系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(6) (2009, 6), 779–785

三阶非线性奇异边值问题正解的存在唯一性*

许晓婕　　费祥历

(中国石油大学 (华东) 数学与计算科学学院，东营 257061)

摘要　用混合单调方法研究了三阶非线性边值问题正解的存在唯一性. 定理的证明非常自然而且完善了现有的结论.

关键词　边值问题，正解，奇异，存在性，唯一性.

MR(2000) 主题分类号　34B15, 34B18

1　引　言

本文主要研究下面三阶奇异边值问题正解的存在唯一性

$$
(\mathrm{BVP})\begin{cases} (\mathrm{E}) \quad u'''(t)+\lambda q(t)f(u(t),u'(t))=0, \quad t\in(0,1), \\ (\mathrm{BC}) \quad \begin{cases} u(0)=0, \\ \alpha u'(0)-\beta u''(0)=0, \\ \gamma u'(1)+\delta u''(1)=0, \end{cases} \end{cases}
$$

其中常数 $\lambda>0,\alpha,\beta,\delta,\gamma\geq 0$ 满足 $\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$, 且 $q\in C((0,1),(0,+\infty))$. 更一般地，$q$ 允许在 $t=0$ 和 (或) $t=1$ 奇异.

常微分方程的边值问题常用来描述大量的物理、生物和化学现象. 最近，很多人研究了三阶边值问题 [1−15] 并得到了一些正解的存在性结果，但是关于正解的存在唯一性却几乎没人研究. 本文应用混合单调算子的不动点定理 (见 [16–20]), 给出三阶奇异边值问题正解的存在唯一性结果.

2　预备知识

令 P 是 Banach 空间 E 中的一个正规锥， $e\in P$ 满足 $\|e\|\leq 1$, $e\neq\theta$. 定义

$$Q_e=\{x\in P|x\neq\theta,\ \text{存在常数}\ m,\ M>0\ \text{使得}\ me\leq x\leq Me\}.$$

* 中国石油大学校内基金 (Nos.y070815) 项目资助.
收稿日期：2007-09-12, 收到修改稿日期：2008-07-07.

定义 2.1[19] 假设 $A: Q_e \times Q_e \to Q_e$. 如果 $A(x,y)$ 关于 x 是单调不减的，关于 y 是单调不增的，即：如果 $x_1 \le x_2 (x_1, x_2 \in Q_e)$, 则对任意的 $y \in Q_e$, 有 $A(x_1, y) \le A(x_2, y)$; 并且如果 $y_1 \le y_2 (y_1, y_2 \in Q_e)$ 则对任意的 $x \in Q_e$ ，有 $A(x, y_1) \ge A(x, y_2)$, 那么称 A 是一个混合单调算子. 如果存在 $x^* \in Q_e$ ，使得 $A(x^*, x^*) = x^*$, 则称 x^* 是 A 的一个不动点.

定理 2.1[16] 假设 $A: Q_e \times Q_e \to Q_e$ 是一个混合单调算子且存在一个常数 θ, $0 \le \theta < 1$ 使得

$$A\Big(tx, \frac{1}{t}y\Big) \ge t^\theta A(x,y), \quad \forall x, y \in Q_e, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

则 A 存在唯一的不动点 $x^* \in Q_e$. 并且，对任意的 $(x_0, y_0) \in Q_e \times Q_e$,

$$x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

满足

$$x_n \to x^*, \quad y_n \to x^*,$$

其中

$$\|x_n - x^*\| = o(1 - r^{\theta^n}), \quad \|y_n - x^*\| = o(1 - r^{\theta^n}),$$

$0 < r < 1$, r 是一个与 x_0, y_0 有关的常数.

