系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(2) (2009, 2), 280–288

四元素 Heisenberg 群上次 Laplace 算子的平均值定理和不确定原理*

王家林 钮鹏程

(西北工业大学应用数学系， 西安 710072)

摘要 给出四元素 Heisenberg 群上次 Laplace 算子的平均值定理，并用其导出 Hardy 不等式和不确定原理.

关键词 四元素 Heisenberg 群，平均值定理， Hardy 不等式，不确定原理.

MR(2000) 主题分类号 22E30, 35B45

1 引 言

欧氏空间中 Laplace 算子的平均值定理、不确定原理和 Hardy 不等式在偏微分方程和相关学科中起着重要的作用 [1,2], 近年来，由于由向量场构成的退化椭圆方程的唯一延拓性、特征值等问题研究的需要，建立与向量场相联系的平均值定理、不确定原理和 Hardy 不等式引起了人们极大的兴趣．文 [3, 4] 分别对 Heisenberg 群上的次 Laplace 算子和重要的 Baouendi-Grushin 算子，通过给出其平均值定理，建立了 Hardy 不等式和不确定原理．经典的 Heisenberg 群为 $H^n = C^n \times R$, 其中 C 为复数域，这里，用四元素除环 $\mathbb{H}(\mathbb{H} = R \times R^3)$ 来替代 H^n 中的 C, 用 R^3 来替代 H^n 中的 R, 即四元素 Heisenberg 群为 $\mathbb{H}^n \times R^3$, 该群的群结构和向量场远比 Heisenberg 群上的复杂．目前，有一些专家在关注四元素 Heisenberg 群上的研究 [5−8], 文 [5] 给出了四元素 Heisenberg 群上次 Laplace 算子的基本解，并用基本解证明了卷积算子的 L^p 有界性，文 [6] 则得到了该群上的热核和 Riesz 变换．至此，自然会问：文 [3] 中 Heisenberg 群上的重要结果，如平均值定理、不确定原理和 Hardy 不等式在四元素 Heisenberg 群上是否成立？我们探讨这些问题.

本文在第 2 节中，介绍四元素 Heisenberg 群的基本知识；在第 3 节中，我们致力于建立四元素 Heisenberg 群上次 Laplace 算子的平均值定理；在第 4 节中，作为对平均值定理的应用，我们建立该群上的 Hardy 不等式和不确定原理.

* 陕西省自然科学基础研究计划 (2006A09), 西北工业大学科技创新基金 (2007KJ01012) 和国家自然科学基金 (Grant 10871157) 资助项目.
收稿日期：2006-06-14.

2　记号和预备知识

沿用文 [6] 的记号，我们用 $\mathbb{H}$ 表示 $R\times R^3$ 的除环，其上的乘法法则定义如下

$$XY=(x_0,x)(y_0,y)=(x_0y_0-x\cdot y,x_0y+y_0x+x\times y),\tag{2.1}$$

其中 $X=(x_0,x),Y=(y_0,y)\in\mathbb{H}$, $x_0,y_0\in R$, x, $y\in R^3$, $x\cdot y$ 和 $x\times y$ 分别表示 x 与 y 的内积和外积．对 $X=(x_0,x)\in\mathbb{H}$, 我们用记号 $x_0=\mathrm{Re}(X)$, $x=\mathrm{Im}(X)$, X 的共轭记为 $\overline{X}=(x_0,-x)$, X 的模记为 $|X|=\sqrt{X\cdot\overline{X}}=\sqrt{\overline{X}\cdot X}=\sqrt{x_0^2+|x|^2}$.

我们用 HH^n 表示 n 维的四元素 Heisenberg 群，定义乘法法则如下

$$(u,v)(w,t)=\Big(u+w,v+t+2\sum_{p=1}^{n}\mathrm{Im}(w_p\overline{u}_p)\Big),\tag{2.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&(u,v)=(u_1;\cdots;u_n;v_1,v_2,v_3),\ \text{这里}u_p=(u_{p0},u_{p1},u_{p2},u_{p3})\in\mathbb{H},\ p=1,2,\cdots,n,\ v\in R^3,\\&(w,t)=(w_1;\cdots;w_n;t_1,t_2,t_3),\ \text{这里}\ w_p=(w_{p0},w_{p1},w_{p2},w_{p3})\in\mathbb{H},\ p=1,2,\cdots,n,\ t\in R^3.\end{aligned}$$

