第 31 卷 第 5 期　　应用数学学报　　Vol. 31 No. 5
2008 年 9 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Sep., 2008

一般梯图的亏格分布

万良霞
(清华大学数学科学系，北京 100084)
(北京交通大学数学系，北京 100044)
(E-mail: wanliangxia@126.com)

摘　要　本文求出了一些曲面集的亏格分布的显式表达式．在联树的基础上，通过运用曲面分类法把一般梯图的亏格分布转化为这些曲面集的线性组合，从而可求出它们的显式表达式．

关键词　联树；曲面分类法；梯图；曲面；嵌入；亏格；亏格分布
MR(2000) 主题分类　05C10; 05C30
中图分类　O175.5

1　引言

本文考虑连通无向图在曲面上的可定向胞腔嵌入，这里的曲面指的是无边缘的 2-维紧流形．

已知图 G, 顶点 v 处的边的循环序称为 v 的 旋; 在每一个顶点处指定一个旋则构成图 G 的 **旋**. 由于图的嵌入由旋决定，令 ρ_v 表示 v 的度，因此 G 有 $\prod\limits_{v\in V(G)}(\rho_v-1)!$ 个嵌入．令 $g_i(G)$ 表示 G 在亏格为 i 的曲面上的嵌入的数目，则图 G 的 **亏格分布**[1] 为：

$$g_0(G), g_1(G), g_2(G), \cdots.$$

G 的亏格多项式为：

$$f_G(x)=g_0(G)+g_1(G)x+g_2(G)x^2+\cdots.$$

由图 G 的嵌入的数目可见求其亏格分布的困难程度.

已知一个图 G_0, 在它的任意两条边之间添加 n 个平行边所得到的图形称为由 G_0 生成的 **梯图**G_n. 研究者们已经求出了四类梯图的亏格分布的显式表达式，具体如下：McGeoch 求出了 circular ladders 和 Möbius ladders 的亏格分布 [2]; Furst, Gross and Statman 得到了 closed-end ladders 的亏格分布 [3]; Tesar 得到了 Ringel ladders 的亏格分布 [4]. 本文考虑一般梯图的亏格分布，在联树 [5] 的基础上，通过运用曲面分类法 [6], 把它们的亏格分布转化为一些曲面集的亏格分布，通过利用这些曲面集的亏格分布的显式表达式进而求出梯图的亏格分布．作为特例可把已有四类梯图的亏格分布简单的推出 [7]. 下面介绍本文所用的概念和引理.

线性序 [8]　$X=abc\cdots z$ 是由字母构成的循环且有 $a\prec b\prec c\cdots\prec z$. $\emptyset$ 表示空序列.　X 的 **反序列** 记为 $\widehat{X}=z\cdots cba$. X 的 **字母逆序列** 为 $X'=a^-b^-c^-\cdots z^-$. 一个循

本文 2008 年 5 月 1 日收到. 2008 年 7 月 23 日收到修改稿.

环 S 如果对于 S 中的任意一个字母 a, a 和 a^- 都在 S 中恰好出现一次，则称 S 是 **可定向循环**. 由于每一个可定向曲面可以由偶边形按照一定的方向粘贴具有相同字母的对边形成. 自然地，一个曲面可以看成一个可定向循环. 为了求曲面 S 的亏格 $\gamma(S)$, 一个定义在曲面集 $\mathcal{S}$ 上的等价关系 $\sim$ (例如，参见 [8] 的第 1 章) 如下：

运算 1. $AB \sim (Ae)(e^-B)$.

运算 2. $Ae_1e_2Be_2^-e_1^- \sim AeBe^- = Ae^-Be$.

运算 3. $Aee^-B \sim AB$, 这里 $AB \neq \emptyset$.

其中， AB 是曲面且 $e \notin AB$.

通过运用上述等价关系，每一个曲面都可化为平面 $a_0a_0^-$ 和亏格为 i $(i \geq 1)$ 的曲面 $\prod\limits_{k=1}^{i} a_kb_ka_k^-b_k^-$ 之一 (例如，参见 [8] 中 (1.5.2)).

引理 1.1 ([5] 中定理 1.6) 令 S_1 和 S_2 是曲面. 若 $S_1 \sim S_2aba^-b^-(a,b \notin S_2)$, 则 $\gamma(S_1) = \gamma(S_2)+1$.

引理 1.2 ([8] 中 (1.5.3)) 令 A,B,C,D 和 E 是线性序且 $ABCDE$ 曲面，则

$$AaBbCa^-Db^-E \sim ADCBEaba^-b^-.$$

其中 $a,b \notin ABCDE$.

引理 1.3 令 A,B,C 和 D 线性序且 ABCD 是曲面，则

(i) ([6] 中引理 2.3) $aABa^-CD \sim aBAa^-CD \sim aABa^-DC$;

(ii) ([6] 中推论 2.4) $AaBa^-bCb^-cDc^- \sim aBa^-AbCb^-cDc^- \sim aBa^-bCb^-AcDc^-$;

(iii) ([6] 中引理 2.5) $AaBa^-bCb^-cDc^- \sim BaAa^-bCb^-cDc^- \sim CaAa^-bBb^-cDc^- \sim DaAa^-bBb^-cCc^-$.

其中 $a \neq b \neq c \neq a^- \neq b^- \neq c^-$ 且 $a,b,c \notin ABCD$.

令 T 是图 G 的一个支撑树. 把 G 的每一个上树边 a 分成分别带有字母 a 和 a^- 的两个半边，由 T 和这些半边形成的图形称为 G 的一个 **联树**. 令 σ 是 G 的旋， G_σ, $\widetilde{T}_\sigma$ 和 $\mathcal{P}^{\sigma}_{\widetilde{T}}$ 分别表示相应的嵌入，联树和嵌入曲面，则有

引理 1.4 ([5] 的第 1 章) 令 σ_1 和 σ_2 是图 G 的两个不同的旋，则嵌入 G_{σ_1} 和 G_{σ_2}, 及联树 $\widetilde{T}_{\sigma_1}$ 和 $\widetilde{T}_{\sigma_2}$ 不同胚.

