系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(7) (2009, 7), 925–936

一类微分代数系统的受控不变分布及其不变性*

王文涛 李 媛
(沈阳工业大学理学院，沈阳 110178)

摘要 针对一类非线性微分代数系统，利用 M 导数方法，给出了受控不变分布的概念，并讨论了此类微分代数系统受控不变分布的一些性质．给出了一个计算包含在系统输出核 ($\ker E(h)$) 内的最大受控不变分布的算法，同时讨论了该算法的一些性质．最后，给出一个例子说明如何利用给出的算法计算微分代数系统的包含在系统输出核内的最大受控不变分布．

关键词 微分代数系统，受控不变分布，输出核，算法．

MR(2000) 主题分类号 34D05, 93D15

1 引 言

在线性系统理论中，不变子空间的概念起着重要作用，系统的很多性质，如系统的结构特性、能控性、能观性等都与此概念有着密切关系．对于非线性系统，不变分布的概念被提出，而且在非线性系统理论中，不变分布概念起着与不变子空间概念在线性系统理论中类似的作用，如非线性系统的非交互控制问题与干扰解耦问题 – 非线性系统的两个重要问题，都可利用不变分布的概念来研究 [1]．特别是受控不变分布和包含在系统输出核内的最大受控不变分布在非线性系统的研究中有着广泛的应用 [1]．

自上世纪 70 年代，在经济系统、受限机械系统、机器人系统、化工过程和电力系统等实际系统中，一类称为微分代数系统 (广义系统，奇异系统) 被发现，并受到众多学者的关注 (见文 [2–5])．近 15 年，受非线性系统微分几何理论的推动，非线性微分代数系统的研究取得一些进展，主要包括完全线性化、输入输出解耦、干扰解耦、输出跟踪等 [6–7]．最近，针对一类约束为线性的仿射非线性微分代数系统，零动态及受控不变分布的概念被提出，一些性质及应用也被考虑 [8]．但是，对于更具有一般性的约束为非线性的微分代数系统的研究甚少，而且有一类约束为非线性的微分代数系统在电力系统的控制模型中有广泛应用背景 [9–12]，故研究此类系统的问题更具有实际意义．因此，针对此类微分代数系统，研究其受控不变分布问题，把非线性系统的受控不变分布理论推广到此类系统，为进一步利用这些理论研究系统的一些控制问题提供基础．

* 辽宁省教育基金 (20060621) 资助课题．
收稿日期：2008-03-08, 收到修改稿日期：2008-08-07.

本文利用 M 导数方法，给出受控不变分布的概念，并探讨该系统受控不变分布的一些性质. 同时研究此类微分代数系统的包含在系统输出核内的最大受控不变分布问题，也探讨此类微分代数系统的包含在系统输出核内的最大受控不变分布的算法及其性质. 最后，给出一个例子，说明如何利用该算法计算此类微分代数系统的包含在系统输出核内的最大受控不变分布.

2 系统的描述和定义

考虑一类非线性微分代数系统

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,z) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x,z)u_i, \\ &0 = p(x,z), \\ &y = h(x,z), \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $x \in R^n$ 是状态向量， $z \in R^s$ 为约束向量， $u \in R^m$ 为输入向量， $y \in R^m$ 为输出向量； $f(x,z)$, $g_i(x,z)$ $i = 1,2,\cdots,m$: $R^n \times R^s \to R^n$ 为光滑 n 维向量场； $p(x,z)$: $R^n \times R^s \to R^s$ 为光滑 s 维向量场； $h(x,z)$: $R^n \times R^s \to R^m$ 为光滑 m 维向量场.

系统 (2.1) 在 (x_0,z_0) 满足相容的初始条件，即 $p(x_0,z_0) = 0$, 并满足在某连通开集 $\Omega \subset R^n \times R^s$ 上

$$\operatorname{rank}\Big(\frac{\partial p}{\partial z}\Big) = s, \quad \forall (x,z) \in \Omega.$$

系统 (2.1) 可以简记为

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,z) + g(x,z)u, \\ &0 = p(x,z), \\ &y = h(x,z). \end{aligned} \tag{2.2}$$

设 $M_f\lambda(x,z)$ 表示函数 $\lambda(x,z)$ 关于向量场 f 的 M 导数，定义为 [10]

$$M_f\lambda = E(\lambda)f,$$

其中

$$E(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}\Big(\frac{\partial p}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

高阶 M 导数定义为

$$M_f^k\lambda = M_f(M_f^{k-1}\lambda), \quad k > 1.$$

设 $f(x,z)$ 和 $g(x,z)$ 是 n 维向量场， M 括号定义为 [10]

$$mad_f g = [f,g]_m = E(g)\cdot f - E(f)\cdot g.$$

设 $\omega(x,z)$: $R^n \times R^s \to R^n$ 为 n 维余向量场， $\omega(x,z)$ 关于向量场 f 的 M 导数定义为

$$M_f\omega = f^{\mathrm{T}}\cdot(E(\omega^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}} + \omega\cdot E(f).$$

