系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(3) (2009, 3), 360–366

一类具偏差变元的 Liénard 型方程周期解的存在与惟一性*

刘 炳 文

(嘉兴学院数学与信息科学学院， 嘉兴 314001)

摘要 研究了一类具偏差变元的 Liénard 型方程

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t).$$

利用重合度理论，获得了该方程存在惟一 T- 周期解的若干新结论，改进推广了有关文献中的已有结果.

关键词 Liénard 型方程，偏差变元，周期解，重合.

MR(2000) 主题分类号 35L65

1 引 言

考虑具偏差变元的 Liénard 型方程

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t), \tag{1.1}$$

其中 $f,\ \tau,\ p: R\to R$ 和 $g: R\times R\to R$ 为连续函数， τ 和 p 为 T- 周期的， g 关于 t 为 T-周期的，且 $T>0$. 最近以来，有关方程 (1.1) 周期解问题的研究已经取得了相当丰富的结果 (见文献 [1–7]). 然而，已有的这些文献大多只考虑方程 (1.1) 周期解的存在性，而有关方程 (1.1) 周期解存在与惟一性还鲜见文献进行研究，这就使得继续研究具偏差变元的 Liénard 型方程周期解的存在与惟一性既有理论意义又有实践意义.

本文引入以下记号

$$|x|_k=\Big(\int_0^T|x(t)|^k\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{k}},\quad |x|_\infty=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|.$$

$$X=\{x|x\in C^1(R,\ R),\ x(t+T)=x(t),\ \forall\ t\in R\},\text{定义范数为 }\|x\|_X=\max\{|x|_\infty,\ |x'|_\infty\},$$

$$Y=\{x|x\in C(R,\ R),\ x(t+T)=x(t),\ \forall\ t\in R\},\text{定义范数为}\|x\|_Y=|x|_\infty.$$

* 国家自然科学基金 (10801047) 和浙江省教育厅自然科学基金 (20070605) 资助课题.
收稿日期：2007-03-12.

则 X, Y 均为 Banach 空间. 在 X 上定义线性算子

$$L: D(L) \subset X \longrightarrow Y,\ Lx = x'', D(L) = \{x | x \in X, x'' \in C(R,\ R)\}, \tag{1.2}$$

定义非线性算子 $N: X \longrightarrow Y$,

$$Nx = -f(x(t))x'(t) - g(t, x(t-\tau(t))) + p(t). \tag{1.3}$$

易得

$$\mathrm{Ker}L = R,\quad \text{且 } \mathrm{Im}L = \Big\{x | x \in Y,\ \int_0^T x(s)\mathrm{d}s = 0\Big\}.$$

因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子. 令投影算子 $P: X \longrightarrow \mathrm{Ker}L$ 和 $Q: Y \longrightarrow Y/\mathrm{Im}L$ 为

$$Px(t) = x(0) = x(T),\quad Qx(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{d}s.$$

则 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$ 且 $\mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L$. 令 $L_P = L|_{D(L)\cap \mathrm{Ker}P}$, 易证 L_P 是可逆的，且其逆为

$$L_P^{-1}: \mathrm{Im}L \longrightarrow D(L) \cap \mathrm{Ker}P,\ L_P^{-1}y(t) = -\frac{t}{T}\int_0^T (t-s)y(s)\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)y(s)\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

为了方便，我们引入下面的条件.

(A_0) 假设存在非负常数 C_1 和 C_2 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le C_1|x_1 - x_2|,\quad |f(x)| \le C_2,\quad \forall x_1, x_2, x \in R.$$

2 几个引理

由 (1.3) 和 (1.4) 易知，算子方程 $Lx = \lambda Nx$ 与下列方程等价

$$x'' + \lambda[f(x(t))x'(t) + g(t, x(t-\tau(t)))] = \lambda p(t). \tag*{$(2.1)_\lambda$}$$

引理 2.1 (Mawhin 延拓定理)[3] 设 X, Y 均为 Banach 空间， $L: D(L) \subset X \longrightarrow Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子， $N: \overline{\Omega} \longrightarrow Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的，且 Ω 为 X 中的有界开集，又假设下列条件成立

1) $Lx \ne \lambda Nx, \forall x \in \partial\Omega \cap D(L), \forall \lambda \in (0,\ 1)$;

2) $Nx \notin \mathrm{Im}L, \forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$;

3) $\deg\{QN,\ \Omega \cap \mathrm{Ker}L,\ 0\} \ne 0$;

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\Omega \cap D(L)$ 中至少有一解.