引理 1.5 ([5] 的第一章) 令 T 和 T^1 是 G 的两个不同的支撑树，Σ 是 G 的旋集. 那么存在从 $(\Sigma,\widetilde{T})$ 到 $(\Sigma,\widetilde{T^1})$ 的双射，其中 $(\Sigma,\widetilde{T}) = \{\widetilde{T}_\sigma|\sigma\in\Sigma\}$ 及 $(\Sigma,\widetilde{T^1}) = \{\widetilde{T}^1_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$.

2 曲面集 $\mathcal{S}_j^n$ 的亏格分布

令 $g_i(\mathcal{M})$ 曲面集 $\mathcal{M}$ 中亏格为 i 的曲面的数目, 那么 $\mathcal{M}$ 的亏格分布是下面的序列：

$$g_0(\mathcal{M}), g_1(\mathcal{M}), g_2(\mathcal{M}), \cdots.$$

$\mathcal{M}$ 的亏格多项式是 $f_{\mathcal{M}}(x) = \sum\limits_{i\geq 0} g_i(\mathcal{M})x^i$.

设 n 是正整数且对任意正整数 l, a_l 是不同的字母. 令 $R_1^n = a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}\cdots a_{k_r}$, $R_2^n = a_{k_{r+1}}a_{k_{r+2}}a_{k_{r+3}}\cdots a_{k_n}$, $R_3^n = a_{t_1}^-a_{t_2}^-a_{t_3}^-\cdots a_{t_s}^-$ 及 $R_4^n = a_{t_{s+1}}^-a_{t_{s+2}}^-a_{t_{s+3}}^-\cdots a_{t_n}^-$, 其中 $n \geq k_1 > k_2 > k_3 > \cdots > k_r \geq 1$, $1 \leq k_{r+1} < k_{r+2} < k_{r+3} < \cdots < k_n \leq n$, $n \geq t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > t_s \geq 1$, $1 \leq t_{s+1} < t_{s+2} < t_{s+3} < \cdots < t_n \leq n$, $0 \leq r,s \leq n$ 且对于 $p \neq q$ 有 $k_p \neq k_q$ 及 $t_p \neq t_q$. 对于 $1 \leq j \leq 11$ 曲面集 $\mathcal{S}_j^n$ 定义如下：

$$\mathcal{S}_1^n = \{R_1^nR_2^nR_3^nR_4^n\} \quad \mathcal{S}_2^n = \{R_1^nR_2^nR_4^nR_3^n\} \quad \mathcal{S}_3^n = \{R_1^nR_3^nR_2^nR_4^n\}$$

$$\mathcal{S}_4^n = \{aR_1^nR_2^na^-R_3^nR_4^n\} \qquad \mathcal{S}_5^n = \{aR_1^nR_3^na^-R_2^nR_4^n\}$$

$\mathcal{S}_6^n = \{aR_1^nR_4^na^-R_2^nR_3^n\}$ $\mathcal{S}_7^n = \{aR_1^na^-R_3^nR_2^nR_4^n\}$

$\mathcal{S}_8^n = \{R_1^nR_2^naR_3^na^-bR_4^nb^-\}$ $\mathcal{S}_9^n = \{R_1^nR_3^naR_2^na^-bR_4^nb^-\}$

$\mathcal{S}_{10}^n = \{R_1^nR_4^naR_2^na^-bR_3^nb^-\}$ $\mathcal{S}_{11}^n = \{R_1^naR_2^na^-bR_3^nb^-cR_4^nc^-\}$.

设 R_k^n $(1 \le k \le 4)$ 如上定义. 令

$$\begin{aligned}
&H_1^n = a_{n+1-k_{r+1}}a_{n+1-k_{r+2}}a_{n+1-k_{r+3}}\cdots a_{n+1-k_n},\\
&H_2^n = a_{n+1-k_1}a_{n+1-k_2}a_{n+1-k_3}\cdots a_{n+1-k_r},\\
&H_3^n = a^-_{n+1-t_{s+1}}a^-_{n+1-t_{s+2}}a^-_{n+1-t_{s+3}}\cdots a^-_{n+1-t_n},\\
&H_4^n = a^-_{n+1-t_1}a^-_{n+1-t_2}a^-_{n+1-t_3}\cdots a^-_{n+1-t_s},\\
&J_1^n = a_{t_1}a_{t_2}a_{t_3}\cdots a_{t_s},\\
&J_2^n = a_{t_{s+1}}a_{t_{s+2}}a_{t_{s+3}}\cdots a_{t_n},\\
&J_3^n = a^-_{k_1}a^-_{k_2}a^-_{k_3}\cdots a^-_{k_r},\\
&J_4^n = a^-_{k_{r+1}}a^-_{k_{r+2}}a^-_{k_{r+3}}\cdots a^-_{k_n},\\
&\mathcal{S} = \{AR_{l_1}^nBR_{l_2}^nCR_{l_3}^nDR_{l_4}^n \mid \text{ABCDE 是曲面}, R_{l_1}^n, R_{l_2}^n, R_{l_3}^n, R_{l_4}^n = \{R_1^n, R_2^n, R_3^n, R_4^n\}\}.
\end{aligned}$$

为了下面证明的需要，定义映射 ψ_t $(1 \le t \le 3)$ 使得对任意 $S \in \mathcal{S}$ 有

$$\begin{aligned}
&\psi_1(S) = \widehat{S},\\
&\psi_2(AR_{l_1}^nBR_{l_2}^nCR_{l_3}^nDR_{l_4}^n) = AH_{m_1}^nBH_{m_2}^nCH_{m_3}^nDH_{m_4}^n
\end{aligned}$$

使得 R_1^n, R_2^n, R_3^n 和 R_4^n 分别相应于 H_2^n, H_1^n, H_4^n 和 H_3^n 及

$$\psi_3(AR_{l_1}^nBR_{l_2}^nCR_{l_3}^nDR_{l_4}^n) = AJ_{m_5}^nBJ_{m_6}^nCJ_{m_7}^nDJ_{m_8}^n$$

使得 R_1^n, R_2^n, R_3^n 和 R_4^n 分别相应于 J_3^n, J_4^n, J_1^n 和 J_2^n. 这里 $\{m_1, m_2, m_3, m_4\} = \{m_5, m_6, m_7, m_8\} = \{1, 2, 3, 4\}$. 显然 ψ_t 是双射且有下面结论.