由定义，M 导数和 M 括号满足与 L 导数和 L 括号类似的性质. 例如对于向量场 $f(x,z)$, $g(x,z)$ 和 $p(x,z)$ 、余向量场 $\omega(x,z)$ 以及函数 $\alpha(x,z)$, 有

1)　$M_f\langle\omega,g\rangle(x,z)=\langle M_f\omega(x,z),g(x,z)\rangle+\langle\omega(x,z),[f,g]_m(x,z)\rangle$,

2)　$M_{\alpha f}\omega(x,z)=\alpha(M_f\omega(x,z))+\langle\omega(x,z),f(x,z)\rangle E(\alpha(x,z))$,

3)　$[\alpha f,g]_m(x,z)=\alpha(x,z)[f,g]_m(x,z)-(M_g\alpha(x,z))f(x,z)$,

4)　$[f,[g,p]_m]_m+[g,[p,f]_m]_m+[p,[f,g]_m]_m=0$.

1)– 4) 的证明与 L 导数和 L 括号的相应性质的证明类似，如通过直接计算可得

1)

$$\begin{aligned}M_f\langle\omega,g\rangle&=E(\langle\omega,g\rangle)\cdot f=[f^{\mathrm T}(E(\omega^{\mathrm T}))^{\mathrm T}+\omega E(f)]g+\omega E(g)f-\omega E(f)g\\&=\langle M_f\omega,g\rangle+\langle\omega,[f,g]_m\rangle,\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}M_{\alpha f}\omega&=(\alpha f)^{\mathrm T}(E(\omega^{\mathrm T}))^{\mathrm T}+\omega E(\alpha f)=\alpha f^{\mathrm T}(E(\omega^{\mathrm T}))^{\mathrm T}+\alpha\omega\cdot E(f)+\omega\cdot fE(\alpha)\\&=\alpha(M_f\omega)+\langle\omega,f\rangle E(\alpha),\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}[\alpha f,g]_m&=E(g)\alpha f-E(\alpha f)g=E(g)\alpha f-E(\alpha f)g=\alpha E(g)f-(E(\alpha)f+\alpha E(f))g\\&=\alpha[f,g]_m-(M_g\alpha)f,\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}&[f,[g,p]_m]_m+[g,[p,f]_m]_m+[p,[f,g]_m]_m\\=&E([g,p]_m)f-E(f)[g,p]_m+E([p,f]_m)g-E(g)[p,f]_m+E([f,g]_m)p-E(p)[f,g]_m\\=&E(E(p)g-E(g)p)f-E(f)(E(p)g-E(g)p)+E(E(f)p-E(p)f)g\\&-E(g)(E(f)p-E(p)f)+E(E(g)f-E(f)g)p-E(p)(E(g)f-E(f)g)\\=&(E(E(p))g+E(p)E(g)-E(E(g))p-E(g)E(p))f-E(f)E(p)g+E(f)E(g)p\\&+(E(E(f))p+E(f)E(p)-E(E(p))f-E(p)E(f))g-E(g)E(f)p+E(g)E(p)f\\&+(E(E(g))f+E(g)E(f)-E(E(f))g-E(f)E(g))p-E(p)E(g)f+E(p)E(f)g\\=&0.\end{aligned}$$

设 $f_1(x,z),f_2(x,z),\cdots,f_k(x,z)$ 为在区域 $\varOmega$ 上定义的 k 个 n 维向量场， $\varDelta$ 表示由这 k 个向量场构成的分布，即

$$\varDelta=\mathrm{span}\{f_1(x,z),f_2(x,z),\cdots,f_k(x,z)\}.$$

在区域 $\varOmega$ 上，一个分布 $\varDelta=\mathrm{span}\{f_1(x,z),f_2(x,z),\cdots,f_k(x,z)\}$ 被称为 M 对合的，如果对于 $1\le i,j\le k$, 有

$$[f_i,f_j]_m\in\varDelta.$$

在区域 $\varOmega$ 上，一个分布 $\varDelta$ 被称为关于向量场 $g(x,z)$ 是 M 不变的，如果对于任何 $\tau\in\varDelta$, 有

$$[g,\tau]_m\in\varDelta.$$

对于系统 (2.1) 或 (2.2), 考虑状态反馈

$$u=\alpha(x,z)+\beta(x,z)v,\tag{2.3}$$

其中 $\beta(x,z)$ 在 $\Omega\subset R^n\times R^s$ 内非奇异. 实施反馈 (2.3), 系统 (2.1) 转化为

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f(x,z)+g(x,z)\alpha(x,z)+g(x,z)\beta(x,z)v,\\&0=p(x,z),\\&y=h(x,z),\end{aligned}\tag{2.4}$$