对 $p=1,2,\cdots,n$, 下列向量场构成了 HH^n 的李代数基底

$$\begin{aligned}X_{p0}&=\frac{\partial}{\partial u_{p0}}-2u_{p1}\frac{\partial}{\partial v_1}-2u_{p2}\frac{\partial}{\partial v_2}-2u_{p3}\frac{\partial}{\partial v_3},\\X_{p1}&=\frac{\partial}{\partial u_{p1}}+2u_{p0}\frac{\partial}{\partial v_1}+2u_{p3}\frac{\partial}{\partial v_2}-2u_{p2}\frac{\partial}{\partial v_3},\\X_{p2}&=\frac{\partial}{\partial u_{p2}}-2u_{p3}\frac{\partial}{\partial v_1}+2u_{p0}\frac{\partial}{\partial v_2}+2u_{p1}\frac{\partial}{\partial v_3},\\X_{p3}&=\frac{\partial}{\partial u_{p3}}+2u_{p2}\frac{\partial}{\partial v_1}-2u_{p1}\frac{\partial}{\partial v_2}+2u_{p0}\frac{\partial}{\partial v_3}.\end{aligned}$$

HH^n 上的广义梯度为

$$\nabla_L=(X_1;X_2;\cdots;X_n)=(X_{10},X_{11},X_{12},X_{13};\cdots;X_{n0},X_{n1},X_{n2},X_{n3}),\tag{2.3}$$

次 Laplace 算子定义为

$$L=\sum_{p=1}^{n}\sum_{l=0}^{3}X_{pl}^2,\tag{2.4}$$

HH^n 上的伸缩群 $\{\delta_r:0<r<+\infty\}$ 定义为

$$\delta_r(u,v)=\big(ru,r^2v\big),\tag{2.5}$$

它满足分配律，即 $\delta_r\big((u,v)(w,t)\big)=\big(\delta_r(u,v)\big)\big(\delta_r(w,t)\big)$. 齐次维数记为 $Q=4n+6$.

记 $e=(0,0)\in R^{4n+3}$ 为 HH^n 的原点， HH^n 上任意一点 $(u,v)\in R^{4n+3}$ 到原点 e 的距离定义为

$$d:=d(u,v)=\big(\,|u|^4+|v|^2\,\big)^{\frac{1}{4}},\tag{2.6}$$

关于伸缩 δ_r, 它满足 $d\big(\delta_r(u,v)\big)=rd(u,v)$, 其中 $|u|^2=u\overline{u}=\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{l=0}^{3}u_{pl}^2, |v|^2=\sum\limits_{j=1}^{3}v_j^2$.

3 平均值定理

在文 [5] 中, 作者给出了算子 $-\frac{1}{4}\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{l=0}^{3}X_{pl}^2$ 在原点 e 处的基本解, 沿用其过程, 我们可以得到下面的定理.

定理 1 $L=\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{l=0}^{3}X_{pl}^2$ 在原点 e 处的基本解为

$$\mathit{\Gamma}=C_Qd^{2-Q}, \tag{3.1}$$

其中, $C_Q^{-1}=\left(4-Q^2\right)\int_{R^{4n+3}}|u|^2\left(d^4+1\right)^{-\frac{6+Q}{4}}$.

为证明平均值定理, 我们给出以下两个性质.

性质 1 $L=\mathrm{div}(A\nabla)$, 其中 div, ∇ 分别表示 R^{4n+3} 中的普通散度和梯度,

$$A=\begin{pmatrix} I_4 & \cdots & 0 & A_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & I_4 & A_n\\ A_1^{\mathrm{T}} & \cdots & A_n^{\mathrm{T}} & C\end{pmatrix}_{(4n+3)(4n+3)} \qquad \text{这里 } A_p=\begin{pmatrix} -2u_{p1} & -2u_{p2} & -2u_{p3}\\ 2u_{p0} & 2u_{p3} & -2u_{p2}\\ -2u_{p3} & 2u_{p0} & 2u_{p1}\\ 2u_{p2} & -2u_{p1} & 2u_{p0}\end{pmatrix},$$

$p=1,2,\cdots,n, C=\left(4\sum\limits_{p=1}^{n}(u_p)^2\right)I_3, I_k$ 表示 k 阶的单位矩阵.