引理 2.1 令 $\mathcal{S}$ 和 $\psi_t(1 \le t \le 3)$ 如上定义. 则对任意的曲面 $S \in \mathcal{S}$ 有

$$\gamma(\psi_t(S)) = \gamma(S) \quad 且 \quad \psi_t^2(S) = S.$$

引理 2.2 设 a 和 a^- 表示相同的字母. 对于给定的最多包含 3 个字母的曲面 $A_1A_2A_3A_4$ 使得 $A_1A_2A_3A_4 = \emptyset$ 或 $\gamma(A_1A_2A_3A_4) = 0$. 令

$$\mathcal{U}^n = \{A_1R_{l_1}^nA_2R_{l_2}^nA_3R_{l_3}^nA_4R_{l_4}^n | R_k^n \text{ 如上定义}, 1 \le k \le 4, \{l_1, l_2, l_3, l_4\} = \{1, 2, 3, 4\}\},$$

则存在曲面集 $\mathcal{S}_j^n$, 使得 $f_{\mathcal{S}_j^n}(x) = f_{\mathcal{U}^n}(x)$.

证 设 $A_1A_2A_3A_4 = \emptyset$. 由于 $R_{l_1}^nR_{l_2}^nR_{l_3}^nR_{l_4}^n$ 是循环，因此不妨设 $R_{l_1}^nR_{l_2}^nR_{l_3}^nR_{l_4}^n = R_1^nR_{l_2}^nR_{l_3}^nR_{l_4}^n$. 如果 l_k $(k = 2, 3, 4)$ 满足下列条件之一，结论显然成立：

(1) $l_2 = 2,\ l_3 = 3,\ l_4 = 4$;

(2) $l_2 = 2,\ l_3 = 4,\ l_4 = 3$;

(3) $l_2 = 3,\ l_3 = 2,\ l_4 = 4$.

令 $\mathcal{U}_1^n = \{R_1^nR_4^nR_3^nR_2^n | 1 \le m \le 4,\ R_m^n$ 如上定义$\}$, $\mathcal{U}_2^n = \{R_1^nR_3^nR_4^nR_2^n | 1 \le m \le 4,\ R_m^n$ 如上定义$\}$, $\mathcal{U}_3^n = \{R_1^nR_4^nR_2^nR_3^n | 1 \le m \le 4,\ H_m^n$ 如上定义$\}$, 对任意给定的曲面

$R_1^nR_4^nR_3^nR_2^n\in\mathcal{U}_1^n$，$R_1^nR_3^nR_4^nR_2^n\in\mathcal{U}_2^n$ 和 $R_1^nR_4^nR_2^nR_3^n\in\mathcal{U}_3^n$, 则有

$$\psi_2(R_1^nR_4^nR_3^nR_2^n)=H_2^nH_3^nH_4^nH_1^n=H_1^nH_2^nH_3^nH_4^n,$$
$$\psi_2(R_1^nR_3^nR_4^nR_2^n)=H_2^nH_4^nH_3^nH_1^n=H_1^nH_2^nH_4^nH_3^n$$

和 $\psi_3(R_1^nR_4^nR_2^nR_3^n)=J_3^nJ_2^nJ_4^nJ_1^n=J_1^nJ_3^nJ_2^nJ_4^n$. 由引理 2.1 知，

$$f_{\mathcal{U}_1^n}(x)=f_{\mathcal{S}_1^n}(x),f_{\mathcal{U}_2^n}(x)=f_{\mathcal{S}_2^n}(x)\ \ 和\ \ f_{\mathcal{U}_3^n}(x)=f_{\mathcal{S}_3^n}(x).$$

因此当 $A_1A_2A_3A_4=\emptyset$ 时，结论成立．类似地，通过运用 ψ_t 及引理 2.1 其它的情形也成立.

引理 2.3 令 $g_{i_j}(n)$ 表示 $\mathcal{S}_n^j$ 中亏格为 i 的曲面的数目．其中 $1\le j\le 11$, $n\ge 0$. 令 $f_{\mathcal{S}_j^0}(x)=1$. 那么

$$g_{i_j}(n)=\begin{cases}2g_{i_1}(n-1)+8g_{(i-1)_1}(n-2),\\ \qquad\qquad 当\ j=1,0\le i\le\left[\dfrac{n}{2}\right],n\ge 2;\\ 4g_{i_7}(n-1),\ \ 当\ j=2,0\le i\le\left[\dfrac{n}{2}\right],n\ge 1;\\ g_{i_3}(n-1)+g_{i_6}(n-1)+2g_{i_7}(n-1),\\ \qquad\qquad 当\ j=3,0\le i\le\left[\dfrac{n}{2}\right],n\ge 1;\\ 4g_{(i-1)_1}(n-1),\ \ 当\ j=4,1\le i\le\left[\dfrac{n+1}{2}\right],n\ge 1;\\ 2g_{(i-1)_3}(n-1)+2g_{i_9}(n-1),\\ \qquad\qquad 当\ j=5,0\le i\le\left[\dfrac{n+1}{2}\right],n\ge 1;\\ 2g_{(i-1)_1}(n-1)+2g_{i_6}(n-1),\\ \qquad\qquad 当\ j=6,0\le i\le\left[\dfrac{n+1}{2}\right],n\ge 1;\\ 2g_{(i-1)_3}(n-1)+2g_{i_{10}}(n-1),\\ \qquad\qquad 当\ j=7,0\le i\le\left[\dfrac{n+1}{2}\right],n\ge 1;\\ 4g_{(i-1)_7}(n-1),\ \ 当\ j=8,1\le i\le\left[\dfrac{n}{2}\right]+1,n\ge 1;\\ g_{(i-1)_5}(n-1)+2g_{(i-1)_7}(n-1)+g_{i_{11}}(n-1),\\ \qquad\qquad 当\ j=9,1\le i\le\left[\dfrac{n}{2}\right]+1,n\ge 1;\\ g_{(i-1)_6}(n-1)+2g_{(i-1)_7}(n-1)+g_{i_{10}}(n-1),\\ \qquad\qquad 当\ j=10,0\le i\le\left[\dfrac{n}{2}\right]+1,n\ge 1;\\ 2g_{(i-1)_9}(n-1)+2g_{(i-1)_{10}}(n-1),\\ \qquad\qquad 当\ j=11,1\le i\le\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+1,n\ge 1;\\ 0,\ \ 否则.\end{cases}$$

