系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(4) (2009, 4), 484–489

图的联结数与 $[a,b]$- 因子存在性*

周 思 中

(江苏科技大学数理学院，镇江 212003)

摘要 设 G 是一个 n 阶图， a,b,m_1,m_2 是非负整数且满足 $1 \le a < b$ 和 $b \ge m_1$.H_1 和 H_2 是图 G 的两个边不交的子图且满足 $|E(H_1)| = m_1$ 和 $|E(H_2)| = m_2$. 证明下列结论：若图 G 的联结数 $\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}$ 且 $n \ge \frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2)+2b(m_1+m_2)}{b(b-1)}$, 则图 G 有一个 $[a,b]$- 因子 F 满足 $E(H_1) \subseteq E(F)$ 和 $E(H_2) \cap E(F) = \emptyset$. 进一步指出这个结果是最好的.

关键词 图，子图，联结数， $[a,b]$- 因子.

MR(2000) 主题分类号 05C70

1 引 言

本文所考虑的图均为有限无向简单图，即不包含重边和环的图. 设 G 是一个图，具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$. 用 $d_G(x)$ 表示图 G 中顶点 x 的度. 用 $N_G(S)$ 表示图 G 中顶点子集 S 的邻集. 对任意的 $S \subseteq V(G)$, 用 $G[S]$ 表示由 S 导出的 G 的子图且用 $G-S$ 表示去掉 S 中的点以及与 S 中的点相关联的边所得到的图. 设 S 和 T 是 $V(G)$ 的不相交子集，用 $E_G(S,T)$ 表示 G 中连接 S 和 T 的边集且记 $e_G(S,T) = |E_G(S,T)|$.

设 $a \le b$ 是非负整数，如果存在 G 的一个支撑子图 F, 使对任意的 $x \in V(G)$ 有 $a \le d_F(x) \le b$, 则称 F 是 G 的一个 $[a,b]$- 因子. 特别地，若 $a = b = k$, 则称 $[a,b]$- 因子为 k- 因子. 图 G 的联结数 $\mathrm{bind}(G)$ 定义为 [1]

$$\mathrm{bind}(G) = \min\Big\{\frac{|N_G(X)|}{|X|} : \emptyset \ne X \subset V(G),\ N_G(X) \ne V(G)\Big\}.$$

其它未加说明的术语和记号见文献 [2].

许多作者研究了图的 (g,f)- 因子 [3−7] 和 $[a,b]$- 因子 [8−12]. 下面关于 k- 因子和 $[a,b]$- 因子的结果是已知的.

定理 A[13] 设 $k \ge 2$ 是整数, G 是阶 $n \ge 4k-6$ 的图, kn 是偶数. 若 $\mathrm{bind}(G) > \frac{(n-1)(2k-1)}{k(n-2)+3}$, 则 G 有一个 k- 因子.

---

* 江苏省高校自然科学基础研究项目 (07KJD110048), 江苏科技大学青年科研 (2004SL001J) 基金项目和江苏省 “青蓝工程” 资助.

收稿日期：2007-07-29.

定理 B[12] 设 G 是一个 n 阶图， $1 \le a < b$ 是整数．若 $\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-2b+3}$ 且 $n \ge \frac{(a+b-1)(a+b-2)}{b}$, 则 G 有一个 $[a,b]$- 因子．

我们推广定理 A 和定理 B, 得到下面的结果．

定理 1 设 G 是一个 n 阶图， a,b,m_1,m_2 是非负整数且满足 $1 \le a < b$ 和 $b \ge m_1$, H_1 和 H_2 是 G 的两个边不相交的子图且满足 $|E(H_1)| = m_1$ 和 $|E(H_2)| = m_2$．若 $\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}$ 且 $n \ge \frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2)+2b(m_1+m_2)}{b(b-1)}$, 则 G 有一个 $[a,b]$- 因子 F 满足 $E(H_1) \subseteq E(F)$ 和 $E(H_2) \cap E(F) = \emptyset$.

在定理 1 中，取 $m_2 = 0$, 我们得到下面的推论．

推论 1 设 G 是一个 n 阶图， a,b,m_1 是非负整数且满足 $1 \le a < b$ 和 $b \ge m_1$, H 是 G 的 m_1 条边的子图．若 $\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)-2m_1+2}$ 且 $n \ge \frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2)+2bm_1}{b(b-1)}$, 则 G 有一个 $[a,b]$- 因子 F 满足 $E(H) \subseteq E(F)$.