记

$$\begin{aligned}&\widetilde{f}=f(x,z)+g(x,z)\alpha(x,z),\\&\widetilde{g}=g(x,z)\beta(x,z).\end{aligned}\tag{2.5}$$

定义 2.1 对于非线性微分代数系统 (2.1), 一个分布 Δ 被称为在区域 Ω 上为 M 受控不变的, 如果在区域 Ω 上, 存在反馈对 (α,β) 使得 Δ 关于向量场 $\widetilde{f},\widetilde{g}$ 是 M 不变的, 即对于所有 $(x,z)\in\Omega$, 有

$$[\widetilde{f},\Delta]_m(x,z)\subset\Delta(x,z),\tag{2.6a}$$

$$[\widetilde{g},\Delta]_m(x,z)\subset\Delta(x,z).\tag{2.6b}$$

定义 2.2 对于非线性微分代数系统 (2.1), 一个分布 Δ 被称为局部 M 受控不变的, 如果对于每一点 $(x,z)\in\Omega$, 都存在 (x,z) 的一个邻域 Ω^0, 使得 Δ 为 Ω^0 上的 M 受控不变分布.

如果记

$$G=\mathrm{span}\{g_1(x,z),g_2(x,z),\cdots,g_m(x,z)\},$$

其中 $g_1(x,z),g_2(x,z),\cdots,g_m(x,z)$ 由系统 (2.1) 定义. 由定义 2.1, 利用 M 导数和 M 括号的性质可以证明下面引理.

引理 2.1 设 Δ 是一个 M 对合分布, 如果 Δ 和 $\Delta+G$ 在区域 Ω 上非奇异, 则 Δ 为局部 M 受控不变分布当且仅当

$$\begin{aligned}&[f,\Delta]_m\subset\Delta+G,\\&[g_i,\Delta]_m\subset\Delta+G,\quad 1\le i\le m.\end{aligned}\tag{2.7}$$

证 设 $\tau\in\Delta$, 由 M 括号的性质, 有

$$[\widetilde{f},\tau]_m=[f+g\alpha,\tau]_m=[f,\tau]_m+\sum_{j=1}^m[g_j,\tau]_m\alpha_j-\sum_{j=1}^m(M_\tau\alpha_j)g_j,\tag{2.8}$$

$$[\widetilde{g}_i,\tau]_m=\sum_{j=1}^m[g_j\beta_{ji},\tau]_m=\sum_{j=1}^m[g_j,\tau]_m\beta_{ji}-\sum_{j=1}^m(M_\tau\beta_{ji})g_j,\tag{2.9}$$

因此得: 当 $[\widetilde{f},\Delta]_m\subset\Delta$, $[\widetilde{g},\Delta]_m\subset\Delta$ 时, 有 $[f,\Delta]_m\subset\Delta+G$, $[g_i,\Delta]_m\subset\Delta+G$, $i=1,2,\cdots,m$.

反之, 由于 $[f,\Delta]_m\subset\Delta+G$, $[g_i,\Delta]_m\subset\Delta+G$, $i=1,2,\cdots,m$, 以及 Δ 的 M 对合性和 Δ 与 $\Delta+G$ 的非奇异性, 得

$$[f,\Delta]_m+G\subset\Delta,\ [g_i,\Delta]_m+G\subset\Delta,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

再由 (2.8) 式及 (2.9) 式, 得 $[\widetilde{f},\Delta]_m\subset\Delta$,$[\widetilde{g},\Delta]_m\subset\Delta$.

3 受控不变分布的反馈不变性

在这一节，我们将讨论非线性微分代数系统 M 受控不变分布的反馈不变性．考虑非线性微分代数系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f(x,z)+g(x,z)u,\\&0=p(x,z),\\&y=h(x,z).\end{aligned}\tag{3.1}$$

对系统 (3.1) 实施状态反馈

$$u=\alpha(x,z)+\beta(x,z)v,$$

得

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f(x,z)+g(x,z)\alpha(x,z)+g(x,z)\beta(x,z)v,\\&0=p(x,z),\\&y=h(x,z),\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&\dot{x}=\widetilde{f}(x,z)+\widetilde{g}(x,z)u,\\&0=p(x,z),\\&y=h(x,z),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 $\widetilde{f}(x,z)$ 和 $\widetilde{g}(x,z)$ 由 (2.5) 式定义．由此，我们有下面的定理．