证 由于证明方法是类似的，我们将证明 $j=7$, $n\ge 1$, $0\le i\le[(n+1)/2]$ 的情形，其余的情况留给读者检验.

根据 $\mathcal{S}_7^n$ 的定义知 $\mathcal{S}_7^{n-1}=\{aR_1^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_4^{n-1}\}$, 其中 R_1^{n-1}, R_2^{n-1}, R_3^{n-1}, R_4^{n-1} 如上定义，则

$\mathcal{S}_7^n=\{aR_1^{n-1}a^-a_n^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}a_nR_4^{n-1},aR_1^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}a_nR_4^{n-1}a_n^-,$
$\qquad aa_nR_1^{n-1}a^-a_n^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_4^{n-1},aa_nR_1^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_4^{n-1}a_n^-\}.$

由引理 1.2 可知

$$aa_nR_1^{n-1}a^-a_n^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_4^{n-1}\sim R_1^{n-1}R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_4^{n-1}aa_na^-a_n^-,$$

$$aa_nR_1^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_4^{n-1}a_n^-\sim R_1^{n-1}R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_4^{n-1}aa_na^-a_n^-.$$

由引理 1.3(i) 可得

$$\begin{aligned}
&aR_1^{n-1}a^-a_n^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}a_nR_4^{n-1}\sim aR_1^{n-1}a^-a_n^-R_2^{n-1}R_3^{n-1}a_nR_4^{n-1}\\
\sim&aR_1^{n-1}a^-a_nR_4^{n-1}a_n^-R_2^{n-1}R_3^{n-1}\\
=&R_2^{n-1}R_3^{n-1}aR_1^{n-1}a^-a_nR_4^{n-1}a_n^-,\\
&aR_1^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}a_nR_4^{n-1}a_n^-=aR_1^{n-1}a^-a_n^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}a_nR_4^{n-1}\\
\sim&aR_1^{n-1}a^-a_n^-R_2^{n-1}R_3^{n-1}a_nR_4^{n-1}\\
\sim&aR_1^{n-1}a^-a_nR_4^{n-1}a_n^-R_2^{n-1}R_3^{n-1}\\
=&R_2^{n-1}R_3^{n-1}aR_1^{n-1}a^-a_nR_4^{n-1}a_n^-.
\end{aligned}$$

令 $\mathcal{S}_{12}^n=\{R_2^{n-1}R_3^{n-1}aR_1^{n-1}a^-a_nR_4^{n-1}a_n^-\}$. 运用映射 ψ_1, 运算 2 及引理 1.3(i) 可得

$$\begin{aligned}
\psi_1(R_2^{n-1}R_3^{n-1}aR_1^{n-1}a^-a_nR_4^{n-1}a_n^-)&=a_n^-H_3^{n-1}a_na^-H_2^{n-1}aH_4^{n-1}H_1^{n-1}\\
&\sim H_1^{n-1}H_4^{n-1}a_n^-H_2^{n-1}a_na^-H_3^{n-1}a,
\end{aligned}$$

其中, $H_1^{n-1}=\hat{R}_2^n$, $H_2^{n-1}=\hat{R}_1^n$, $H_3^{n-1}=\hat{R}_4^n$, $H_4^{n-1}=\hat{R}_3^n$. 易知 ψ_1 是 $\mathcal{S}_{12}^n$ 到 $\mathcal{S}_{10}^n$ 的双射. 由引理 1.1 知 $g_{i_7}(n)=2g_{(i-1)_3}(n-1)+2g_{i_{10}}(n-1)$.

下面我们求曲面集 $\mathcal{S}_j^n$ $(1\le j\le 11)$ 的亏格分布的显式表达式.

定理 2.4 令

$$C_n(i)=\begin{pmatrix} n-2-i\\ i\end{pmatrix}.$$

那么

$$g_{i_1}(n)=2^{n+i}\frac{2n-3i}{n-i}C_{n+2}(i),$$

其中 $0\le i\le[\frac{n}{2}]$, $n\ge 1$.

证 对 n 进行归纳. 由引理 2.3 易知当 $n=1,2$ 时结论成立.

假设结论对小于 n 的整数 k 成立. 其中, $n>2$. 令 $E_n(i)=\prod\limits_{k=0}^{i-2}(n-i-1-k)$. 由引理 2.3 和归纳假设当 $k=n$, $0\le i\le\left[\frac{n}{2}\right]$ 时,

$$\begin{aligned}
g_{i_1}(n)&=2g_{i_1}(n-1)+8g_{(i-1)_1}(n-2)\\
&=2^{n+i}\frac{2n-3i-2}{n-i-1}C_{n+1}(i)+2^{n+i}\frac{2n-3i-1}{n-i-1}C_n(i-1)\\
&=2^{n+i}\frac{E_n(i)}{i!(n-i-1)}\Big((n-2i)(2n-3i-2)+i(2n-3i-1)\Big)\\
&=2^{n+i}\frac{2n-3i}{n-i}C_{n+2}(i).
\end{aligned}$$

从而结论成立.

