

一类非线性系统的迭代学习控制^{*}

沈 栋 陈 翰 馥

(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘要 讨论一类非线性系统的迭代学习控制, 系统的非线性动态对状态不快地多项式增长, 而量测方程含有噪声. 控制序列并非直接输给系统, 而是先经过死区、预载及饱和等非线性函数. 递推地给出了学习控制序列, 并证明它的有界性及最优跟踪性.

关键词 非线性系统, 迭代学习控制, 量测噪声, 死区, 预载, 饱和, 随机逼近.

MR(2000) 主题分类号 93E11

1 引言

迭代学习控制 (ILC) 是一种适用于运行过程不断重复的系统的控制算法. 它利用目标轨迹与当前系统输出信号的差, 来构造输入信号, 从而逐渐地改善系统跟踪性能. 自从 Arimoto 等人^[1]提出以来, 迭代学习控制在过去的 20 多年中, 因其简单性和有效性两大优点, 在理论和应用两方面都得到了广泛的关注及深入的研究^[2–5].

非光滑非线性特性, 例如死区、预载、饱和等, 是普遍存在于各种工程系统中的一类重要非线性, 特别是在执行器中经常遇到, 例如液压与气动伺服阀, 电动伺服系统及其他装置. 这类非线性会导致系统性能受限. 在自适应控制方面, 研究人员提出了各种自适应补偿算法以消除这些非光滑非线性影响, 其中多数算法依赖于具体非线性逆函数来构造^[6–8]. 在迭代学习控制方面, 到目前为止, 系统输入端带有非线性环节情形讨论较少, 就作者所知, 文^[9]考虑了输入端带死区的仿射非线性系统, 其算法适用于非线性函数满足全局 Lipschitz 条件且已知某些上界的确定性模型. 文^[10]考虑了输入端带饱和的情形, 通过复合能量函数方法研究了一类连续时间确定性模型的 ILC 问题.

现实中系统往往含有各种噪声, 因此研究随机系统的 ILC 问题十分有意义^[11,12]. 文^[12]考虑了离散时间仿射非线性系统的 ILC 问题, 基于随机逼近方法构造控制律, 并在相当弱的噪声条件下证明控制序列概率 1 收敛到最优控制. 本文算法的构造即受此文启发.

本文考虑一类输入端带有死区、预载、饱和三种非线性环节且有量测噪声的仿射非线性系统, 系统非线性动态对状态的增长不快地多项式. 就作者所知, 至今还没有在有量测噪声的情况下处理这一类非线性系统的结果. 本文的主要特点有

1) 系统的所有参数都是未知的, 特别地, 上述三种非线性函数的参数未知且不需要已知上界. 输入信号经过上述三种非线性变换后的中间信号 v 也是未知的;

^{*} 国家自然科学基金 (60221301) 资助课题.

收稿日期: 2008-05-19.

2) 系统的动态非线性函数可以任意阶次的多项式增长.

3) 对上述三种输入端非线性, 给出了统一的迭代学习控制算法. 证明了输入序列有界且最优.

本文其余内容安排如下. 第 2 节给出一般情形下三种非线性环节的定义. 第 3 节描述所研究的问题并给出最优控制序列. 第 4 节给出迭代学习控制律并分别针对三种输入端非线性环节给出控制序列的收敛性和最优性分析. 第 5 节为本文的小结.

2 输入端非线性

死区、预载、饱和 (分别以 $DZ(\cdot)$, $Pr(\cdot)$, $Sat(\cdot)$ 表示) 这三种非线性都是实际控制工程中经常遇到的. 我们以 u 表示系统实际的输入信号, 以 v 表示输入经上述非线性变换后的中间信号, v 是未知的.

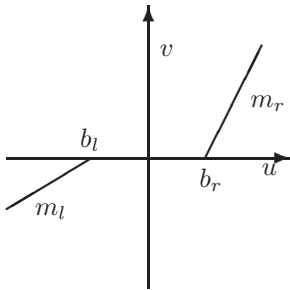


图 1 死区

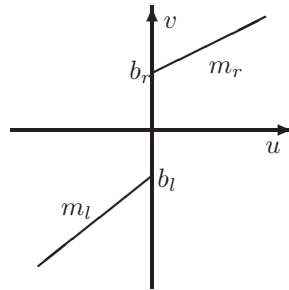


图 2 预载

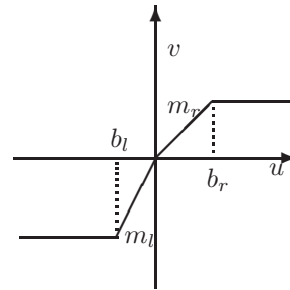


图 3 饱和

非对称的死区非线性定义为

$$v = DZ(u) = \begin{cases} m_r(u - b_r), & u \in I_r \triangleq [b_r, \infty), \\ 0, & u \in I_m \triangleq [b_l, b_r], \\ m_l(u - b_l), & u \in I_l \triangleq (-\infty, b_l], \end{cases} \quad (1)$$