定理 3.1 如果一个分布 $\varDelta$ 是非线性微分代数系统 (3.1) 的局部 M 受控不变分布，则 $\varDelta$ 也是非线性微分代数系统 (3.2) 的局部 M 受控不变分布；反之，如果分布 $\varDelta$ 是非线性微分代数系统 (3.2) 的局部 M 受控不变分布，则 $\varDelta$ 也是非线性微分代数系统 (3.1) 的局部 M 受控不变分布．即非线性微分代数系统的 M 受控不变分布具有状态反馈的不变性．

证 根据定义 2.2 和引理 2.1, 我们知道：如果 $\varDelta$ 是非线性微分代数系统 (3.1) 的局部 M 受控不变分布，则

$$\begin{aligned}&[f,\varDelta]_m\subset\varDelta+G,\\&[g_i,\varDelta]_m\subset\varDelta+G,\quad 1\leq i\leq m,\end{aligned}$$

由于 $\beta(x,z)$ 为非奇异的，我们得

$$G=\widetilde{G}.$$

其中 $\widetilde{G}=\mathrm{span}\{\widetilde{g}_1(x,z),\widetilde{g}_2(x,z),\cdots,\widetilde{g}_m(x,z)\}$. 因此得

$$\varDelta+G=\varDelta+\widetilde{G}.$$

再根据 M 括号的性质，如果 τ 和 ν 为向量场， α 为标量函数，有

$$[\alpha\tau,\nu]_m(x,z)=\alpha[\tau,\nu]_m(x,z)-(M_\nu\alpha)\tau(x,z),$$

这样，考虑 (2.5) 式和 (2.7) 式，通过直接计算，得

$$\begin{aligned}&[\widetilde{f},\varDelta]_m\subset\varDelta+G=\varDelta+\widetilde{G},\\&[\widetilde{g}_i,\varDelta]_m\subset\varDelta+G=\varDelta+\widetilde{G},\quad 1\leq i\leq m.\end{aligned}$$

这说明 $\varDelta$ 为非线性微分代数系统 (3.2) 的局部 M 受控不变分布．

注意到系统 (3.2) 可经过状态反馈 $v=-\beta^{-1}(x,z)\alpha(x,z)+\beta^{-1}(x,z)w$ 转化为系统 (3.1), 由前一段的证明得，当分布 Δ 为系统 (3.2) 的局部 M 受控不变分布时， Δ 也是系统 (3.1) 的局部 M 受控不变分布.

4 包含在系统输出核 ($\ker(E(h))$) 内的受控不变分布

受控不变分布的概念对于研究系统通过反馈使得一些输出独立于某些输入有着特别的意义. 包含在系统输出核内的受控不变分布在系统解耦等问题的研究中起着重要作用. 因此，有必要将此概念推广到非线性微分代数系统，为探讨此概念与非线性微分代数系统解耦等问题的联系奠定一些理论基础.

首先，对于系统 (2.1), 考虑一切满足 (2.7) 且包含在系统输出核 $\ker(E(h))$ 内的分布构成的分布族，记为 $\Im(f,g,\ker(E(h)))$. 由于这个分布族对于加法有封闭性，因此它有最大元素，即分布族所有元素的和. 根据引理 2.1, 分布族 $\Im(f,g,\ker(E(h)))$ 的最大元素自然是包含在系统输出核 $\ker(E(h))$ 内最大受控不变分布的侯选对象. 在这一节，我们将给出一个计算分布族 $\Im(f,g,\ker(E(h)))$ 的最大元素的算法，并讨论算法的一些性质.

受控不变分布算法

第 0 步 建立 $\Omega_0=\mathrm{span}\{E(h)\}$.

第 k 步 建立

$$\Omega_k=\Omega_{k-1}+M_f(\Omega_{k-1}\cap G^\perp)+\sum_{j=1}^{m}M_{g_j}(\Omega_{k-1}\cap G^\perp). \tag{4.1}$$

引理 4.1 假设存在一个整数 k^* 使得 $\Omega_{k^*+1}=\Omega_{k^*}$, 则对于一切 $k>k^*$, 有 $\Omega_k=\Omega_{k^*}$. 如果 $\Omega_{k^*}\cap G^\perp$ 和 $\Omega_{k^*}^\perp$ 光滑，则 $\Omega_{k^*}^\perp$ 是 $\Im(f,g,\ker(E(h)))$ 的最大元素.

证 由算法 (4.1) 的结构，我们知道引理 4.1 的第 1 部分明显成立，因此我们仅需要证明引理的第 2 部分.