证 通过直接的计算便可得到结论.

性质 2 $(A\nabla d)\cdot\nabla d=|\nabla_L d|^2$, 其中 A, ∇ 相同于性质 1, ∇_L 为 HH^n 上的广义梯度.

证 对 $p=1,2,\cdots,n,\ l=0,1,2,3,\ m=1,2,3,$ 有

$$\begin{aligned}\nabla d&=\Big(\frac{\partial}{\partial u_{pl}}d,\frac{\partial}{\partial v_m}d\Big)^{\mathrm{T}}=\Big(|u|^2d^{-3}u_{pl},\frac{1}{2}d^{-3}v_m\Big)^{\mathrm{T}}\\ &=d^{-3}\Big(|u|^2u_{10},|u|^2u_{11},|u|^2u_{12},|u|^2u_{13};\cdots;|u|^2u_{n3};\frac{1}{2}v_1,\frac{1}{2}v_2,\frac{1}{2}v_3\Big)^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$A\nabla d=d^{-3}\begin{pmatrix} |u|^2u_{10}-u_{11}v_1-u_{12}v_2-u_{13}v_3\\ |u|^2u_{11}+u_{10}v_1+u_{13}v_2-u_{12}v_3\\ |u|^2u_{12}-u_{13}v_1+u_{10}v_2+u_{11}v_3\\ |u|^2u_{13}+u_{12}v_1-u_{11}v_2+u_{10}v_3\\ \vdots\\ |u|^2u_{n3}+u_{n2}v_1-u_{n1}v_2+u_{n0}v_3\\ 2|u|^2v_1\\ 2|u|^2v_2\\ 2|u|^2v_3\end{pmatrix}_{(4n+3)},$$

所以

$$
\begin{aligned}
(A\nabla d)\cdot\nabla d &= d^{-6}\Big[\,|u|^4\left(u_{10}^2+u_{11}^2+u_{12}^2+u_{13}^2+\cdots+u_{n3}^2\right)+|u|^2\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)\Big]\\
&= \frac{|u|^2}{d^2}.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
X_{p0}d &= \frac{\partial}{\partial u_{p0}}d-2\sum_{m=1}^{3}u_{pm}\frac{\partial}{\partial v_m}d=d^{-3}\Big(\,|u|^2u_{p0}-\sum_{m=1}^{3}u_{pm}v_m\Big),\\
X_{p1}d &= d^{-3}\big(\,|u|^2u_{p1}+u_{p0}v_1+u_{p3}v_2-u_{p2}v_3\big),\\
X_{p2}d &= d^{-3}\big(\,|u|^2u_{p2}+u_{p0}v_2+u_{p1}v_3-u_{p3}v_1\big),\\
X_{p3}d &= d^{-3}\big(\,|u|^2u_{p3}+u_{p0}v_3+u_{p2}v_1-u_{p1}v_2\big),
\end{aligned}
$$

于是

$$
|\nabla_L d|^2=\sum_{p=1}^{n}\left(X_{p0}d\right)^2+\sum_{p=1}^{n}\sum_{i=1}^{3}\left(X_{pi}d\right)^2=\frac{|u|^2}{d^2}.
$$

证毕.

注 1 记 $\psi=\frac{|u|^2}{d^2}$, 则

$$
(A\nabla d)\cdot\nabla d=|\nabla_L d|^2=\psi. \tag{3.3}
$$

根据 Heisenberg 群的情形 [9], 我们引进 HH^n 上的几个定义.