其中参数未知但符号已知, 不妨假定 $b_r \geq 0, b_l \leq 0, m_r > 0, m_l > 0$ (见图 1).

死区是工业过程中一种重要的非光滑非线性, 引起控制界长期的研究, 如文 [6,7,13]. 死区容易导致系统不稳定, 为此, 文 [6,7,13] 提出自适应死区逆来处理未知死区. 在迭代学习控制中, 因过程可以不断重复, 可以不需要构造死区的逆函数, 而直接设计控制律来实现系统良好的跟踪性能. 这从后文中给出的迭代学习控制律可以看到.

非对称的预载非线性定义为

$$v = Pr(u) = \begin{cases} b_r + m_r u, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ b_l + m_l u, & u < 0. \end{cases} \quad (2)$$

这里及后文为符号简洁起见, 使用与死区相同的参数符号. 在不同的情形下, 它们分别指不同的量. 参数未知但符号已知, 不妨设 $b_r \geq 0, b_l \leq 0, m_r > 0, m_l > 0$ (见图 2).

预载也是一种重要的非光滑非线性, 且不连续. 文 [14] 讨论了输入端带预载的离散时间线性系统的自适应控制问题. 文 [15] 则研究了输入端带多种非线性包括预载的线性系统辨识问题.

非对称的饱和非线性定义为

$$v = \text{Sat}(u) = \begin{cases} m_r b_r, & u \in I_r \triangleq [b_r, \infty), \\ m_r u, & u \in I_{mr} \triangleq [0, b_r], \\ m_l u, & u \in I_{ml} \triangleq [b_l, 0], \\ m_l b_l, & u \in I_l \triangleq (-\infty, b_l], \end{cases} \quad (3)$$

其中参数未知但符号已知, 不妨假定 $b_r \geq 0, b_l \leq 0, m_r > 0, m_l > 0$. 这里 $I_m \triangleq I_{mr} \cup I_{ml}$ (见图 3). 饱和非线性和前两种非线性不同, 死区和预载非线性无界, 但饱和非线性是有界的.

由于执行器的动作受到机械的限制以及控制生产过程的要求等, 饱和非线性在实际工程应用中十分常见, 引起研究人员的广泛关注^[16,17].

3 系统描述及最优跟踪

考虑 SISO 系统

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= f(t, x_k(t)) + \mathbf{b}(t, x_k(t))v_k(t), \\ v_k(t) &= \mathcal{N}(u_k(t)), \\ y_k(t) &= \mathbf{c}(t)x_k(t) + w_k(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 \mathcal{N} 表示 DZ 或 Pr 或 Sat . 下标 k 表示周期序号, 而 t 表示同一周期中的不同时刻, $t \in [0, N]$. $x_k(t) \in \mathbb{R}^n, y_k(t) \in \mathbb{R}, u_k(t) \in \mathbb{R}$ 分别表示系统的状态, 输出和输入, $w_k(t)$ 为量测噪声. $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\mathbf{b}(\cdot, \cdot)$ 与 $\mathbf{c}(\cdot)$ 分别为列向量和行向量.

我们用如下条件

A1) 跟踪目标 $y_d(t)$ 可实现, 即对合适的初始值 $x_d(0)$, 存在控制信号 $u_d(t)$ 使 $y_d(t)$ 为下述系统的输出

$$\begin{aligned} x_d(t+1) &= f(t, x_d(t)) + \mathbf{b}(t, x_d(t))v_d(t), \\ v_d(t) &= \mathcal{N}(u_d(t)), \\ y_d(t) &= \mathbf{c}(t)x_d(t). \end{aligned} \quad (5)$$

A2) 耦合矩阵 $\mathbf{c}(t+1)\mathbf{b}(t, x)$ 的值未知, 但符号已知且不为 0, 记为 $\text{sgn}(\mathbf{c}(t+1)\mathbf{b}(t, x))$.