首先，由 $\Omega_{k^*+1}=\Omega_{k^*}$ 可得，对于 $1\le j\le m$, 有

$$M_{g_j}(\Omega_{k^*}\cap G^\perp)\subset\Omega_{k^*},$$

如果我们记 $f=g_0$, 上式可扩展到 $j=0$. 设 ω 是 $\Omega_{k^*}\cap G^\perp$ 中的余向量场， τ 是 $\Omega_{k^*}^\perp$ 中向量场，我们有

$$\langle M_{g_j}\omega,\tau\rangle=M_{g_j}\langle\omega,\tau\rangle-\langle\omega,[g_j,\tau]_m\rangle,$$

因为 $M_{g_j}\omega\in\Omega_{k^*}$, 可得

$$\langle M_{g_j}\omega,\tau\rangle=0,$$

注意到 $\tau\in\Omega_{k^*}^\perp$, 我们得

$$\langle\omega,\tau\rangle=0,$$

因此

$$\langle\omega,[g_j,\tau]_m\rangle=0,$$

由于 $\Omega_{k^*}\cap G^\perp$ 光滑和 $[g_j,\tau]_m$ 零化 $\Omega_{k^*}\cap G^\perp$ 中的每一个余向量，即对于 $0\le j\le m$, 有

$$[g_j,\tau]_m\in\Omega_{k^*}^\perp+G$$

或

$$[g_j, \Omega_{k^*}^{\perp}]_m \subset \Omega_{k^*}^{\perp} + G,$$

这说明 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 是 $\Im(f, g, \ker(E(h)))$ 中的元素.

设 $\overline{\Delta}$ 是 $\Im(f, g, \ker(E(h)))$ 中的另一元素，我们来证明 $\overline{\Delta} \subset \Omega_{k^*}^{\perp}$. 首先注意到如果 ω 是 $\overline{\Delta}^{\perp} \cap G^{\perp}$ 的余向量场，而 τ 是 $\overline{\Delta}$ 中的向量时，有

$$\langle M_{g_j}\omega, \tau\rangle = 0,$$

因此

$$M_{g_j}(\overline{\Delta}^{\perp} \cap G^{\perp}) \subset \overline{\Delta}^{\perp}.$$

这样，如果我们假设对于 $k \geq 0$, $\overline{\Delta}^{\perp} \subset \Omega_k$, 则

$$\Omega_{k+1} \subset \Omega_k + M_f(\Omega_k \cap G^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} M_{g_j}(\Omega_k \cap G^{\perp}) \subset \overline{\Delta}^{\perp},$$

注意到 $\Omega_0 = \mathrm{span}\{E(h)\} \subset \overline{\Delta}^{\perp}$, 我们有

$$\overline{\Delta} \subset \Omega_{k^*}^{\perp},$$

这说明 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 为 $\Im(f, g, \ker(E(h)))$ 的最大元素.

下面的引理指出算法 (4.1) 具有重要的反馈变换的不变性.

引理 4.2 设 $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ 是任何一组由 f, g 通过 $\widetilde{f} = f + g\alpha$, $\widetilde{g} = g\beta$ 所得到的向量场，则对于序列 (4.1) 的每一个余分布 Ω_k, 有

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + M_{\widetilde{f}}(\Omega_{k-1} \cap \widetilde{G}^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} M_{\widetilde{g}_j}(\Omega_{k-1} \cap \widetilde{G}^{\perp}),$$

其中 $\widetilde{G} = \mathrm{span}\{\widetilde{g}_1(x,z), \widetilde{g}_2(x,z), \cdots, \widetilde{g}_m(x,z)\}$.

证 首先，由矩阵 β 的非奇异性，得

$$\widetilde{G} = G,$$

根据 M 导数的性质，对于给定的余向量场 ω 、向量场 τ 和标量函数 λ, 有

$$M_{\lambda\tau}\omega = (M_\tau \omega)\lambda + \langle \omega, \tau\rangle E(\lambda),$$

如果 ω 是 $\Omega_{k-1} \cap G^{\perp}$ 中余向量场，则

$$M_{\widetilde{f}}\omega = M_f\omega + \sum_{i=1}^{m}(M_{g_i}\omega)\alpha_i + \sum_{i=1}^{m}\langle \omega, g_i\rangle E(\alpha_i),$$

$$M_{\widetilde{g}_i}\omega = \sum_{j=1}^{m}(M_{g_j}\omega)\beta_{ji} + \sum_{i=1}^{m}\langle \omega, g_j\rangle E(\beta_{ji}),$$

因为 $\omega \in G^{\perp}$, 得 $\langle \omega, g_j\rangle = 0$, 因此有

$$M_{\widetilde{f}}(\Omega_{k-1} \cap \widetilde{G}^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} M_{\widetilde{g}_j}(\Omega_{k-1} \cap \widetilde{G}^{\perp}) \subset M_f(\Omega_{k-1} \cap G^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} M_{g_j}(\Omega_{k-1} \cap G^{\perp}). \tag{4.2}$$

再由于矩阵 β 的非奇异性质，我们可以重写 $f=\widetilde{f}-\widetilde{g}\beta^{-1}\alpha$, $g=\widetilde{g}\beta^{-1}$, 这样，使用同样的论证过程，我们能证明 (4.2) 式的相反的结论. 因此， (4.2) 式的两边是相等的，即引理 4.2 得证.