定义 1 对任意的 $r>0, HH^n$ 上的球和球面分别定义为

$$
B_r=\{(u,v)\in HH^n\,|d(u,v)\ <r\},
$$

$$
\partial B_r=\{(u,v)\in HH^n|d(u,v)=r\}.
$$

定义 2 对任意的 $r>0$, 定义

$$
|B_r|_{HH^n}=\int_{B_r}\psi,\quad |\partial B_r|_{HH^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,|B_r|_{HH^n}\,.
$$

回忆到 Federer 余面积公式：设 $f\in L^1\left(R^N\right),\ g\in \mathrm{Lip}\left(R^N\right)$, 则

$$
\int_{R^N}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\{g=\rho\}}\frac{f(x)}{|\nabla g(x)|}\mathrm{d}H_{N-1}\mathrm{d}\rho, \tag{3.4}
$$

其中 $\mathrm{d}H_{N-1}$ 是 $N-1$ 维 Hausdorff 测度，且 a.e. $\rho\in R$ 在 $\{g=\rho\}$ 上有 $\nabla g\neq 0$.

对任意 $\varphi\in L^1\left(R^{4n+3}\right)$, 根据余面积公式可得

$$
\int_{B_r}\varphi\mathrm{d}H_{4n+3}=\int_{o}^{r}\int_{\partial B_\rho}\frac{\varphi}{|\nabla d|}\mathrm{d}H_{4n+2}\mathrm{d}\rho,
$$

特别地

$$|B_r|_{HH^n}=\int_o^r\int_{\partial B_\rho}\frac{\psi}{|\nabla d|}\mathrm{d}H_{4n+2}\mathrm{d}\rho,\quad |\partial B_r|_{HH^n}=\int_{\partial B_\rho}\frac{\psi}{|\nabla d|}\mathrm{d}H_{4n+2}. \tag{3.5}$$

下面给出平均值定理.

定理 2 设 $\varphi\in C_0^\infty(R^{4n+3})$, $\forall r>0$, 有

$$\frac{1}{|\partial B_r|_{HH^n}}\int_{\partial B_r}\varphi\frac{\psi}{|\nabla d|}=\varphi(e)-\int_{B_r}L\varphi\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}\Big). \tag{3.6}$$

证 对 $v\in C_0^\infty(R^{4n+3})$, 由 $L=\mathrm{div}(A\nabla)$, 应用散度定理有

$$\int_{B_r}\big(\varphi Lv-vL\varphi\big)=\int_{\partial B_r}\big(\varphi A\nabla v\cdot\vec{n}-vA\nabla\varphi\cdot\vec{n}\big), \tag{3.7}$$

其中 $\vec{n}$ 为 ∂B_r 的单位外法向量.

令

$$d_\varepsilon=\big(d(u,v)^4+\varepsilon^4\big)^{\frac14},\quad v=d_\varepsilon^{(2-Q)},\quad \phi=(4-Q^2)\,|u|^2\,\big(d(u,v)^4+1\big)^{-\frac{Q+6}{4}},$$

则

$$\begin{aligned}Ld_\varepsilon^{(2-Q)}&=Ld_\varepsilon^{-4(n+1)}\\&=(4-Q^2)\,|u|^2\,\varepsilon^4d_\varepsilon(u,v)^{-(Q+6)}\\&=(4-Q^2)\,|u|^2\,\varepsilon^4\,\big(d(u,v)^4+\varepsilon^4\big)^{-\frac{(Q+6)}{4}}\\&=(4-Q^2)\,|u|^2\,\varepsilon^4\varepsilon^{-(Q+6)}\Big[\big(\varepsilon^{-1}d(u,v)\big)^4+1\Big]^{-\frac{(Q+6)}{4}}\\&=(4-Q^2)\,|u'|^2\,\varepsilon^{4-(Q+6)+2}\,\big(d(u',v')^4+1\big)^{-\frac{(Q+6)}{4}}\\&=\varepsilon^{-Q}(4-Q^2)\,|u'|^2\,\big(d(u',v')^4+1\big)^{-\frac{(Q+6)}{4}}\\&=\varepsilon^{-Q}\phi\big(\delta_{\frac1\varepsilon}(u,v)\big),\end{aligned}$$

其中 $(u',v')=\delta_{\frac1\varepsilon}(u,v)$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{B_r}\varphi Lv&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{B_r}\varphi L\big(d_\varepsilon(u,v)^{2-Q}\big)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^{-Q}\int_{B_r}\varphi\phi\big(\delta_{\frac1\varepsilon}(u,v)\big)\\&=\varphi(e)\int_{R^{4n+3}}\phi=C_Q^{-1}\varphi(e).\end{aligned} \tag{3.8}$$