引理 2.2 (Wirtinger 不等式)[2,8] 设 $x \in C^2(R, R)$ 且 $x(t+T) = x(t)$, 则

$$|x'(t)|_2^2 \le \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 |x''(t)|_2^2. \tag{2.2}$$

引理 2.3 假设存在常数 $d > 0$ 使得下列条件之一成立

(A_1) $x(g(t, x) - p(t)) < 0$, $\forall\ t \in R$, $|x| \ge d$;

(A_2) $x(g(t,x)-p(t))>0, \forall\, t\in R, |x|\geq d.$
又设 $x(t)$ 为方程 $(2.1)_\lambda$ 的任意 T- 周期解，则有

$$|x|_\infty \leq d+\frac{1}{2}\sqrt{T}|x'|_2. \tag{2.3}$$

证 设 $x(t)$ 为方程 $(2.1)_\lambda$ 的任一 T- 周期解．由 0 到 T 积分 $(2.1)_\lambda$ 有

$$\int_0^T [g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\mathrm{d}t=0.$$

从而存在 $\xi\in[0,\ T]$ 使得

$$g(\xi,x(\xi-\tau(\xi)))-p(\xi)=0.$$

因此，结合 (A_1)(或 (A_2)), 我们有

$$|x(\xi-\tau(\xi))|<d.$$

令 $\xi-\tau(\xi)=mT+t_0$, 其中 $t_0\in[0,T]$ 且 m 为一个整数．容易得到

$$|x(t)|=\left|x(t_0)+\int_{t_0}^t x'(s)\mathrm{d}s\right|\leq d+\int_{t_0}^t |x'(s)|\mathrm{d}s,\quad t\in[t_0,\ t_0+T],$$

且

$$|x(t)|=|x(t-T)|=\left|x(t_0)-\int_{t-T}^{t_0} x'(s)\mathrm{d}s\right|\leq d+\int_{t-T}^{t_0}|x'(s)|\mathrm{d}s,\quad t\in[t_0,\ t_0+T].$$

结合上面两式及 Schwarz 不等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}|x|_\infty&=\max_{t\in[t_0,\ t_0+T]}|x(t)|\leq \max_{t\in[t_0,\ t_0+T]}\left\{d+\frac{1}{2}\Big(\int_{t_0}^t|x'(s)|\mathrm{d}s+\int_{t-T}^{t_0}|x'(s)|\mathrm{d}s\Big)\right\}\\&\leq d+\frac{1}{2}\sqrt{T}|x'|_2.\end{aligned}$$

引理 2.3 证毕．

引理 2.4 假设 (A_0) 和 (A_1) (或 (A_2)) 成立．又假设下列条件成立

(A_3) 存在非负常数 b 使得

$$C_2\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}<1,\ \text{且}\ |g(t,x_1)-g(t,x_2)|\leq b|x_1-x_2|,\quad \forall\ t,x_1,x_2\in R;$$

若 $x(t)$ 为方程 (1.1) 的任一 T- 周期解，则有

$$|x'|_\infty\leq\frac{1}{2}\frac{[bd+\max\{|g(t,0)|:0\leq t\leq T\}+|p|_\infty]T}{1-(C_2\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi})}:=D. \tag{2.4}$$

证 设 $x(t)$ 为方程 (1.1) 的任一 T- 周期解．结合条件 (A_1) (或 (A_2)), 我们由引理 2.3 的证明方法容易得到 (2.3) 仍然成立．将 (1.1) 两边同乘以 $x''(t)$ 并从 0 到 T 积分，由 (2.2),