在定理 1 中，取 $m_1 = 0$, 我们得到下面的推论．

推论 2 设 G 是一个 n 阶图， a,b,m_2 是非负整数且满足 $1 \le a < b$, H 是 G 的 m_2 条边的子图．若 $\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)-2m_2+2}$ 且 $n \ge \frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2)+2bm_2}{b(b-1)}$, 则 G 有一个 $[a,b]$- 因子 F 满足 $E(H) \cap E(F) = \emptyset$.

在定理 1 中，取 $m_1 = m_2 = 0$, 我们得到下面的推论．

推论 3 设 G 是一个 n 阶图， $1 \le a < b$ 是整数．若 $\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)+2}$ 且 $n \ge \frac{(a+b-1)(a+b-2)}{b}$, 则 G 有一个 $[a,b]$- 因子．

显然，由推论 3 可立即得到定理 B, 即推论 3 的结果比定理 B 更好．

2 定理 1 的证明

在本节中，我们先给出两个引理，然后证明定理 1．

引理 2.1[14] 设 $0 \le a < b$ 是整数， G 是一个图．则 G 有 $[a,b]$- 因子当且仅当对 $V(G)$ 的任意两个不交子集 S 和 T, 有

$$\delta_G(S,T) = b|S| + d_{G-S}(T) - a|T| \ge 0.$$

设 S 和 T 是 $V(G)$ 的不交子集， H_1 和 H_2 是 G 的两个边不相交的子图．令

$$D = V(G) - (S \cup T), \quad E(S) = \{xy \in E(G) : x, y \in S\}, \quad E(T) = \{xy \in E(G) : x, y \in T\}.$$

并记

$$E_1' = E(H_1) \cap E(S), \quad E_1'' = E(H_1) \cap E_G(S,D),$$
$$E_2' = E(H_2) \cap E(T), \quad E_2'' = E(H_2) \cap E_G(T,D).$$

且令

$$\alpha = 2|E_1'| + |E_1''|, \quad \beta = 2|E_2'| + |E_2''|.$$

引理 2.2[15,16] 设 $1 \le a < b$ 是整数， G 是一个图， H_1 和 H_2 是 G 的边不相交的子图．则图 G 有一个 $[a,b]$- 因子 F 满足 $E(H_1) \subseteq E(F)$ 和 $E(H_2) \cap E(F) = \emptyset$ 当且仅当对 $V(G)$ 的任意不交子集 S 和 T, 有

$$\delta_G(S,T) = b|S| + d_{G-S}(T) - a|T| \ge \alpha + \beta.$$

定理 1 的证明　根据引理 2.2, 只需证明 $\forall S, T \subseteq V(G)$, 有

$$\delta_G(S,T) = b|S| + d_{G-S}(T) - a|T| \ge \alpha + \beta$$

即可. 根据 α 和 β 的定义，显然有

$$\alpha \le \min\{2m_1, m_1|S|\}, \quad \beta \le \min\{2m_2, m_2|T|\}.$$

若 $T = \emptyset$, 则 $\beta = 0$. 于是有

$$\delta_G(S,T) = b|S| \ge m_1|S| \ge \alpha = \alpha + \beta.$$

以下假设 $T \ne \emptyset$, 并分两种情形讨论.

情形 1　对任意 $x \in T$, 均有

$$\begin{aligned} & d_{G-S}(x) \ge a + m_2, \\ & \delta_G(S,T) = b|S| + d_{G-S}(T) - a|T| \ge b|S| + (a+m_2)|T| - a|T| \\ & \qquad\qquad = b|S| + m_2|T| \ge m_1|S| + m_2|T| \ge \alpha + \beta. \end{aligned}$$

情形 2　存在 $x \in T$, 使得

$$d_{G-S}(x) \le a + m_2 - 1.$$

令 $h = \min\{d_{G-S}(x) : x \in T\}$. 显然有 $0 \le h \le a + m_2 - 1$.

情形 2.1　$h = 0$.

断言 1　$\frac{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}{n-1} > 1$.

证　因为 $n \ge \frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2)+2b(m_1+m_2)}{b(b-1)}$, 所以有

$$\begin{aligned} & bn - (a+b) - 2(m_1+m_2) + 2 - (n-1) \\ = & (b-1)n - (a+b) - 2(m_1+m_2) + 3 \\ \ge & (b-1)\frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2) + 2b(m_1+m_2)}{b(b-1)} \\ & -(a+b) - 2(m_1+m_2) + 3 \\ = & \frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2)}{b} - (a+b) + 3 \\ \ge & (a+b-2) - (a+b) + 3 > 0. \end{aligned}$$

于是，我们有

$$\frac{bn - (a+b) - 2(m_1+m_2) + 2}{n-1} > 1.$$

断言 1 证毕.