为方便，我们引进分布序列 (4.1) 的所有元素的和，记为

$$\varDelta^*=(\varOmega_0+\varOmega_1+\cdots+\varOmega_k+\cdots).$$

对于分布序列 (4.1), 如果存在整数 k^* 使得 $\varOmega_{k^*}=\varOmega_{k^*+1}$, 我们称 $\varDelta^*$ 是可有限计算的. 如果 $\varDelta^*$ 可有限计算，则 $(\varDelta^*)^\perp=\varOmega_{k^*}^\perp$.

引理 4.3 假设 $\varDelta^*$ 可有限计算， $\varDelta^*$ 和 $(\varDelta^*)^\perp+G$ 非奇异，则 $(\varDelta^*)^\perp$ 为 M 对合且是包含在系统输出核 $\ker(E(h))$ 内的最大局部 M 受控不变分布.

证 由于 $\varDelta^*$ 和 $(\varDelta^*)^\perp+G$ 的非奇异性蕴涵 $(\varDelta^*)^\perp$ 和 $\varDelta^*\cap G^\perp$ 的光滑性，因此，我们仅需证明 $(\varDelta^*)^\perp$ 是 M 对合即可.

让 d 表示分布 $(\varDelta^*)^\perp$ 的维数，在任何点 (x^0,z^0), 总是可以发现 (x^0,z^0) 的一个邻域 $\varOmega^0$ 和一组向量场 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_d$ 使得

$$(\varDelta^*)^\perp=\mathrm{span}\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_d\}.$$

考虑分布

$$D=\mathrm{span}\{\tau_i:\ 1\le i\le d\}+\mathrm{span}\{[\tau_i,\tau_j]_m:\ 1\le i,j\le d\},$$

而暂时假设 D 在区域 $\varOmega^0$ 上非奇异，则在 D 中的每一个向量场 τ 能被表达为 $(\varDelta^*)^\perp$ 中的向量场 τ' 和向量场 τ'' 之和，而 τ'' 具有下面的形式

$$\tau''=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}c_{ij}[\tau_i,\tau_j]_m,$$

其中 $c_{ij}(1\le i,j\le d)$ 是 $\varOmega^0$ 上的光滑实值函数.

我们想证明对于 $1\le l\le m$, 有

$$[f,D]_m\subset D+G,\quad [g_l,D]_m\subset D+G, \tag{4.3}$$

考虑 D 中向量场 τ 的结构， (4.3) 式的两个结论分别等价于下面两个结论

$$[f,[\tau_i,\tau_j]_m]_m\subset D+G,\quad [g_l,[\tau_i,\tau_j]_m]_m\subset D+G. \tag{4.4}$$

根据 M 括号的 Jacobi 恒等式， (4.4) 式的左边分别产生下面两个等式

$$[f,[\tau_i,\tau_j]_m]_m=[\tau_i,[f,\tau_j]_m]_m-[\tau_j,[f,\tau_i]_m]_m,$$

$$[g_l,[\tau_i,\tau_j]_m]_m=[\tau_i,[g_l,\tau_j]_m]_m-[\tau_j,[g_l,\tau_i]_m]_m,$$

由于向量场 $[f,\tau_j]_m$ 和 $[g_l,\tau_j]_m$ 都属于 $(\varDelta^*)^\perp+G$ 且非奇异，故这些向量场能表示为 $(\varDelta^*)^\perp$ 中向量场 τ 与 G 中向量场 g 之和，因此有

$$[\tau_i,[f,\tau_j]_m]_m=[\tau_i,\tau+g]_m,$$

$$[\tau_i,[g_l,\tau_j]_m]_m=[\tau_i,\tau+g]_m.$$

注意到 $[\tau_i,g]_m\in(\Delta^*)^\perp+G$, 我们有

$$[\tau_i,[f,\tau_j]_m]_m=[\tau_i,\tau+g]_m\in D+(\Delta^*)^\perp+G=D+G,$$

$$[\tau_i,[g_l,\tau_j]_m]_m=[\tau_i,\tau+g]_m\in D+(\Delta^*)^\perp+G=D+G,$$

这蕴涵 (4.3) 成立．再考虑 $\ker(E(h))$ 的 M 对合性质，我们得

$$D\subset\ker(E(h)),$$

这说明 D 是 $\Im(f,g,\ker(E(h)))$ 中的元素．由定义，我们又有 $D\supset(\Delta^*)^\perp$, 而且 $(\Delta^*)^\perp$ 是 $\Im(f,g,\ker(E(h)))$ 的最大元素，这说明

$$D=(\Delta^*)^\perp,$$

即 $(\Delta^*)^\perp$ 中任何向量场的 M 括号仍然属于 $(\Delta^*)^\perp$, 也就是说 $(\Delta^*)^\perp$ 是 M 对合分布．

如果不假设 D 在区域 Ω^0 有常数维 (非奇异), 我们可以得，在 Ω^0 内使得 D 具有常数维的点构成的集合 $\overline{\Omega}$ 上， $D=(\Delta^*)^\perp$. 参见文献 [1] 知道， $\overline{\Omega}$ 在 Ω^0 中稠密．再根据文献 [1] 的引理 1.3.4, 得在整体 Ω^0 上， $D=(\Delta^*)^\perp$.