定理 2.5 已知 $g_{0_5}(1)=2$, $g_{1_5}(1)=2$, $g_{0_5}(2)=2$, $g_{1_5}(2)=14$, $g_{0_7}(1)=2$, $g_{1_7}(1)=2$, $g_{0_9}(1)=1$, $g_{1_9}(1)=3$, $g_{1_9}(2)=10$, $g_{2_9}(2)=6$, $g_{1_9}(3)=10$, $g_{2_9}(3)=54$, $g_{0_{10}}(1)=1$, $g_{1_{10}}(1)=3$, $g_{1_{11}}(1)=4$, $g_{1_{11}}(2)=4$, $g_{2_{11}}(2)=12$, $A_n(i)=\dfrac{2n-3i-2}{n-2i-1}$, $B_n(i)=\dfrac{n-i-1}{n-2i}$, $C_n(i)=\binom{n-2-i}{i}$, $D_n(i)=\frac{n}{i}2^i$. 那么 $g_{i_j}(n)$=

2^n+4n-2, 当 $j=3$, $i=0,n\geq 1$;

$C_{n+2}(i+1)\Big(2^{3i+1}A_{n+2}(i+1)+(2^{n+i-1}-2^{3i-2})\dfrac{(i+1)A_{n+2}(i)B_{n+2}(i+1)}{n-2i-1}\Big)$,

当 $j=3, 1\leq i\leq \left[\dfrac{n}{2}\right]-1$, $n\geq 2$;

$C_{n+1}(i)\big(2^{3i+1}+(2^{n+i-1}-2^{3i-2})\,A_{n+2}(i)B_{n+2}(i+1)\big)$,

当 $j=3$, $\left[\dfrac{n}{2}\right]-1<i\leq\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, $n\geq 2$;

$(2^{n+i-1}-2^{3i-2})A_{n+2}(i)C_{n+2}(i)$,

当 $j=3$, $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]<i\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$, $n\geq 2$;

2^n+8n+8, 当 $j=5$, $i=1$, $n=3,4$;

2^n+8n, 当 $j=5$, $i=1$, $n\geq 5$;

$(2^n-2^{2i-2})C_n(i-2)D_n(i-1)+2^{2i}C_n(i-1)D_n(i)$,

当 $j=5$, $2\leq i<\dfrac{n}{2}-1$, $n\geq 5$;

$(2^n-2^{2i-2})C_n(i-2)D_n(i-1)+2^{2i}C_n(i-1)D_n(i)+2^{n-1}$,

当 $j=5$, $i=\dfrac{n}{2}-1$, $n\geq 5$;

$(2^n-2^{2i-2})C_n(i-2)D_n(i-1)+2^{2i}C_n(i-1)D_n(i)+2^n$,

当 $j=5$, $\dfrac{n}{2}-1<i\leq\dfrac{n-1}{2}$, $n\geq 4$;

$(2^n-2^{2i-2})C_n(i-2)D_n(i-1)+2^{\frac{3n}{2}+1}-3\cdot 2^{n-1}$,

当 $j=5, \dfrac{n-1}{2}<i\leq\dfrac{n}{2}$, $n\geq 4$;

$(2^n-2^{2i-2})C_n(i-2)D_n(i-1)$,

当 $j=5$, $\dfrac{n}{2}<i\leq\dfrac{n+1}{2}$, $n\geq 3$;

$2^{n+i-1}\dfrac{2n-3i+2}{n-i+1}C_{n+3}(i)$, 当 $j=6$, $0\leq i\leq\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, $n\geq 1$;

2, 当 $j=7$, $i=0$, $n\geq 2$;

$2^{n+1}+16n-26$, 当 $j=7$, $i=1$, $n\geq 2$;

$C_{n+1}(i)\Big(2^{3i}A_{n+1}(i)+(2^{n+i-1}-2^{3i-3})\dfrac{iA_{n+1}(i-1)B_{n+1}(i)}{n-2i}\Big)$,

当 $j=7$, $2\leq i\leq\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, $n\geq 2$;

$C_n(i-1)\Big(2^{3i}+(2^{n+i-1}-2^{3i-3})A_{n+1}(i-1)B_{n+1}(i)\Big)$,

当 $j=7, \left[\dfrac{n-1}{2}\right]<i\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$, $n\geq 3$;