又令 $\psi_\varepsilon=\frac{|u|^2}{d_\varepsilon(u,v)^2}$, 应用 (3.2) 和 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}A\nabla v\cdot\vec{n}&=A\nabla d_\varepsilon^{2-Q}\cdot\vec{n}=(2-Q)d_\varepsilon^{1-Q}A\nabla d_\varepsilon\cdot\frac{\nabla d}{|\nabla d|}\\&=(2-Q)d_\varepsilon^{1-Q}A\nabla d_\varepsilon\cdot\nabla d_\varepsilon\frac{\nabla d}{\nabla d_\varepsilon}\frac{1}{|\nabla d|}\\&=(2-Q)d_\varepsilon^{1-Q}\psi_\varepsilon\frac{d^{-3}}{d_\varepsilon^{-3}}\frac{1}{|\nabla d|},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_r}\varphi A\nabla v\cdot\vec{n}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_r}\varphi(2-Q)d_\varepsilon^{1-Q}\psi_\varepsilon\frac{d^{-3}}{d_\varepsilon^{-3}}\frac{1}{|\nabla d|}=\frac{2-Q}{r^{Q-1}}\int_{\partial B_r}\varphi\frac{\psi}{|\nabla d|}. \tag{3.9}$$

由散度定理得

$$\int_{\partial B_r}A\nabla\varphi\cdot\vec{n}=\int_{B_r}\mathrm{div}(A\nabla\varphi)=\int_{B_r}L\varphi,$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_r}vA\nabla\varphi\cdot\vec{n}=\frac{1}{r^{Q-2}}\int_{B_r}L\varphi. \tag{3.10}$$

应用 (3.1), 我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_r}vL\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_r}d_\varepsilon^{2-Q}L\varphi=\int_{B_r}d^{2-Q}L\varphi=C_Q^{-1}\int_{B_r}\mathit{\Gamma} L\varphi. \tag{3.11}$$

综合 (3.7)–(3.10) 和 (3.11) 得

$$C_Q^{-1}\varphi(e)-C_Q^{-1}\int_{B_r}\mathit{\Gamma} L\varphi=\frac{2-Q}{r^{Q-1}}\int_{\partial B_r}\varphi\frac{\psi}{|\nabla d|}-\frac{1}{r^{Q-2}}\int_{B_r}L\varphi,$$

即

$$\varphi(e)-\int_{B_r}\Big(\mathit{\Gamma} L\varphi-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}L\varphi\Big)=\frac{(2-Q)C_Q}{r^{Q-1}}\int_{\partial B_r}\varphi\frac{\psi}{|\nabla d|}, \tag{3.12}$$

在 (3.12) 中令 $\varphi\equiv 1$, 则有

$$1=\frac{(2-Q)}{r^{Q-1}}C_Q\int_{\partial B_r}\frac{\psi}{|\nabla d|},$$

同时注意到 (3.5), 可得

$$\frac{(2-Q)C_Q}{r^{Q-1}}=\frac{1}{|\partial B_r|_{HH^n}}, \tag{3.13}$$

把 (3.13) 代入 (3.12) 便得到 (3.6). 证毕.

应用定理 2, 我们立即得到下面推论.

推论 1 若 $\varphi\in C_0^\infty(R^{4n+3})$ 是 $L\varphi=0$ 的解, 则 $\forall r>0$ 有

$$\varphi(e)=\frac{1}{|\partial B_r|_{HH^n}}\int_{\partial B_r}\varphi\frac{\psi}{|\nabla d|}. \tag{3.14}$$

注 2 对不在原点处的函数表达式可通过左平移得到.

4 Hardy 不等式和不确定原理

在这一节中, 为了给出 Hardy 不等式和不确定原理, 我们先给出下面的定理.