事实上，计算包含在系统输出核 $\ker(E(h))$ 内的局部最大受控不变分布将采用下面的方法：首先，建立

$$W_0(x,z)=E(h(x,z)).$$

假设 Ω_{k-1} 在 (x^0,z^0) 的某邻域内有常数维，比如说 σ_{k-1}, 这样， Ω_{k-1} 能由 Ω_{k-1} 的 σ_{k-1} 个线性独立的行生成．我们再用 $W_{k-1}(x,z)$ 表示由 Ω_{k-1} 的 σ_{k-1} 个线性独立行组成的 $\sigma_{k-1}\times n$ 矩阵，则 $\Omega_{k-1}\cap G^\perp(x,z)$ 中的余向量场 ω 可表示为 $\omega=\mu W_{k-1}(x,z)$, 而且函数 $\mu(x,z)$ 满足

$$\mu W_{k-1}(x,z)g(x,z)=0, \tag{4.5}$$

如果矩阵

$$A_{k-1}(x,z)=W_{k-1}(x,z)g(x,z),$$

在 (x^0,z^0) 的某邻域内有常数维，比如说 ρ_{k-1}, 则方程 (4.5) 的解空间有常数维 $(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1})$, 即存在一个 $(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1})\times\sigma_{k-1}$ 矩阵，记为 $S_{k-1}(x,z)$, 使得 $\Omega_{k-1}\cap G^\perp(x,z)$ 由 $S_{k-1}(x,z)W_{k-1}(x,z)$ 的行生成．因此， Ω_k 能由下面的计算确定

$$\begin{aligned}\Omega_k=\Omega_{k-1}&+\operatorname{span}\{M_f(S_{k-1}W_{k-1})_i\ ,\ 1\le i\le(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1})\}\\&+\operatorname{span}\{M_{g_l}(S_{k-1}W_{k-1})_i\ ,\ 1\le i\le(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1}),\ 1\le l\le m\},\end{aligned}$$

其中 $(S_{k-1}W_{k-1})_i$ 表示 $(S_{k-1}W_{k-1})$ 的第 i 行．

如果 Ω_k 在 (x^0,z^0) 的某邻域内有常数维，比如说 σ_k, 用 Ω_k 代替 Ω_{k-1}, 重复前面的过程，可获得 Ω_{k+1}. 如果对某正整数 k, 有 $\sigma_{k-1}=\sigma_k$, 则算法结束并可获得 $\Omega_k^\perp$.

从上述过程我们看到 Ω_k 和 $\Omega_k\cap G^\perp(x,z)$ 有常数维的假设是基本的．因此，我们说点 (x^0,z^0) 为受控不变分布算法的正则点，如果对所有 $k\ge0$, 余分布 Ω_k 和 $\Omega_k\cap G^\perp(x,z)$ 在 (x^0,z^0) 的某邻域内非奇异 (有常数维). 概括前面的讨论，我们有下面的结论．

定理 4.1 假设 (x^0,z^0) 是受控不变分布算法的正则点，则在 (x^0,z^0) 的某邻域 U^0 内， Δ^* 可有限计算且 Δ^* 和 $(\Delta^*)^\perp+G$ 非奇异．

5 一个算例

考虑一个定义在 R^5 上两个输入－两个输出的非线性微分代数系统，代数约束的维数 $s=1$, 其具体结构为

$$f(x,z)=\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1x_4 \\ x_3^2 \\ x_1 \end{bmatrix},\quad g_1(x,z)=\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1x_4 \\ x_3^2 \\ x_1 \end{bmatrix},\quad g_2(x,z)=\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1x_4 \\ x_3^2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

$$p(x,z)=x_1+x_2+x_4+x_5+z,$$

$$h_1(x,z)=x_1,$$

$$h_2(x,z)=x_2.$$

对于这个系统，我们有

$$W_0(x,z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

从而

$$A_0(x,z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix},$$

这样， $\sigma_0=2$ 和 $\rho_0=1$, 我们能选择

$$S_0=[\,-x_3 \quad 1\,],$$

因此有

$$\Omega_0\cap G^{\perp}=\mathrm{span}\{S_0W_0(x,z)\}=\mathrm{span}\{\omega\},$$

其中 $\omega=(-x_3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$. 由简单计算可得

$$M_f\omega=(-x_1x_4 \quad -x_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

$$M_{g_1}\omega=(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0),$$

$$M_{g_2}\omega=(-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

这样，作为 Ω_1 的基，我们可选择 $W_1(x,z)$ 为

$$W_1(x,z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此

$$A_1(x,z)=W_1(x,z)G(x,z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ x_3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