A3) 函数 $f(\cdot, \cdot)$ 与 $\mathbf{b}(\cdot, \cdot)$ 对第二个变量满足

$$\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq \sum_{i=1}^l m_i \|x' - x''\|^i, \quad (6)$$

$$\|\mathbf{b}(t, x') - \mathbf{b}(t, x'')\| \leq \sum_{i=1}^l n_i \|x' - x''\|^i, \quad (7)$$

其中 l 为未知正整数, $m_i, n_i, i = 1, 2, \dots, l$ 为未知正常数.

A4) 噪声 $\{w_k(t)\}$ 对每一时刻 t 沿迭代序号 k 为相互独立的随机变量且 $Ew_k(t) = 0$, $\sup_k Ew_k(t)^2 < \infty$, 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k(t)^2 = R_t < \infty \quad \text{a.s.} \quad \forall t \in [0, N], \quad (8)$$

其中 R_t 未知.

A5) 初始状态渐近精确, 即 $x_k(0) - x_d(0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

用 $\mathcal{F}_k \triangleq \sigma(y_i(t), x_i(t), w_i(t), 0 \leq i \leq k, t \in [0, N])$ 表示非减的 σ 域. 定义容许控制集合

$$U = \{u_k(t) \in \mathcal{F}_k, \sup_k u_k(t) < \infty \text{ a.s.}, t \in [0, N-1], k = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (9)$$

控制目标是找到 $\{u_k(t), k = 0, 1, 2, \dots\} \in U$ 使下述指标达到最小

$$V_t(\{u_k(t)\}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k(t) - y_d(t)|^2, \quad \forall t \in [0, N]. \quad (10)$$

为表述方便, 记

$$\begin{aligned} f_k(t) &\triangleq f(t, x_k(t)), f_d(t) \triangleq f(t, x_d(t)), \quad \mathbf{b}_k(t) \triangleq \mathbf{b}(t, x_k(t)), \quad \mathbf{b}_d(t) \triangleq \mathbf{b}(t, x_d(t)), \\ \delta x_k(t) &\triangleq x_d(t) - x_k(t), \quad \delta v_k(t) \triangleq v_d(t) - v_k(t), \quad \delta u_k(t) \triangleq u_d(t) - u_k(t), \\ e_k(t) &\triangleq y_d(t) - y_k(t), \quad \delta f_k(t) \triangleq f_d(t) - f_k(t), \quad \delta \mathbf{b}_k(t) \triangleq \mathbf{b}_d(t) - \mathbf{b}_k(t), \\ \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) &\triangleq \mathbf{c}(t+1) \mathbf{b}(t, x_k(t)), \quad \mathbf{c}^+ f_k(t) \triangleq \mathbf{c}(t+1) f(t, x_k(t)). \end{aligned}$$

我们首先给出式 (10) 所定义指标的最优值, 并指出如何达到这个最优值. 为此, 我们需要如下两个引理.

引理 1 ^[18] 令 $\{X(t), \mathcal{F}_t\}$ 为鞅差列, $\{M(t), \mathcal{F}_t\}$ 为适应序列, $\|M(t)\| < \infty, \forall t \geq 0$. 若 $\sup_{t \geq 0} E[\|X(t)\|^2 | \mathcal{F}_{t-1}] < \infty, \text{ a.s.}$, 则对任意给定 $\eta > 0$ 有

$$\sum_{t=0}^n M(t)X(t+1) = O\left(\left(\sum_{t=0}^n \|M(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}+\eta}\right) \quad \text{a.s.}$$

引理 2 对系统 (4), 设 A1)–A5) 成立, 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\delta v_k(s)| = 0, s = 0, 1, \dots, t$, 则对 $t+1$ 时刻成立

$$\|\delta x_k(t+1)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \|\delta f_k(t+1)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \|\delta \mathbf{b}_k(t+1)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

证 我们归纳地证明这个结论. 由系统状态方程得

$$\begin{aligned} \delta x_k(t+1) &= f_d(t) - f_k(t) + \mathbf{b}_d(t)v_d(t) - \mathbf{b}_k(t)v_k(t) \\ &= \delta f_k(t) + \delta \mathbf{b}_k(t)v_d(t) + \mathbf{b}_k(t)\delta v_k(t), \end{aligned} \quad (11)$$

首先考虑 $t = 0$ 时刻, 由 A3) 及 A5) 可知

$$\begin{aligned}\|f_d(0) - f_k(0)\| &\leq \sum_{i=1}^l m_i \|x_d(0) - x_k(0)\|^i \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \\ \|\mathbf{b}_d(0) - \mathbf{b}_k(0)\| &\leq \sum_{i=1}^l n_i \|x_d(0) - x_k(0)\|^i \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,\end{aligned}$$