$(2^{n+i-1}-2^{3i-3})A_{n+1}(i-1)C_{n+1}(i-1),$

当 $j=7,\ \left[\frac{n}{2}\right]<i\le\left[\frac{n+1}{2}\right],\ n\ge 2;$

$6,$ 当 $j=9,\ i=1,\ n\ge 4;$

$3\cdot 2^n+48n-86,$ 当 $j=9,\ i=2,\ n=4,5;$

$3\cdot 2^n+48n-102,$ 当 $j=9,\ i=2,\ n\ge 6;$

$3C_n(i-1)\Big(2^{3i-2}B_{n+1}(i)$

$+(2^{n+i-2}-2^{3i-5})\frac{(i-1)B_n(i-1)B_{n+1}(i-1)}{n-2i+1}\Big),$

当 $j=9,\ 3\le i<\frac{n-1}{2},\ n\ge 6;$

$3C_n(i-1)\Big(2^{3i-2}B_{n+1}(i)$

$+(2^{n+i-2}-2^{3i-5})\frac{(i-1)B_n(i-1)B_{n+1}(i-1)}{n-2i+1}\Big)+2^{n-1},$

当 $j=9, i=\frac{n-1}{2},\ n\ge 7;$

$3C_n(i-1)\Big(2^{3i-2}B_{n+1}(i)$

$+(2^{n+i-2}-2^{3i-5})\frac{(i-1)B_n(i-1)B_{n+1}(i-1)}{n-2i+1}\Big)+2^{n},$

当 $j=9, \frac{n-1}{2}<i\le\frac{n}{2},\ n\ge 6;$

$C_{n-1}(i-2)\Big(2^{3i-2}+3(2^{n+i-2}-2^{3i-5})B_n(i-1)B_{n+1}(i-1)\Big)$

$+2^{\frac{3n+1}{2}}-3\cdot 2^{n-1},$

当 $j=9,\ \frac{n}{2}<i\le\frac{n+1}{2},\ n\ge 5;$

$3(2^{n+i-2}-2^{3i-5})B_{n+1}(i-1)C_n(i-2),$

当 $j=9,\ \frac{n+1}{2}<i\le\frac{n}{2}+1,\ n\ge 4;$

$1,$ 当 $j=10,\ i=0,\ n\ge 2;$

$2^n+4n-3,$ 当 $j=10,\ i=1,\ n\ge 2;$

$C_{n+2}(i)\Big(2^{3i-2}A_{n+2}(i)+(2^{n+i-2}-2^{3i-5})\frac{iA_{n+2}(i-1)B_{n+2}(i)}{n-2i+1}\Big),$

当 $j=10,\ 2\le i\le\left[\frac{n}{2}\right],\ n\ge 2;$

$C_{n+1}(i-1)\Big(2^{3i-2}+(2^{n+i-2}-2^{3i-5})A_{n+2}(i-1)B_{n+2}(i)\Big),$

当 $j=10,\ \left[\frac{n}{2}\right]<i\le\left[\frac{n+1}{2}\right],\ n\ge 3;$

$(2^{n+i-2}-2^{3i-5})A_{n+2}(i-1)C_{n+2}(i-1),$

当 $j=10,\ \left[\frac{n+1}{2}\right]<i\le\left[\frac{n}{2}\right]+1,\ n\ge 2;$

$2,$ 当 $j=11,\ i=1,\ n\ge 3;$

2^n+8n+6, 当 $j=11,\ i=2,\ n=3,4$;

2^n+8n-2, 当 $j=11,\ i=2,\ n\geq 5$;

$(2^n-2^{2i-4})C_n(i-3)D_n(i-2)+2^{2i-2}C_n(i-2)D_n(i-1)$,
当 $j=11,\ 3\leq i<\dfrac{n}{2}$;

$(2^n-2^{2i-4})C_n(i-3)D_n(i-2)+2^{2i-2}C_n(i-2)D_n(i-1)+2^{n-1}$,
当 $j=11,\ i=\dfrac{n}{2},\ n\geq 5$;

$(2^n-2^{2i-4})C_n(i-3)D_n(i-2)+2^{2i-2}C_n(i-2)D_n(i-1)+2^n$,
当 $j=11,\ \dfrac{n}{2}<i\leq\dfrac{n+1}{2},\ n\geq 4$;

$(2^n-2^{2i-4})C_n(i-3)D_n(i-2)+2^{\frac{3n}{2}+1}-3\cdot 2^{n-1}$,
当 $j=11,\ \dfrac{n+1}{2}<i\leq\dfrac{n}{2}+1,\ n\geq 4$;

$(2^n-2^{2i-4})C_n(i-3)D_n(i-2)$,
当 $j=11,\ \dfrac{n}{2}+1<i\leq\dfrac{n+1}{2}+1,\ n\geq 3$;

0, 否则.

证 下面将对 $j=6$ 时对 n 进行归纳. 其它的情形可类似地证明. 由引理 2.3 易得 $g_{0_6}(1)=2$, $g_{1_6}(1)=2$. 即当 $n=1$ 时结论成立.

假设结论对于 $n-1$ 成立. 由引理 2.3 得

$$g_{i_6}(n)=2g_{(i-1)_1}(n-1)+2g_{i_6}(n-1),\quad 当\ 0\leq i\leq\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

对于 n 当 $0\leq i\leq\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 时，运用引理 2.4 及归纳假设，

$$\begin{aligned}g_{i_6}(n)=&2^{n+i-1}\frac{2(n-1)-3(i-1)}{n-1-(i-1)}C_{n+1}(i-1)+2^{n+i-1}\frac{2(n-1)-3i+2}{n-i}C_{n+2}(i)\\=&\frac{2^{n+i-1}}{n-i}\Big(\frac{2n-3i+1}{(i-1)!}E_{n+1}(i)+\frac{(2n-3i)(n-2i+1)}{i!}E_{n+1}(i)\Big)\\=&2^{n+i-1}\frac{C_{n+3}(i)}{(n-i)(n-i+1)}\Big(i(2n-3i+1)+(2n-3i)(n-2i+1)\Big)\\=&2^{n+i-1}\frac{2n-3i+2}{n-i+1}C_{n+3}(i).\end{aligned}$$

因此当 $j=6$ 时结论成立.

推论 2.4 已知 $g_{0_2}(1)=4$, $g_{1_2}(2)=8$, $g_{1_4}(1)=4$, $g_{1_8}(1)=4$, $g_{2_8}(2)=8$, $A_n(i)=\frac{2n-3i-2}{n-2i-1}$, $B_n(i)=\frac{n-i-1}{n-2i}$, $C_n(i)=\binom{n-2-i}{i}$, $D_n(i)=\dfrac{n}{i}2^i$. 那么 $g_{i_j}(n)=$

8, 当 $j=2,\ i=0,\ n\geq 2$;

8, 当 $j=2,\ i=1,\ n=2$;

$2^{n+2}+64n-168$, 当 $j=2,\ i=1,\ n\geq 3$;