定理 2.2[16,19] 假设 $A: Q_e \times Q_e \to Q_e$ 是一个混合单调算子且存在一个常数 $\theta \in (0,1)$ 使得 (1) 成立. 如 x_λ^* 是方程

$$A(x,x) = \lambda x, \quad \lambda > 0$$

在 Q_e 中的唯一解，那么当 $\lambda \to \lambda_0$ 时， $\|x_\lambda^* - x_{\lambda_0}^*\| \to 0$. 如果 $0 < \theta < \frac{1}{2}$, 那么 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 隐含 $x_{\lambda_1}^* \ge x_{\lambda_2}^*$, $x_{\lambda_1}^* \ne x_{\lambda_2}^*$ 且

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|x_\lambda^*\| = 0, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \|x_\lambda^*\| = +\infty.$$

3 正解的存在唯一性

本节考虑奇异边值问题 (BVP). 为了简化讨论，先给出下面的假设

(C_1) $K(t,s)$ 是方程

$$-u'''(t) = 0, \quad t \in (0,1)$$

满足边界条件 (BC) 的格林函数;

(C_2) $k(t,s)$ 是方程

$$-u''(t) = 0, \quad t \in (0,1)$$

满足边界条件

$$(\mathrm{BC}^*) \begin{cases} \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0 \end{cases}$$

的格林函数.

引理 3.1 格林函数 $k(t,s)$ 满足下面的条件

$$\begin{cases} (\mathrm{R}_1) \quad k(t,s) \le k(t,t), \quad k(s,s) \ge k(t,s), \quad (t,s) \in [0,1]\times[0,1], \\ (\mathrm{R}_2) \quad \dfrac{\rho}{(\alpha+\beta)(\delta+\gamma)} k(t,t)k(s,s) \le k(t,s), \quad (t,s) \in [0,1]\times[0,1]. \end{cases}$$

注 1　众所周知

$$K'(t,s)=k(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases}(\beta+\alpha s)(\delta+\gamma(1-t)), & 0\le s\le t\le 1,\\ (\beta+\alpha t)(\delta+\gamma(1-s)), & 0\le t\le s\le 1,\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\rho=\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$.

设 $B=C[0,1]$. 则 B 是一个 Banach 空间，其中范数 $\|u\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$. 令 $D=\{u\in C^1[0,1]:u(0)=0\}$. 并且令

$$P=\{u\in B:\ u(t)\ge 0 \text{ 且在 } [0,1] \text{ 上是上凸函数}\}.$$

则 P 是 B 的一个正规锥.

显然， $u=u(t)$ 是边值问题 (BVP) 的一个解，当且仅当 u 满足下面方程

$$u(t)=\lambda\int_0^1 K(t,s)q(s)f(u(s),u'(s))\mathrm{d}s,\quad u\in D, \tag{3}$$

或者满足方程

$$u'(t)=\lambda\int_0^1 k(t,s)q(s)f(Tu'(s),u'(s))\mathrm{d}s,\quad u'\in B, \tag{4}$$

其中

$$u(t)=\int_0^t u'(s)\mathrm{d}s:=Tu'(t). \tag{5}$$

定理 3.1　假设 $f(u,v)=g(v)+h(u),\quad (u,v)\in(0,+\infty)\times[0,\infty)$, 其中 $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续且单调不减，且 $h:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 连续且单调不增. 对任意的 $t\in(0,1)$ 和 $x>0$, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$g(tx)\ge t^\theta g(x), \tag{6}$$

$$h(t^{-1}x)\ge t^\theta h(x). \tag{7}$$

假设 $q\in C((0,1),(0,\infty))$ 满足

$$\int_0^1 q(s)s^{-\theta}\mathrm{d}s<+\infty,$$

则边值问题 (BVP) 存在唯一解 $u_\lambda^*(t)$. 进一步，如果 $0<\theta<\frac{1}{2}$, 则 $0<\lambda_1<\lambda_2$ 隐含 $u_{\lambda_1}^*\le u_{\lambda_2}^*$, $u_{\lambda_1}^*\ne u_{\lambda_2}^*$ 且

$$\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda^*\|=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\|u_\lambda^*\|=+\infty.$$