令 $p = |\{x : x \in T, d_{G-S}(x) = 0\}|$, $Y = V(G) \setminus S$. 由 $h = 0$ 知 $N_G(Y) \ne V(G)$. 根据 $\mathrm{bind}(G)$ 的定义，我们有

$$|N_G(Y)| \ge \mathrm{bind}(G)|Y|.$$

于是

$$n - p \ge |N_G(Y)| \ge \mathrm{bind}(G)|Y| = \mathrm{bind}(G)(n - |S|),$$

即

$$|S| \ge n - \frac{n-p}{\mathrm{bind}(G)}. \tag{1}$$

根据 $|S|+|T|\le n$, (1) 式和断言 1, 我们得到

$$\begin{aligned}\delta_G(S,T)&=b|S|+d_{G-S}(T)-a|T|\ge b|S|-(a-1)|T|-p\\&\ge b|S|-(a-1)(n-|S|)-p=(a+b-1)|S|-(a-1)n-p\\&\ge(a+b-1)\Big(n-\frac{n-p}{\mathrm{bind}(G)}\Big)-(a-1)n-p\\&>(a+b-1)\Big(n-\frac{(n-p)(bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2)}{(a+b-1)(n-1)}\Big)\\&\quad-(a-1)n-p\\&=bn-\frac{(n-p)(bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2)}{n-1}-p\\&\ge bn-\frac{(n-1)(bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2)}{n-1}-1\\&=2(m_1+m_2)+a+b-3\ge 2m_1+2m_2\ge\alpha+\beta.\end{aligned}$$

情形 2.2　$1\le h\le a+m_2-1$.

存在 $x_1\in T$, 使得 $d_{G-S}(x_1)=h$. 令 $Y=(V(G)\setminus S)\setminus N_{G-S}(x_1)$. 显然 $x_1\in Y\setminus N_G(Y)$. 所以 $Y\ne\emptyset$ 且 $N_G(Y)\ne V(G)$. 根据 $\mathrm{bind}(G)$ 的定义，我们有

$$\frac{|N_G(Y)|}{|Y|}\ge\mathrm{bind}(G).$$

于是

$$n-1\ge|N_G(Y)|\ge\mathrm{bind}(G)|Y|=\mathrm{bind}(G)(n-h-|S|),$$

即

$$|S|\ge n-h-\frac{n-1}{\mathrm{bind}(G)}.\tag{2}$$

根据 $|S|+|T|\le n$ 和 (2) 式，我们有

$$\begin{aligned}\delta_G(S,T)&=b|S|+d_{G-S}(T)-a|T|\ge b|S|-(a-h)|T|\\&\ge b|S|-(a-h)(n-|S|)=(a+b-h)|S|-(a-h)n\\&\ge(a+b-h)\Big(n-h-\frac{n-1}{\mathrm{bind}(G)}\Big)-(a-h)n\\&>(a+b-h)\Big(n-h-\frac{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}{a+b-1}\Big)\\&\quad-(a-h)n.\end{aligned}$$

令 $f(h)=(a+b-h)(n-h-\frac{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}{a+b-1})-(a-h)n$. 于是

$$\delta_G(S,T)>f(h).\tag{3}$$

因为 $1\le h\le a+m_2-1$ 是整数，易知 $f(h)$ 在 $h=1$ 达到它的最小值．于是，我们有

$$f(h)\ge f(1).\tag{4}$$

根据 (3) 式和 (4) 式，我们得到

$$\begin{aligned}\delta_G(S,T) &> f(h) \geq f(1)\\ &= (a+b-1)\Big(n-1-\frac{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}{a+b-1}\Big)-(a-1)n\\ &= (a+b-1)(n-1)-(bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2)-(a-1)n\\ &= -(a+b-1)+(a+b-2)+2(m_1+m_2)\\ &= 2m_1+2m_2-1\\ &\geq \alpha+\beta-1.\end{aligned}$$

根据 α, β 和 $\delta_G(S,T)$ 的整数性知

$$\delta_G(S,T) \geq \alpha+\beta.$$

定理 1 证毕.

