}y^lz^{m+i}.$$

3.2 近 2- 正则地图与瓣丛之间的关系

定理 8 当 $s,l\geq 0$ 时，令 $\mathcal{M}_g(s,l)$ 和 $\mathcal{L}_g(s)$ 分别为亏格为 g 的曲面上所有根点次 $2s$, 且有 l 个非根节点的近 2- 正则地图和所有根点次 $2s$ 的瓣丛的集合，则有

$$|\mathcal{M}_g(s,l)|=\binom{s+l-1}{l}|\mathcal{L}_g(s)|$$

成立．

证 对任一 $M\in\mathcal{M}_g(s,l)$, 同样，忽略其所有节点次为 2 的非根节点，可以唯一得到一个瓣丛 L. 易知 $L\in\mathcal{L}_g(s)$. 另一方面，对任一 $L\in\mathcal{L}_g(s)$, 在其 s 条边上添加 l 个新节点，我们可以得到一个新的地图 $M\in\mathcal{M}_g(s,l)$, 显然，共有 $\binom{s+l-1}{l}$ 种方式放置此 l 个新

节点 (重复组合问题). 从而，对任一 $L \in \mathcal{L}_g(s)$, 这里有 $\binom{s+l-1}{l}$ 个属于集合 $\mathcal{M}_g(s,l)$ 的地图可以被得到. 由此，知此定理成立.

同样地，对于两类特殊近 2- 正则地图 (无环和简单近 2- 正则地图), 类似于定理 8, 可有如下结论. 其中，一个地图称为是 简单的, 如果它的基准图，既无自环又无重边. 也可以说，简单地图就是无重边的无环地图.

定理 9 当 $s, l \geq 0$ 时，令 $\mathcal{N}_g(s,l)$ 和 $\mathcal{L}_g(s)$ 分别为亏格为 g 的曲面上所有根点次 $2s$, 且有 l 个非根节点的无环近 2- 正则地图和所有根点次 $2s$ 的瓣丛的集合，则有

$$|\mathcal{N}_g(s,l)| = \binom{l-1}{l-s}|\mathcal{L}_g(s)|$$

成立.

证　参照定理 8 中证明方法. 只是注意，对任一 $L \in \mathcal{L}_g(s)$, 当在 L 的 s 条边上放置 l 个节点时，要确保此 s 条边中每一条边上至少放有一个节点，因此，可知共有 $\binom{l-1}{l-s}$ 种放置方式. 定理得证.

定理 10 当 $s, l \geq 0$ 时，令 $\mathcal{S}_g(s,l)$ 和 $\mathcal{L}_g(s)$ 分别为亏格为 g 的曲面上所有根点次 $2s$, 且有 l 个非根节点的简单近 2- 正则地图和所有根点次 $2s$ 的瓣丛的集合，则有

$$|\mathcal{S}_g(s,l)| = \binom{l-s-1}{s-1}|\mathcal{L}_g(s)|$$

成立.

证　仍参照定理 8 中证明方法. 此时，对任一 $L \in \mathcal{L}_g(s)$, 当在 L 的 s 条边上放置 l 个节点时，要确保此 s 条边中每一条边上至少放有两个节点 (以保证无重边), 因此，可知共有 $\binom{l-s-1}{s-1}$ 种放置方式. 此定理得证.

由此，我们可以得出给定亏格曲面上 (无环，简单) 近 2- 正则地图的一系列显式，在此就不一一列出了.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参　考　文　献

[1] Liu Y P. Advance in Combinatorial Maps. Beijing: Northern Jiaotong University Press, 2003 (in Chinese)

[2] Liu Y P. Theory of Counting Combinatorial Maps. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese)

[3] Tutte W T. A Census of Planar Maps. *Canad. J. Math.*, 1963, 15: 249–271

[4] Tutte W T. On the Enumeration of Planar Maps. *Bull Amer. Math. Soc.*, 1968, 74: 64–74

[5] Liu Y P. Enumerative Theory of Maps. Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 1999

[6] Bender E A, Canfield E R, Robinson R W. The Enumeration of Maps on the Torus and the Projective Plane. *Canad. Math. Bull.*, 1988, 31: 257–271

[7] Li Z X, Zhu Y. Enumeration of Near-2-gon Maps on Some Surfaces. *Journal of the CUN* (Natural Sciences Edition), 2003, 12: 225–226

[8] Ren H. A Sensus of Maps on Surfaces. Ph.D. Thesis of Northern Jiaotong University, 1999

[9] Hao R X. Enumeration of Maps and Related Combinatorial Invariant of Graphs. Ph.D. Thesis of Northern Jiaotong University, 2002

[10] Li Z X, Liu Y P. Chromatic Sums of Singular Maps on Some Surfaces. *J. Appl. Math. Comput.*, 2004, 15: 159–172

[11] Xu Y, Liu Y P. A Census of Petal Bundles by Genus. *Acta Mathematica Sinica* (English Series), 2008, 24: 937–946

[12] Walsh T, Lehman A B. Counting Rooted Maps by Genus I. *J. Combin. Theory* (Series B), 1972, 13: 122–141

[13] Meir A, Moon J W. Survival Under Random Coverings of Trees. *Graphs and Combinatorics*, 1988, 4: 49–56

Counting Two Kinds of Maps on Surfaces

XU Yan

(*Department of Mathematics, Tianjin Polytechnic University, Tianjin* 300160)

(*E-mail: xu_yanr@163.com*)

Abstract In this article, we obtain some explicit expressions about rooted petal bundles on the orientable surfaces (genus 2 and 3) and the nonorientable surfaces (genus 5) with the size as a parameter. Meanwhile, we consider a kind of maps: nearly 2-regular maps, topologically equivalent to petal bundles. By a combinatorial method, an explicit expression of rooted nearly 2-regular maps on the sphere with three parameters and the number of 2-regular maps on the surfaces with given genus are derived.

Key words rooted map; enumerating function; parametric expression; petal bundles; 2-regular maps

MR(2000) Subject Classification 05C10; 05C30

Chinese Library Classification O157.5