证　因为 (7) 成立，　令 $t^{-1}x=y$, 当 $x>0$, $t\in(0,1)$ 时，我们有

$$h(y)\ge t^\theta h(ty),$$

则

$$h(ty)\le\frac{1}{t^\theta}h(y),\quad t\in(0,1),\ y>0. \tag{8}$$

令 $y=1$, 则由不等式 (8) 可得

$$h(t) \le \frac{1}{t^\theta} h(1), \quad t \in (0,1). \tag{9}$$

由式 (7), (8) 和 (9), 可得

$$h(t^{-1}x) \ge t^\theta h(x), \quad h\Big(\frac{1}{t}\Big) \ge t^\theta h(1), \quad h(tx) \le \frac{1}{t^\theta} h(x),$$
$$h(t) \le \frac{1}{t^\theta} h(1), \quad t \in (0,1),\ x>0.$$

类似地，由式 (6), 可得

$$g(tx) \ge t^\theta g(x), \quad g(t) \ge t^\theta g(1), \quad t \in (0,1),\ x>0. \tag{10}$$

令 $t=\frac{1}{x}$, $x>1$, 我们有

$$g(x) \le x^\theta g(1), \quad x \ge 1. \tag{11}$$

令 $e(t)=\frac{\rho}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}k(t,t)$. 显然 $\|e\|<1$, 令

$$Q_e = \Big\{x \in P \mid \frac{1}{M} e(t) \le x(t) \le M e(t),\ t \in (0,1)\Big\}, \tag{12}$$

其中 $M>1$ 且满足

$$\begin{aligned} M > \max\Big\{ &\Big[\lambda \frac{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}{\rho}\Big(g(1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s \\ &+ \Big(\frac{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}{\beta\delta}\Big)^\theta h(1)\int_0^1 q(s)s^{-\theta}\mathrm{d}s\Big)\Big]^{\frac{1}{1-\theta}}, \\ &\Big[\lambda\Big(g(1)\int_0^1 q(s)k(s,s)e^\theta(s)\mathrm{d}s + h(1)\int_0^1 q(s)k(s,s)\mathrm{d}s\Big)\Big]^{-\frac{1}{1-\theta}} \Big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

对任意的 $u' \in Q_e$, 有

$$Tu'(t) = \int_0^t u'(s)\mathrm{d}s \le \int_0^t Me(s)\mathrm{d}s \le Mt \le M, \tag{14}$$

和

$$\begin{aligned} Tu'(t) &= \int_0^t u'(s)\mathrm{d}s \ge \int_0^t \frac{1}{M} e(s)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{M}\int_0^t \frac{\rho}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)} \frac{(\beta+\alpha s)(\delta+\gamma(1-s))}{\rho}\mathrm{d}s \\ &\ge \frac{1}{M}\int_0^t \frac{\beta\delta}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}\mathrm{d}s \ge \frac{1}{M}\frac{\beta\delta}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)} t. \end{aligned} \tag{15}$$

因此，由式 (9)–(11), (14), (15), 对任意的 $u' \in Q_e$, 有

$$\begin{aligned} g(u'(t)) &\le g(Me(t)) \le g(M) \le M^\theta g(1), \\ h(Tu'(t)) &\le h\Big(\frac{1}{M}\frac{\beta\delta}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)} t\Big) \\ &\le M^\theta \Big(\frac{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}{\beta\delta}\Big)^\theta t^{-\theta} h(1), \end{aligned} \tag{16}$$

和

$$h(Tu'(t)) \geq h(M) \geq M^{-\theta}h(1), \quad g(u'(t)) \geq g\Big(\frac{1}{M}e(t)\Big) \geq M^{-\theta}e^{\theta}(t)g(1). \tag{17}$$

对任意的 $x, y \in Q_e$, 定义

$$T_\lambda(x,y)(t) = \lambda \int_0^1 k(t,s)q(s)(g(x(s)) + h(Ty(s)))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

首先我们证明 $T: Q_e \times Q_e \to Q_e$. 对任意的 $x, y \in Q_e$, 由式 (16) 可得

$$\begin{aligned}
T_\lambda(x,y)(t) &= \lambda \int_0^1 k(t,s)q(s)\Big(g(x(s)) + h(Ty(s))\Big)\mathrm{d}s \\
&\leq \lambda k(t,t)\Big[\int_0^1 q(s)g(x(s))\mathrm{d}s + \int_0^1 q(s)h(Ty(s)))\mathrm{d}s\Big] \\
&\leq \lambda k(t,t)\Big[M^\theta g(1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s + M^\theta\Big(\frac{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}{\beta\delta}\Big)^\theta h(1)\int_0^1 s^{-\theta}q(s)\mathrm{d}s\Big] \\
&\leq Me(t), \quad t \in [0,1],
\end{aligned} \tag{18}$$