从而可知式 (11) 右端前两项都趋于 0. 又由

$$\|\mathbf{b}_k(0)\| \leq \|\mathbf{b}_d(0)\| + \|\delta\mathbf{b}_k(0)\|$$

知 $\mathbf{b}_k(0)$ 有界, 结合 $\lim_{k \rightarrow \infty} |\delta v_k(0)| = 0$ 可知式 (11) 右端第三项也趋于 0. 从而 $\|\delta x_k(1)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 结合 A3) 知 $\|\delta f_k(1)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, $\|\delta\mathbf{b}_k(1)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 即结论对 $t = 0$ 时刻成立.

假设结论对 $t - 1$ 时刻成立, 也即有 $\|\delta x_k(t)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, $\|\delta f_k(t)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, $\|\delta\mathbf{b}_k(t)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 类似上面证明, 可知结论对 t 时刻也成立. 引理得证.

定理 1 对系统 (4) 及指标 (10), 设 A1)–A5) 成立, 在任意控制序列 $\{u_k(t)\}$ 下有

$$V_t(\{u_k(t)\}) \geq R_t \quad \text{a.s.} \quad \forall t.$$

进而, 若控制序列 $\{u_k^0(t)\}$ 使

$$\delta v_k^0(t) \triangleq v_d(t) - v_k^0(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad v_k^0(t) = \mathcal{N}(u_k^0(t)), \quad t = 0, 1, \dots, N - 1,$$

则 $\{u_k^0(t)\}$ 为最优控制序列, 即

$$V_t(\{u_k^0(t)\}) = R_t \quad \text{a.s.} \quad \forall t.$$

证 由 A4) 及 \mathcal{F}_k 的定义知, \mathcal{F}_k 与 $\{w_l(t), l = k + i, i = 1, 2, \dots, \forall t \in [0, N]\}$ 相互独立, $\{w_k(t), \mathcal{F}_k\}$ 为鞅差列, 且 $\sup_k E[|w_k(t)|^2 | \mathcal{F}_{k-1}] < \infty$ a.s. 同时, 输入输出信号及状态变量关于 \mathcal{F}_k 均为适应信号. 于是由 (4) 可知

$$\begin{aligned}&\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k(t) - y_d(t)|^2 \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\mathbf{c}(t)(x_k(t) - x_d(t)) - w_k(t)|^2 \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\mathbf{c}(t)\delta x_k(t)|^2 (1 + o(1)) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |w_k(t)|^2 \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |w_k(t)|^2 \\ &= R_t.\end{aligned}$$

其中第二个等号成立是由引理 1 得到, $o(1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. 上面不等号变为等号的充要条件是

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\mathbf{c}(t)\delta x_k(t)|^2 = 0.$$

若控制序列 $\{u_k^0(t)\}$ 使 $\delta v_k^0(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 由引理 2 知 $\|\delta x_k(t)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 则上式成立. 也即

$$V_t(\{u_k^0(t)\}) = R_t \quad \text{a.s.} \quad \forall t.$$

4 迭代学习控制及其收敛性

我们先定义迭代学习控制. 取 M_k 为满足 $M_{k+1} > M_k$ 且 $M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ 的正数序列. 定义学习控制律如下

$$u_{k+1}(t) = [u_k(t) + a_k \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) e_k(t+1)] I_{[|u_k(t) + a_k \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) e_k(t+1)| \leq M_{\sigma_k(t)}]}, \quad (12)$$

$$\sigma_k(t) = \sum_{i=1}^{k-1} I_{[|u_i(t) + a_i \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_i(t)) e_i(t+1)| > M_{\sigma_i(t)}]}, \quad \sigma_0(t) = 0, \quad (13)$$

其中 $a_k = \frac{1}{k}$ 为学习增益. I_A 为随机事件 A 的示性函数, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数, 分别定义如下

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{若事件 A 成立,} \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

上述算法是带扩展截断的随机逼近算法^[19], 这里根据定义, $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$.