定理 3 对任意 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^{4n+3}\backslash\{e\})$ 及 $\forall r>0$, 均有

$$\int_{B_r}\frac{\varphi^2}{d^2}\psi\le\frac{2}{Q-2}\frac{1}{r}\int_{\partial B_r}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+\Big(\frac{2}{Q-2}\Big)^2\int_{B_r}|\nabla_L\varphi|^2. \tag{4.1}$$

证 对 u^2 应用定理 2, 并注意到 (3.13) 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big(\int_{\partial B_\rho}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\Big)\mathrm{d}\rho\\
=&\int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big\{|\partial B_\rho|_{HH^n}\Big[\varphi(e)^2-\int_{B_\rho}L(\varphi^2)\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}\Big)\Big]\Big\}\mathrm{d}\rho\\
=&\int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big\{\frac{\rho^{Q-1}}{(2-Q)C_Q}\Big[\varphi(e)^2-\int_{B_\rho}L(\varphi^2)\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}\Big)\Big]\Big\}\mathrm{d}\rho\\
=&(Q-1)\int_0^r \frac{1}{\rho^2}\frac{\rho^{Q-1}}{(2-Q)C_Q}\Big[\varphi(e)^2-\int_{B_\rho}L(\varphi^2)\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}\Big)\Big]\mathrm{d}\rho\\
&+\frac{1}{(2-Q)C_Q}\int_0^r\rho^{Q-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big[\varphi(e)^2-\int_{B_\rho}L(\varphi^2)\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}\Big)\Big]\mathrm{d}\rho\\
=&\frac{1}{(2-Q)C_Q}\int_0^r\rho^{Q-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big[\int_{B_\rho}-L(\varphi^2)\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}\Big)\Big]\mathrm{d}\rho\\
&+(Q-1)\int_0^r\frac{1}{\rho^2}\Big(\int_{\partial B_\rho}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\Big)\mathrm{d}\rho. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

注意到在 ∂B_r 上， $\varGamma=\frac{C_Q}{r^{Q-2}}$, 根据余面积公式及散度定理得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big[\int_{B_\rho}-L(\varphi^2)\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}\Big)\Big]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big\{\int_0^\rho\Big[\int_{\partial B_\tau}-L(\varphi^2)\Big(\varGamma-\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}\Big)\frac{1}{|\nabla d|}\Big]\mathrm{d}\tau\Big\}\\
&=\frac{C_Q(2-Q)}{\rho^{Q-1}}\int_0^\rho\Big[\int_{\partial B_\tau}L(\varphi^2)\frac{1}{|\nabla d|}\Big]\mathrm{d}\tau\\
&=\frac{C_Q(2-Q)}{\rho^{Q-1}}\int_{\partial B_\rho}A\nabla(\varphi^2)\cdot\frac{\nabla d}{|\nabla d|}, \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

将 (4.3) 代入 (4.2) 得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big(\int_{\partial B_\rho}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\Big)\mathrm{d}\rho\\
=&(Q-1)\int_0^r\frac{1}{\rho^2}\Big(\int_{\partial B_\rho}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\Big)\mathrm{d}\rho+\int_0^r\frac{1}{\rho}\Big[\int_{\partial B_\rho}A\nabla(\varphi^2)\cdot\frac{\nabla d}{|\nabla d|}\Big]\mathrm{d}\rho\\
=&(Q-1)\int_{B_r}\varphi^2\frac{\psi}{d^2}+\int_{B_r}\frac{2\varphi\nabla_L\varphi\cdot\nabla_L d}{d}. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

由余面积公式，并结合 (4.4) 式可得

$$\begin{aligned}
\int_{B_r}\frac{\varphi^2}{d^2}\psi&=\int_0^r\Big(\int_{\partial B_\rho}\frac{\varphi^2}{d^2}\frac{\psi}{|\nabla d|}\Big)\mathrm{d}\rho=\int_0^r\Big(-\frac{1}{\rho}\Big)'\Big(\int_{\partial B_\rho}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\Big)\mathrm{d}\rho\\
&=-\frac{1}{r}\int_{\partial B_r}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+\int_0^r\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big(\int_{\partial B_\rho}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}\Big)\mathrm{d}\rho\\
&=-\frac{1}{r}\int_{\partial B_r}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+(Q-1)\int_{B_r}\varphi^2\frac{\psi}{d^2}+\int_{B_r}\frac{2\varphi\nabla_L\varphi\cdot\nabla_L d}{d},
\end{aligned}$$

于是，上式移项后应用基本不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
(Q-2)\int_{B_r}\frac{\varphi^2}{d^2}\psi &= \frac{1}{r}\int_{\partial B_r}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}-\int_{B_r}\frac{2\varphi\nabla_L\varphi\cdot\nabla_L d}{d}\\
&\le \frac{1}{r}\int_{\partial B_r}\varphi^2\frac{\psi}{|\nabla d|}+\frac{Q-2}{2}\int_{B_r}\varphi^2\frac{\psi}{d^2}+\frac{2}{Q-2}\int_{B_r}|\nabla_L\varphi|^2,
\end{aligned}
$$

化简后即得 (4.1). 证毕.