由此看出对所有的 (x,z), $\rho_1=2$, 即算法结束．事实上，建立

$$S_1(x,z)=[\,-x_3 \quad 1 \quad 0\,],$$

我们能容易地发现

$$S_1(x,z)W_1(x,z)=S_0(x,z)W_0(x,z)=\omega,$$

这蕴涵

$$M_f(\Omega_1\cap G^{\perp})\subset\Omega_1,$$
$$M_{g_1}(\Omega_1\cap G^{\perp})\subset\Omega_1,$$
$$M_{g_2}(\Omega_1\cap G^{\perp})\subset\Omega_1,$$

即 $k^*=1$. 因此， Ω_{k^*} 由 $W_1(x,z)$ 的行生成且

$$(\Omega_{k^*})^{\perp}=\ker(W_1)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

6 结 论

通过本文的讨论看出，借助 M 导数方法，受控不变分布的概念可推广到具有非线性约束的微分代数系统，并保持着一般非线性系统受控不变分布的一些性质，如反馈不变性．由此可以提出包含在系统输出核 $(\ker(E(h)))$ 内的最大受控不变分布，并给出其算法，而且这个最大受控不变分布及其算法也具有反馈不变性，并通过一个算例，说明了该算法的应用过程．

值得注意的是本文提出的非线性微分代数系统受控不变分布的概念及包含在系统输出核内的最大受控不变分布的概念与算法都是非线性系统对应概念和算法的直接推广，即当非线性微分代数系统退化为非线性系统 (约束变量的维数 $s=0$) 时，本文提出的受控不变分布的概念和包含在系统输出核内的最大受控不变分布的概念与算法也退化为非线性系统的对应概念与算法．特别是当利用约束方程消除约束将此类微分代数系统转化为一般非线性系统 (转化需要条件，而且表达的复杂性会增加) 时，本文所提出的 M 受控不变分布与受控不变分布是一致的．

可进一步研究的问题是如何应用所提出的受控不变分布的概念和算法研究非线性微分代数系统的解耦等一些综合控制问题．

参 考 文 献

[1] Isidori A. Nonlinear Control Systems. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1995.

[2] Luenberger D G. Dynamics equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(3): 312–321.

[3] You L S, Chen B S. Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic contrained hanical systems. *International Journal of Control*, 1993, **58**(4): 587–612.

[4] Gani R, Cameron I T. Modelling for dynamic simulation of chemical process. *Chemistry Engineering and Society*, 1992, **47**(6): 1311–1313.

[5] Krishnan H, McClamroch N H. Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems. *Automatica*, 1994, **30**(12): 1885–1897.

[6] Liu X P. Local disturbance decoupling of nonlinear singular systems. *International Journal of Control*, 1998, **70**(5): 685–702.

[7] Liu X P. Asymptotic output tracking of nonlinear differential-algebraic control systems. *Automatica*, 1998, **34**(3): 393–397.

[8] Wang W T, Liu X P, Zhao J. The zero dynamics of nonlinear singular control systems. Proceeding of the American Control Conference, Anchorage, 2002.

[9] Hill D J, Mareels I M Y. Stability theory for differential/algebraic systems with application to power systems. *IEEE*, 1990, **37**(11): 1416–1423.

[10] 王杰，陈陈．电力系统中微分代数模型的非线性控制．中国电机工程学报， 2001, **21**(8): 15–18.

[11] 王杰，陈陈，吴华，苏建设．多机电力系统参数自适应控制的设计理论与方法．中国电机工程学报， 2002, **22**(5): 5–9.

[12] 徐光虎，王杰，陈陈，曹国云．基于微分代数模型的 AC/DC 系统非线性控制器的设计．中国电机工程学报， 2005, **25**(7): 52–57.

CONTROLLED INVARIANT DISTRIBUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS AND THEIR INVARIANT PROPERTIES

WANG Wentao LI Yuan

(*College of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang* 110178)

Abstract In this paper, by means of M-derivative methods, the concept of controlled invariant distributions is introduced to a class of nonlinear differential-algebraic systems, and some invariant properties on this distribution are discussed. An algorithm of calculating the maximal controlled invariant distributions contained in the system output kernel is developed, and some properties on this algorithm are discussed. An example of calculating the maximal controlled invariant distributions contained in the system output kernel is provided to illustrate the results of the paper.

Key words Differential-algebraic systems, controlled invariant distributions, output kernel, algorithm.