(2.3), (A_3) 和 Schwarz 不等式，我们有

$$\begin{aligned}|x''|_2^2 &\le C_2\frac{T}{2\pi}|x''|_2^2+\int_0^T[|g(t,x(t-\tau(t)))-g(t,0)|+|g(t,0)|+|p(t)|]\cdot|x''(t)|\mathrm{d}t\\ &\le C_2\frac{T}{2\pi}|x''|_2^2+b|x|_\infty\sqrt{T}|x''|_2+[\max\{|g(t,0)|:0\le t\le T\}+|p|_\infty]\sqrt{T}|x''|_2\\ &\le\Big(C_2\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}\Big)|x''|_2^2+[bd+\max\{|g(t,0)|:0\le t\le T\}+|p|_\infty]\sqrt{T}|x''|_2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

结合 (2.5) 和 (A_3) 有

$$|x''|_2\le\frac{[bd+\max\{|g(t,0)|:0\le t\le T\}+|p|_\infty]\sqrt{T}}{1-(C_2\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi})}.\tag{2.6}$$

由 $x(0)=x(T)$ 可知，存在常数 $\zeta\in[0,T]$ 使得

$$x'(\zeta)=0.$$

注意到 $x'(t)$ 为 T- 周期的，类似于 (2.3) 式的证明过程我们有

$$|x'|_\infty\le\frac{1}{2}\sqrt{T}|x''|_2.\tag{2.7}$$

因此，由 (2.6) 和 (2.7) 可得

$$|x'|_\infty\le\frac{1}{2}\frac{[bd+\max\{|g(t,0)|:0\le t\le T\}+|p|_\infty]T}{1-(C_2\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi})}:=D.$$

引理 2.4 证毕.

引理 2.5　假设 (A_1) (或 (A_2)) 成立. 又假设下列条件成立

(A_4)　假设 (A_0) 成立， $g(t,x)$ 关于 x 为严格单调函数，且存在非负常数 b 使得

$$C_1D\frac{T^2}{4\pi}+C_2\frac{T}{2\pi}+b\frac{T^2}{4\pi}<1,\ \ 且\ |g(t,x_1)-g(t,x_2)|\le b|x_1-x_2|,\quad\forall\ t,x_1,x_2\in R.$$

则方程 (1.1) 至多存在一个 T- 周期解.

证　设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为方程 (1.1) 的两个 T- 周期解. 令 $Z(t)=x_1(t)-x_2(t)$, 我们有

$$Z''(t)+(f(x_1(t))x_1'(t)-f(x_2(t))x_2'(t))+(g(t,x_1(t-\tau(t)))-g(t,x_2(t-\tau(t))))=0.\tag{2.8}$$

注意到 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为 T- 周期解，由 0 到 T 积分 (2.8) 有

$$\int_0^T(g(t,x_1(t-\tau(t)))-g(t,x_2(t-\tau(t))))\mathrm{d}t=0.$$

因此，由积分中值定理可知，存在常数 $\gamma\in[0,\ T]$ 使得

$$g(\gamma,x_1(\gamma-\tau(\gamma)))-g(\gamma,x_2(\gamma-\tau(\gamma)))=0.\tag{2.9}$$

令　$\gamma-\tau(\gamma)=nT+\widetilde{\gamma}$, 其中 $\widetilde{\gamma}\in[0,\ T]$ 且 n 为整数. 结合 (2.9) 和 (A_4) 可知，存在常数 $\widetilde{\gamma}\in[0,\ T]$ 使得

$$Z(\widetilde{\gamma})=x_1(\widetilde{\gamma})-x_2(\widetilde{\gamma})=x_1(\gamma-\tau(\gamma))-x_2(\gamma-\tau(\gamma))=0.\tag{2.10}$$

注意到 $Z(t)$ 为 T- 周期的，类似于 (2.3) 式的证明过程我们有

$$|Z|_\infty \le \frac{1}{2}\sqrt{T}|Z'|_2. \tag{2.11}$$

将 (2.8) 两边同乘以 $Z''(t)$ 并从 0 到 T 积分，由 (2.2), (2.11) 和 Schwarz 不等式，我们有

$$|Z''|_2^2 \le C_2|Z'|_2|Z''|_2 + C_1D|Z|_\infty\sqrt{T}|Z''|_2 + b|Z|_\infty\sqrt{T}|Z''|_2,$$