我们应用定理 3 立即可得四元素 Heisenberg 群上次 Laplace 算子的 Hardy 不等式.

定理 4 若 $\varphi\in C_0^\infty\big(R^{4n+3}\backslash\{e\}\big)$, 则

$$
\int_{R^{4n+3}}\frac{\varphi^2}{d^2}\psi\le\Big(\frac{2}{Q-2}\Big)^2\int_{R^{4n+3}}|\nabla_L\varphi|^2.
$$

证 在 (4.1) 中，令 $r\to+\infty$ 即得结论．证毕.

应用上述 Hardy 不等式，我们可以得到下面的不确定原理.

定理 5 $\forall\varphi\in C_0^\infty\big(R^{4n+3}\backslash\{e\}\big)$, 我们有

$$
\Big(\int_{R^{4n+3}}d^2\varphi^2\psi\Big)\Big(\int_{R^{4n+3}}|\nabla_L\varphi|^2\Big)\ge\Big(\frac{Q-2}{2}\Big)^2\Big(\int_{R^{4n+3}}\varphi^2\psi\Big)^2.
$$

证 利用 Cauchy 不等式和定理 4 有

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{Q-2}{2}\Big)^2\Big(\int_{R^{4n+3}}\varphi^2\psi\Big)^2 &\le\Big(\frac{Q-2}{2}\Big)^2\Big(\int_{R^{4n+3}}\frac{\varphi^2}{d^2}\psi\Big)\Big(\int_{R^{4n+3}}\varphi^2d^2\psi\Big)\\
&\le\Big(\int_{R^{4n+3}}|\nabla_L\varphi|^2\Big)\Big(\int_{R^{4n+3}}\varphi^2d^2\psi\Big).
\end{aligned}
$$

证毕.

参　考　文　献

[1] Hardy G H, Littlewood J E and Polya G. Inequalities. Cambridge England: Cambridge University Press, 1952.

[2] Allegretto W and Huang Y X. A Picone's identity for the p-Laplacian and application. *Nonlinear Analysis*, 1998, **32**(7) : 819–830.

[3] Garofalo N and Lanconelli E. Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1990, **40**(2): 313–356.

[4] Garofalo N. Unique continuation for a class of elliptic operators which degenerate on a manifold of arbitrary codimension. *J. Diff. Equ.*, 1993, **104**(1): 117–146.

[5] Zhu L. A fundamental solution for the Laplace operator on the quaternionic Heisenberg group. *Acta Mathematica Scientia*, 2002, **22B**(3): 369–378.

[6] Zhu F. The heat kernel and the Riesz transforms on the quaternionic Heisenberg groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 2003, **209**(1): 175–199.
[7] Jang C, Kim J, Kim Y and Park K. Conjugate points on the quaternionic Heisenberg group. *Korean Math. Soc.*, 2003, **40**(1): 61–72.
[8] Yang Q and Zhu F. Nonlinear Liouvill theorem in the quaternionic Heisenberg group. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2005, **10**(2): 355–357.
[9] Folland G. A fundamental solution for a subelliptic operator. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1973, **79**(2): 373–376.

THE MEAN VALUE THEOREM AND UNCERTAINTY PRINCIPLE FOR THE SUB-LAPLACIAN ON THE QUATERNIONIC HEISENBERG GROUP

WANG Jialin NIU Pengcheng

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072)

Abstract In this paper, the mean value theorem for the sub-Laplacian on the quaternionic Heisenberg group is given. As an application, the Hardy inequality and the uncertainty principle are established.

Key words Quatertionic Heisenberg group, mean value theorem, Hardy inequality, uncertainty principle.