$C_n(i)\Big(2^{3i+2}A_n(i)+(2^{n+i}-2^{3i-1})\dfrac{iA_n(i-1)B_n(i)}{n-2i-1}\Big)$,

$$
\begin{aligned}
&\text{当 } j=2,\ 2\le i\le\left[\frac{n}{2}\right]-1,\ n\ge 3;\\
&C_{n-1}(i-1)\Big(2^{3i+2}+(2^{n+i}-2^{3i-1})\,iA_n(i-1)B_n(i)\Big),\\
&\quad\text{当 } j=2,\ \left[\frac{n}{2}\right]-1<i\le\left[\frac{n-1}{2}\right],\ n\ge 4;\\
&(2^{n+i}-2^{3i-1})\,A_n(i-1)C_n(i-1),\\
&\quad\text{当 } j=2,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]<i\le\left[\frac{n}{2}\right],\ n\ge 3;\\
&2^{n+i}\frac{2n-3i+1}{n-i}C_{n+1}(i-1),\quad \text{当 } j=4,\ 1\le i\le\left[\frac{n+1}{2}\right],\ n\ge 2;\\
&8,\quad \text{当 } j=8,\ i=1,\ n\ge 2;\\
&2^{n+2}+64n-168,\quad \text{当 } j=8,\ i=2,\ n\ge 3;\\
&C_n(i-1)\Big(2^{3i-1}A_n(i-1)\\
&\ +(2^{n+i-1}-2^{3i-4})\frac{(i-1)A_n(i-2)B_n(i-1)}{n-2i+1}\Big),\\
&\quad\text{当 } j=8,\ 3\le i\le\left[\frac{n}{2}\right],\ n\ge 3;\\
&C_{n-1}(i-2)\Big(2^{3i-1}+(2^{n+i-1}-2^{3i-4})A_n(i-2)B_n(i-1)\Big),\\
&\quad\text{当 } j=8,\ \left[\frac{n}{2}\right]<i\le\left[\frac{n+1}{2}\right],\ n\ge 4;\\
&(2^{n+i-1}-2^{3i-4})A_n(i-2)C_n(i-2),\\
&\quad\text{当 } j=8,\ \left[\frac{n+1}{2}\right]<i\le\left[\frac{n}{2}\right]+1,\ n\ge 3;
\end{aligned}
$$

0, 否则.

证 我们仅对 $j=4$, $n\ge 2$, $1\le i\le[\frac{n+1}{2}]$ 时的情形给出证明. 由引理 2.3, 当 $1\le i\le[\frac{n+1}{2}]$, $g_{i_4}(n)=4g_{(i-1)_1}(n-1)$.

运用引理 2.4,

$$g_{i_4}(n)=2^{n+i}\frac{2(n-1)-3(i-1)}{n-1-(i-1)}C_{n+1}(i-1)=2^{n+i}\frac{2n-3i+1}{n-i}C_{n+1}(i-1).$$

其它情形可类似地证明.

3 一般梯图的亏格分布

已知图 $G_0=(V,E)$, 令 n 是正整数. 在 G_0 的边 u_0u 和 v_0v 上分别依次都增加 n 个顶点 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n$, 和 $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ 且增加边 u_lv_l, 表示为 a_l 使得 a_l 是平行边. 其中, $1\le l\le n$. 从而得到梯图 G_n.

定理 3.1 已知 G_n 是上述梯图. 令 $g_i(G_n)$ 和 $g_{h_j}(n)$ 分别表示 G_n 中亏格为 i 的嵌入的数目和曲面集 $\mathcal{S}_j^n$ 中亏格为 h 的曲面的数目. 那么 $g_i(G_n)$ 是 $g_{h_j}(n)$ 的线性组合, 其中 $1\le j\le 11$, $0\le h\le i$, $n\ge 1$.

证 令 T_n 是 G_n 的支撑树使得 a_l 是上树边且 u_0u_1,u_nu,v_0v_1,v_nv 是树边, 其中, $1\le l\le n$. 则可得到 G_n 的一个联树 $\widetilde{T}_n$. 从而 G_n 的嵌入曲面集为 $\{AR_1^nBR_2^nCR_3^nDR_4^n\}$.

其中，$R_1^n, R_2^n, R_3^n, R_4^n$ 如第 2 节中定义．在 $\widetilde{T}_n$ 中去掉 u_k, v_k $(1 \le k \le n)$ 以及和它们关联的半边和边再添加边 u_0u, v_0v 形成一个联树，记为 $\widetilde{T}$. 显然 $\widetilde{T}$ 是 G_0 的一个联树，因此 $\{ABCD\}$ 是 G_0 的曲面集．设 $\gamma(ABCD)=\alpha$, 则

$$\gamma(AR_1^nBR_2^nCR_3^nDR_4^n)=\gamma(A_0R_{l_1}^nB_0R_{l_2}^nC_0R_{l_3}^nD_0R_{l_4}^n)+\alpha,$$

其中 $\gamma(A_0B_0C_0D_0)=0$ 且 $\{R_{l_1}^n, R_{l_2}^n, R_{l_3}^n, R_{l_4}^n\}=\{R_1^n, R_2^n, R_3^n, R_4^n\}$. 下证在 $\mathcal{S}_j^n(1\le j\le 11)$ 中存在 S 使得 $A_0R_{l_1}^nB_0R_{l_2}^nC_0R_{l_3}^nD_0R_{l_4}^n \sim S$. 对 $A_0B_0C_0D_0$ 的字母数 m 进行归纳．令 $F=A_0R_{l_1}^nB_0R_{l_2}^nC_0R_{l_3}^nD_0R_{l_4}^n$. 由于若 $a\in A_0B_0C_0D_0$, 则 $a^-\in A_0B_0C_0D_0$, 因此在下面的证明中把 a 和 a^- 视为同一个字母．由引理 2.1 当 $m=0,1,2,3$ 时，结论成立．

假设对 $k(k<m)$ 结论成立．考虑 m 时的情形，若存在 a 使得 aa^- 或 a^-a 在 A_0, B_0, C_0, D_0 中之一，运用运算 3, $F\sim A_1R_{l_1}^nB_1R_{l_2}^nC_1R_{l_3}^nD_1R_{l_4}^n$, 使得 $A_1B_1C_1D_1$ 有 $m-1$ 个字母．否则，根据包含在 A_0, B_0, C_0, D_0 中的字母数可分为三种情形如下，不妨设 $a\ne b\ne c\ne d$:

(1) 存在某个线性序至少包含 4 个字母.