于是

$$|Z''|_2^2 \le \Big(C_1D\frac{T^2}{4\pi} + C_2\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi}\Big)|Z''|_2^2. \tag{2.12}$$

注意到 $Z(t), Z'(t)$ 和 $Z''(t)$ 为 T- 周期的连续函数，根据 (A_4), (2.10) 和 (2.12) 有

$$Z(t) \equiv Z'(t) \equiv Z''(t) \equiv 0, \quad \forall\ t \in R.$$

因此， $x_1(t) \equiv x_2(t)$, $\forall\ t \in R$. 因此，方程 (1.1) 至多存在一个 T- 周期解．引理 2.5 证毕．

3 主要结果

定理 3.1 设 (A_1) (或(A_2)) 成立．又假设条件 (A_4) 成立．则 (1.1) 存在唯一的 T- 周期解．

证 由引理 2.5 可知， (1.1) 至多存在一个 T- 周期解．因此，我们只需证明 (1.1) T- 周期解的存在性．为此，我们将利用延拓定理证明 (1.1) 至少存在一个 T- 周期解．首先证明 $(2.1)_\lambda$ 所有 T- 周期解组成的集合为有界集．

设 $x(t)$ 为 $(2.1)_\lambda$ 的任一 T- 周期解．将方程 $(2.1)_\lambda$ 两边同乘以 $x''(t)$ 并从 0 到 T 积分，结合 (2.2), (2.3), (A_4) 和 Schwarz 不等式，类似于 (2.5), 我们有

$$\begin{aligned} |x''|_2^2 &= -\lambda\int_0^T f(x(t))x'(t)x''(t)\mathrm{d}t - \lambda\int_0^T g(t,x(t-\tau(t)))x''(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^T p(t)x''(t)\mathrm{d}t \\ &\le \Big(C_2\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi}\Big)|x''|_2^2 + [bd + \max\{|g(t,0)| : 0 \le t \le T\} + |p|_\infty]\sqrt{T}|x''|_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

由 (A_4) 可知，存在正常数 D_1 和 D_2 使得

$$|x''|_2 < D_1, \tag{3.2}$$

且

$$|x'|_2 < D_2, \quad |x|_\infty < D_2. \tag{3.3}$$

由 $x(0) = x(T)$ 可知，存在常数 $\overline{\zeta} \in [0,T]$ 使得

$$x'(\overline{\zeta}) = 0, \quad |x'(t)| = \Big|x'(\overline{\zeta}) + \int_{\overline{\zeta}}^t x''(s)\mathrm{d}s\Big| \le \sqrt{T}|x''|_2 < \sqrt{T}D_1, \quad \forall\ t \in [0,\ T]. \tag{3.4}$$

因此，结合 (3.3) 且 (3.4) 可得，存在常数 $M_1 > \sqrt{T}D_1 + D_2$ 使得

$$\|x\|_X \le |x|_\infty + |x'|_\infty < M_1.$$

若 $x \in \Omega_1 = \{x | x \in \mathrm{Ker}L \cap X,$ 且 $Nx \in \mathrm{Im}L\}$, 则存在常数 M_2 使得

$$x(t) \equiv M_2, \text{ 且 } \int_0^T [g(t, M_2) - p(t)]\mathrm{d}t = 0, \tag{3.5}$$

因此

$$|x(t)| \equiv |M_2| < d, \quad \forall\, x(t) \in \Omega_1. \tag{3.6}$$

令 $M = M_1 + d + 1$. 设

$$\Omega = \{x | x \in X, |x|_\infty < M, |x'|_\infty < M\}.$$

由 (1.3) 和 (1.4) 易知 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的．根据 (3.5), (3.6) 和 $M > \max\{M_1, d\}$ 可知引理 2.1 中的条件 1) 和 2) 成立.

进而，定义连续函数 $H_1(x,\mu)$ 和 $H_2(x,\mu)$ 为

$$H_1(x,\mu) = (1-\mu)x - \mu \cdot \frac{1}{T}\int_0^T [g(t,x) - p(t)]\mathrm{d}t, \quad \mu \in [0\ \ 1],$$

$$H_2(x,\mu) = -(1-\mu)x - \mu \cdot \frac{1}{T}\int_0^T [g(t,x) - p(t)]\mathrm{d}t, \quad \mu \in [0\ \ 1].$$

由 (A_1) 或 (A_2) 成立，结合同伦不变性容易验证引理 2.1 中的条件 3) 成立.