并且由式 (17) 可得

$$\begin{aligned}
&T_\lambda(x,y)(t) \\
&= \lambda \int_0^1 k(t,s)q(s)\Big(g(x(s)) + h(Ty(s))\Big)\mathrm{d}s \\
&\geq \lambda k(t,t)\frac{\rho}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}\Big[\int_0^1 k(s,s)q(s)g(x(s))\mathrm{d}s + \int_0^1 k(s,s)q(s)h(Ty(s))\mathrm{d}s\Big] \\
&\geq \lambda e(t)\Big[M^{-\theta}g(1)\int_0^1 k(s,s)e^\theta(s)q(s)\mathrm{d}s + M^{-\theta}h(1)\int_0^1 k(s,s)q(s)\mathrm{d}s\Big] \\
&\geq \frac{1}{M}e(t), \quad t \in [0,1].
\end{aligned} \tag{19}$$

因此算子 T 有意义且有 $T(Q_e \times Q_e) \in Q_e$. 同时对任意的 $l \in (0,1)$, $x, y \in Q_e$, 有

$$\begin{aligned}
T_\lambda(lx, l^{-1}y)(t) &= \lambda \int_0^1 k(t,s)q(s)\Big[g(lx(s)) + h(l^{-1}Ty(s))\Big]\mathrm{d}s \\
&\geq \lambda \int_0^1 k(t,s)q(s)\Big[l^\theta g(x(s)) + l^\theta h(Ty(s))\Big]\mathrm{d}s \\
&= l^\theta T_\lambda(x,y)(t), \quad t \in [0,1].
\end{aligned}$$

因此定理 2.1 和定理 2.2 的条件都满足，所以存在唯一解 $v_\lambda^* \in Q_e$ 使得 $T_\lambda(v_\lambda^*, v_\lambda^*) = v_\lambda^*$. 很容易验证对每个给定的 $\lambda > 0$, v_λ^* 是 (4) 的唯一正解. 并且由定理 2.2 可知，如果 $0 < \theta < \frac{1}{2}$, 则 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 隐含 $v_{\lambda_1}^*(t) \leq v_{\lambda_2}^*(t)$, $v_{\lambda_1}^*(t) \neq v_{\lambda_2}^*(t)$ 和

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|v_\lambda^*\| = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \|v_\lambda^*\| = +\infty.$$

由式 (5) 可知，对每个给定的 $\lambda > 0$, $u_\lambda^* = Tv_\lambda^*$ 是边值问题 (BVP) 的唯一正解. 并且如果 $0 < \theta < \frac{1}{2}$, 有 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 隐含 $u_{\lambda_1}^*(t) \leq u_{\lambda_2}^*(t)$, $u_{\lambda_1}^*(t) \neq u_{\lambda_2}^*(t)$ 和

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda^*\| = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda^*\| = +\infty.$$

定理 3.1 证毕.

例 考虑三阶边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+\lambda t^{-m}(1-t)^{-n}(\mu u^{-a}+(u')^{b})=0, \quad 0<t<1,\\ u(0)=0,\\ \alpha u'(0)-\beta u''(0)=0,\\ \gamma u'(1)+\delta u''(1)=0, \end{cases} \tag{20}$$

其中 $\lambda,\ a,\ b>0,\ \max\{a,b\}<1,\ \mu\geq 0,\ 0<m<1,\ 0<n<1$.