不妨设 $abcd\in A_0$. 那么 b^-a^-, c^-b^- 或 d^-c^- 属于 F. 因此运用运算 2, ab, bc 或 cd 可以用一个字母取代.

(2) 每一个线性序包含少于 4 个字母且存在一个线性序包含 3 个字母.

不妨设 $abc\in A_0$. 如果 a^-, b^-, c^- 中有两个字母同属于一个线性序，那么结论成立．否则，F 形如

$$abcR_{l_1}^nc^-B_1R_{l_2}^nC_1b^-C_2R_{l_3}^nD_1a^-R_{l_4}^n.$$

若 $B_1\ne\emptyset$, 则 F 形如

$$abcR_{l_1}^nc^-dB_2R_{l_2}^nC_3d^-b^-C_2R_{l_3}^nD_1a^-R_{l_4}^n.$$

运用引理 1.3 及运算 2 可得

$$\begin{aligned}&abcR_{l_1}^nc^-dB_2R_{l_2}^nC_3d^-b^-C_2R_{l_3}^nD_1a^-R_{l_4}^n\\&=bcR_{l_1}^nc^-dB_2R_{l_2}^nC_3d^-b^-C_2R_{l_3}^nD_1a^-R_{l_4}^na\\&\sim bd^-cR_{l_1}^nc^-dB_2R_{l_2}^nC_3b^-C_2R_{l_3}^nD_1a^-R_{l_4}^na\\&\sim bcR_{l_1}^nc^-B_2R_{l_2}^nC_3b^-C_2R_{l_3}^nD_1a^-R_{l_4}^na\end{aligned}$$

其中，$bcc^-B_2C_3b^-C_2D_1a^-a$ 有 $m-1$ 个字母．否则，若 $C_2\ne\emptyset$, 则 F 形如

$$abcR_{l_1}^nc^-R_{l_2}^nb^-dC_3R_{l_3}^nD_2d^-a^-R_{l_4}^n.$$

运用引理 1.3 及运算 2 可得

$$\begin{aligned}&abcR_{l_1}^nc^-R_{l_2}^nb^-dC_3R_{l_3}^nD_2d^-a^-R_{l_4}^n\\&\sim ad^-bcR_{l_1}^nc^-R_{l_2}^nb^-dC_3R_{l_3}^nD_2a^-R_{l_4}^n\\&\sim abcR_{l_1}^nc^-R_{l_2}^nb^-C_3R_{l_3}^nD_2a^-R_{l_4}^n\end{aligned}$$

其中，$abcc^-b^-C_3D_2a^-$ 包含 $m-1$ 个字母.

(3) 每一个线性序包含 2 个字母

那么 F 形如

$$abR_{l_1}^nb^-cR_{l_2}^nc^-dR_{l_3}^nd^-a^-R_{l_4}^n,$$

$$abR_{l_1}^nb^-a^-R_{l_2}^ncdR_{l_3}^nd^-c^-R_{l_4}^n$$

或

$$abR_{l_1}^n cdR_{l_2}^n d^- c^- R_{l_3}^n b^- a^- R_{l_4}^n.$$

由引理 1.3,

$$abR_{l_1}^n b^- cR_{l_2}^n c^- dR_{l_3}^n d^- a^- R_{l_4}^n \sim ad^- bR_{l_1}^n b^- cR_{l_2}^n c^- dR_{l_3}^n a^- R_{l_4}^n.$$

通过运用第 (2) 种情形，结论成立.

由运算 2,

$$abR_{l_1}^n b^- a^- R_{l_2}^n cdR_{l_3}^n d^- c^- R_{l_4}^n \sim aR_{l_1}^n a^- R_{l_2}^n cR_{l_3}^n c^- R_{l_4}^n,$$
$$abR_{l_1}^n cdR_{l_2}^n d^- c^- R_{l_3}^n b^- a^- R_{l_4}^n \sim aR_{l_1}^n cR_{l_2}^n c^- R_{l_3}^n a^- R_{l_4}^n.$$

因此由归纳法结论成立.

参 考 文 献

[1] Gross J L, Furst M.L. Hierarcy of Imbedding Distribution Invariants of a Graph. *J. Graph Theory*, 1987, 11: 205–220

[2] McGeoch L A. Algorithms for Two Graph Problems: Computing Maximum-genus Imbeddings and the Two-server Problem. Computer Science Dept., Carnegie Mellon University, PA: Ph.D Thesis, 1987

[3] Furst M L, Gross J L, Statman R. Genus Distributions for Two Classes of Graphs. *J. Combin. Theory (B)*, 1989, 46: 22–36

[4] Tesar E H. Genus Distribution of Ringel Ladders. *Discrete Math.*, 2000, 216: 235–252

[5] Liu Y P. Advances in Combinatorial Maps. Beijing: Northern Jiaotong University Press, 2003 (in Chinese)

[6] Wan L X, Liu Y P. Orientable Embedding Distributions by Genus for Certain Type of Non-planar Graphs (I). *Ars Combin.*, 2006, 79: 97–105

[7] Wan L X, Liu Y P. On Embedding Genus Distribution of Ladders and Crosses. *Applied Mathematics Letters*, to appear

[8] Liu Y P. Embeddability in Graphs. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publisher, 1995

Genus Distritution of General Ladders

WAN Liangxia

(*Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing* 100084)

(*Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044)

(*E-mail: wanliangxia@126.com*)

Abstract In this paper, expressions of the genus distribution for certain sets of surfaces are provided. Based on joint trees, the genus distribution of general ladders can be obtained by using the surface sorting method.

Key words joint tree; surface sorting method; ladders; surface; embedding; genus; genus distribution

MR(2000) Subject Classification 05C10; 05C30

Chinese Library Classification O175.5