综合上面的讨论，由延拓定理可知 (1.1) 至少存在一个 T- 周期解．从而定理 3.1 得证.

注 3.1　文献 [6] 的主要结论是在建立下列不等式

$$|x|_\infty \le d + \sqrt{T}|x'|_2$$

的基础上获得的，这一不等式显然要弱于本文引理中的 (2.3) 式．因此，文献 [6] 中的所有结论都可以归结为本文的特殊情形.

4　应用举例

例 4.1　设 $g(t,x) = \frac{1}{3\pi}x, \forall t, x \in R$. 则 Liénard 方程

$$x''(t) + \frac{1}{8}(\cos x(t))x'(t) + g(t, x(t - \cos^2 t)) = \frac{1}{3\pi}\mathrm{e}^{\sin t - 1} \tag{4.1}$$

存在惟一的 2π- 周期解.

证　由 (4.1), 我们有 $d = 1$, $b = \frac{1}{3\pi}, C_1 = C_2 = \frac{1}{8}, \tau(t) = \cos^2 t$, $T = 2\pi$ 且 $p(t) = \frac{1}{3\pi}\mathrm{e}^{\sin t - 1}$, 于是

$$\frac{1}{2}\frac{[bd + \max\{|g(t,0)| : 0 \le t \le T\} + |p|_\infty]T}{1 - (C_2\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi})} := D = \frac{[\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi}] \times \pi}{1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{3}} = \frac{8}{13},$$

$$C_1 D\frac{T^2}{4\pi} + C_2\frac{T}{2\pi} + b\frac{T^2}{4\pi} < \frac{239}{312} < 1.$$

容易验证 (A_2) 和 (A_4) 成立．因此，由定理 3.1 可知方程 (4.1) 存在惟一的 2π- 周期解.

注 4.1 (4.1) 是非常简单的一类 Liénard 方程. 由于 $f(x)=\frac{1}{8}\cos x$ 且 $\tau(t)=\cos^2 t$. 因此，已有文献 [1–7] 及其参考文献中的结论不能用来判定方程 (4.1) 存在惟一的 2π- 周期解. 从而本文的结论改进和推广了已有文献的相应结论.

参 考 文 献

[1] Burton T A. Stability and Periodic Solution of Ordinary and Functional Differential Equations. Academic Press, Orland, FL., 1985.

[2] Mawhin J. Periodic solutions of some vector retarded functional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, **45**: 588–603.

[3] Gaines R E, Mawhin J. Coincide Degree and Nonlinear Differential Equations. Lecture Notes in Math., Spring-Verlag, Belin, 1977.

[4] Lu S, Ge W. Periodic solutions for a kind of Liéneard equations with deviating arguments. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **249**: 231–243.

[5] Lu S, Ge W. Sufficient conditions for the existence of periodic solutions to some second order differential equations with a deviating argument. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **308**: 393–419.

[6] Liu B, Huang L. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of Liénard equation with a deviating argument. *Applied Mathematics Letters*, 2008, **21**(1): 56–62.

[7] Lu S, Ge W. Periodic solutions for a kind of second order differential equation with multiple deviating arguments. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **146**: 195–209.

[8] Hardy G H, Littlewood J E and Polya G. Inequalities. London: Cambridge University Press, 1964.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF PERIODIC SOLUTIONS FOR A KIND OF LIÉNARD-TYPE EQUATIONS WITH A DEVIATING ARGUMENT

LIU Bingwen

(*College of Mathematics and Information Science, Jiaxing University, Jiaxing* 314001)

Abstract In this paper, by using the coincidence degree theory, new results are obtained for the existence and uniqueness of periodic solutions of the following Liénard-type equation with a deviating argument:

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t).$$

Some existing related results in the literature are improved and extended.

Key words Liénard-type equation, deviating argument, periodic solution, coincidence degree.