令 $\theta=\max\{a,b\}<1$, $h(x)=\mu x^{-a}$, $g(y)=y^{b}$, $q(t)=t^{-m}(1-t)^{-n}$ 并且当 $l\in(0,1)$, $y>0$ 和 $x>0$ 时

$$g(ly)=l^{b}y^{b}\geq l^{\theta}g(y), \quad h(l^{-1}x)=\mu l^{a}x^{-a}\geq l^{\theta}h(x).$$

显然，当 $0<m+\theta<1$ 时

$$\int_0^1 s^{-m}(1-s)^{-n}s^{-\theta}\mathrm{d}s<+\infty.$$

定理 3.1 保证上面方程存在唯一解 $u_\lambda^*(t)$. 另外，如果 $0<\theta=\max\{a,b\}<\frac{1}{2}$, 则 $0<\lambda_1<\lambda_2$ 隐含 $u_{\lambda_1}^*\leq u_{\lambda_2}^*$, $u_{\lambda_1}^*\neq u_{\lambda_2}^*$, 且

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\|u_\lambda^*\|=0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\|u_\lambda^*\|=+\infty.$$

参 考 文 献

[1] Yang Guangchong. Exisrence of solutions to the third-order nonlinear differential equations arising in boundary layer theory. *Applied Mathematics Letters*, 2003, **16**: 827–832.

[2] Chyan C J and Ludford G K. Positive solutions for singular higher order nonlinear equations. *Diff. Eqs. Dyn. Sys.*, 1994, **2**: 153–160.

[3] Yao Qinliu. Solution and positive solution for a semilinear third-order two-point boundary value problem. *Applied Mathematics Letter* , 2004, **17**: 1171–1175.

[4] Yao Qinliu. The existence of solution for a third-order two-point boundary value problem. *Applied Mathematics Letter*, 2002, **15**: 227–232.

[5] Yang Chuming, Weng Peixuan. Creen functions and positive solutions for boundary value problems of third-order difference equations. *Computers and Mathematics with Applications,* 2007, **54**: 567–578.

[6] Kong Lingju and Kong Qingkai, Zhang Binggen. Positive solutions of boundary value problems for third-order functional difference equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2002, **44**: 451–459.

[7] Agarwal R P, Henderson J. Positive solutions and nonlinear eigenvalue problems for third-order difference equations. *Computers and Math. Applic.*, 1998, **36**: 347–355.

[8] Chu Jifeng, Zhou Zhongcheng. Positive solutions for singular non-linear third-order periodic boundary value problems. *Nonlinear Analysis*, 2006, **64**: 1528–1542.
[9] Britney Hopkins, Nickolai Kosmatov. Third-order boundary value problems with sign-changing solutions. *Nonlinear Analysis*. 2007, **67**: 126–137.
[10] Sun Yongping. Positive solutions of singular third-order three-point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **306**: 589–603.
[11] Li Shuhong. Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **323**: 413–425.
[12] Liu Zeqing, Jeong Sheok Ume, Anderson Douglas R, Kang Shin Min. Twin monotone positive solutions to a singular nonlinear third-order differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **334**: 299–313.
[13] Feliz Manuel Minhos. On some third order nonlinear boundary value problems: Existence, location and multiplicity results. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **339**: 1342–1353.
[14] Alberto Cabada. The method of lower and upper solutions for third-order periodic boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, **195**: 568–589.
[15] 蒋达清．三阶非线性微分方程正解的存在性．东北师大学报自然科学版， 1996, **4**: 6–10.
[16] Lin X N, Li X Y and Jiang D Q. Existence and uniqueness of solutions for singular fourth-order boundary value problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, **196**: 155–161.
[17] Gupta P C. Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation at resonance. *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, **135**: 208–225.
[18] Guo D and Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press Inc., New York, 1988.
[19] Guo D. Fixed point of mixed monotone operators with applications. *Appl. Anal.*, 1998, **31**: 215–224.
[20] Guo D. The Order Methods in Nonlinear Analysis. Shandong Technical and Science Press, Jinan, 2000 (in Chinese).

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF POSITIVE SOLUTIONS FOR THIRD-ORDER NONLINEAR SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

XU Xiaojie FEI Xiangli

(*School of Mathematics and Computational Science, China University of Petroleum* (*East China*), *Dongying* 257061)

Abstract Using the mixed monotone method, the existence and uniqueness of positive solutions for third-order nonlinear singular boundary value problem is established. The obtained theorems generalize the existing results.

Key words Boundary value problem, positive solutions, singular, existence, uniqueness.