注 现在我们说明定理 1 中的条件

$$\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}$$

不能被

$$\mathrm{bind}(G) \geq \frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}$$

代替. 设 $b>a\geq 2, m_1=m_2=0$ 且满足 $a+b$ 是奇数，$n=\frac{(a+b)(a+b-2)}{b}$ 是整数, 令 $l=\frac{a+b-1}{2}$, $m=n-2l=n-(a+b-1)=\frac{(a+b-1)(a-2)+(a+b-2)}{b}$. 显然， m 是整数. 令 $G=K_m\bigvee lK_2$, $X=V(lK_2)$. 对任意 $x\in X$, 显然有 $|N_G(X\setminus x)|=n-1$. 根据 $\mathrm{bind}(G)$ 的定义，我们有

$$\mathrm{bind}(G)=\frac{|N_G(X\setminus x)|}{|X\setminus x|}=\frac{n-1}{2l-1}=\frac{n-1}{a+b-2}=\frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)+2}.$$

令 $S=V(K_m)\subseteq V(G)$, $T=V(lK_2)\subseteq V(G)$, 则 $|S|=m$, $|T|=2l$. 于是，我们有

$$\begin{aligned}\delta_G(S,T) &= b|S|-a|T|+d_{G-S}(T)\\ &= b|S|-a|T|+|T| = b|S|-(a-1)|T|\\ &= b\frac{(a+b-1)(a-2)+(a+b-2)}{b}-(a-1)(a+b-1)\\ &= -1<0.\end{aligned}$$

根据引理 2.1, G 没有 $[a,b]$- 因子. 在这个意义下，定理 1 的条件是最好的.

参 考 文 献

[1] Woodall D R. The binding number of a graph and its Anderson number. *Journal of Combinatorial Theory* (B), 1973, **15**: 225–255.

[2] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. Macmillan, London, 1976.
[3] Liu Guizhen. (g,f)-factors and (g,f)-factorizations of graphs. *Acta Mathematica Sinica*, 1994, **37**(2): 230–236.
[4] Zhou Sizhong. Some sufficient conditions for graphs to have (g,f)-factors. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2007, **75**: 447–452.
[5] Zhou Sizhong, Xue Xiuqian. Complete-factors and (g,f)-covered graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 2007, **37**: 265–269.
[6] Liu Guizhen. $(g<f)$-factors of graphs. *Acta Mathematica Scientia*, 1994, **14**: 285–290.
[7] 周思中，薛秀谦．有约束条件的图的 (g,f)- 因子．系统科学与数学， 2008, **28**(2): 204–207.
[8] Matsuda H. Fan-type results for the existence of $[a,b]$-factors. *Discrete Mathematics*, 2006, **306**: 688–693.
[9] Zhou Sizhong, Jiang Jiashang. Notes on the binding numbers for (a,b,k)-critical graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2007, **76**: 307–314.
[10] Kano M. A sufficient condition for a graph to have $[a,b]$-factors. *Graphs and Combinatorics*, 1990, **6**: 245–251.
[11] Zhou Sizhong, Xu Yang. Neighborhoods of independent sets for (a,b,k)-critical graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2008, **77**(2): 277–283.
[12] Chen Ciping. Binding number and minimum degree for $[a,b]$-factor. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1993, **6**: 179–185.
[13] Katerinis P, Woodall D R. Binding numbers of graphs and the existence of k-factors. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1987, **38**: 221–228.
[14] Lovász L. Subgraph with prescribed valencies. *Journal of Combinatorial Theory*, 1970, **8**: 391–416.
[15] Yuan Jingjiang, Yu Jinqiao. Random (m,r)-orthogonal (g,f)-factorizable graphs. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, 1998, **13**(3): 311–318.
[16] Lam P C B, Liu Guizhen, Li Guojun et al. Orthogonal (g,f)-factorizations in networks. *Networks*, 2000, **35**(4): 274–278.

BINDING NUMBERS OF GRAPHS AND THE EXISTENCE OF $[a,b]$-FACTORS

ZHOU Sizhong

(*School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang* 212003)

Abstract Let G be a graph of order n, and let a,b,m_1,m_2 be nonnegative integers with $1\le a<b$ and $b\ge m_1$. Let H_1 and H_2 be two edge-disjoint subgraphs of G with the sizes $|E(H_1)|=m_1$ and $|E(H_2)|=m_2$. In this paper, it is proved that G has an $[a,b]$-factor F such that $E(H_1)\subseteq E(F)$ and $E(H_2)\cap E(F)=\emptyset$ if the binding number of G bind$(G)>\frac{(a+b-1)(n-1)}{bn-(a+b)-2(m_1+m_2)+2}$ and $n\ge\frac{(b-1)(a+b-1)(a+b-2)+2b(m_1+m_2)}{b(b-1)}$. Furthermore, it is shown that the result in this paper is sharp.

Key words Graph, subgraph, binding number, $[a,b]$-factor.