对任意固定的 t , (12) 可改写为

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = & [u_k(t) + a_k \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) (v_d(t) - v_k(t)) \\ & - a_k \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) w_k(t+1) + a_k \varphi_k(t)] \\ & \times I_{[|u_k(t) + a_k \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) (v_d(t) - v_k(t)) - a_k \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) w_k(t+1) + a_k \varphi_k(t)| \leq M_{\sigma_k(t)}]}, \quad (14) \end{aligned}$$

其中

$$\varphi_k(t) = \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) (\mathbf{c}^+ \delta f_k(t) + \mathbf{c}^+ \delta \mathbf{b}_k(t) v_d(t)).$$

在此算法中, 由 A2) 知 $\text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) > 0$ 恒成立. 噪声可分为两部分, 其中

$$\text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) w_k(t+1)$$

为量测噪声, 而 $\varphi_k(t)$ 为结构噪声. 回归函数为

$$\begin{aligned} g_{t,k}(u) & \triangleq \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) (v_d(t) - v) \\ & = \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) (\mathcal{N}(u_d(t)) - \mathcal{N}(u)). \end{aligned}$$

注意到上述回归函数对固定的 t 虽依赖于 k , 但零点不依赖于 k .

对算法 (14) 的收敛性, 我们要用到专著 [19] 中的定理 2.2.4. 为阅读方便起见, 我们引用它, 结合 (14) 把它写成下述引理 3.

引理 3 对固定的 $t \in [0, N]$, 设算法 (13) 和 (14) 满足以下条件

i) 存在连续可微函数 $\zeta(\cdot)$ (称 Lyapunov 函数) 使得

$$\sup_k \sup_{\delta \leq d(u, J_t) \leq \Delta} \zeta_u(u) g_{t,k}(u) < 0, \quad (15)$$

$$\text{对某个 } c_0 > 0, \zeta(0) < \inf_{|u|=c_0} \zeta(u), \quad (16)$$

其中 $\zeta_u(\cdot)$ 表示 $\zeta(\cdot)$ 在 u 处的导数, J_t 表示回归函数与 $\zeta_u(\cdot)$ 的零点集, $d(u, J_t)$ 表示 u 与 J_t 的距离. 还要求 $\zeta(J_t)$ 无处稠密;

ii) 对任意收敛子列 $\{u_{n_k}\}$ 有

$$\lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \sum_{i=n_k}^{m(n_k, T)} a_i \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) w_i(t+1) \right| = 0, \quad (17)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \sum_{i=n_k}^{m(n_k, T)} a_i \varphi_i(t) \right| = 0, \quad (18)$$

其中 $m(k, T) \triangleq \max \left\{ m : \sum_{i=k}^m a_i \leq T \right\}, T > 0$;

iii) 回归函数 $g_{t,k}(u)$ 可测且一致局部有界, 即 $\forall c \geq 0$

$$\sup_k \sup_{\|u\| < c} \|g_{t,k}(u)\| < \infty.$$

那么, $d(u_k(t), J_t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

注 1 需要特别指出, 在 i) 中, 仅要求存在符合这些条件的 $\zeta(\cdot)$ 函数, 并不需要知道 $\zeta(\cdot)$ 的具体形式. $\zeta(\cdot)$ 函数不必唯一, 且对每个时刻 t , $\zeta(\cdot)$ 也不必相同. 为符号简洁起见, 后文均用 $\zeta(\cdot)$ 表示相应的 Lyapunov 函数.

引理 4 对系统 (4) 及指标 (10), 假定 A1)–A5) 及 i) 成立, 则由 (13) 和 (14) 给出的控制序列 $\{u_k(t)\}$ 有 $d(u_k(t), J_t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

证 根据引理 3, 我们只要证明在引理 4 的条件下, 引理 3 中的条件 ii) 和 iii) 成立.

由 A4) 得 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 w_k^2(t) < \infty$, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) w_k(t+1) < \infty$, a.s., (17) 成立.

现在沿时间 t 轴归纳地证明 (18) 成立. $t=0$ 时, 由 A3) 及 A5) 知 $\|\delta f_k(0)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, $\|\delta \mathbf{b}_k(0)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 故 $\varphi_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 故对 $t=0$, 式 (18) 成立. 假设式 (18) 对 $0, \dots, t-1$ 时刻均成立, 若 i) 成立, 则由引理 3 知 $\delta v_k(s) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, s=0, \dots, t-1$. 由引理 2 可知, $\|\delta f_k(t)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \|\delta \mathbf{b}_k(t)\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 故 $\varphi_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 即 (18) 对 t 时刻也成立. 故 ii) 成立.

类似上面推导及引理 2 知, $\operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)$ 有界. 又 $\mathcal{N}(u_d(t)) - \mathcal{N}(u)$ 可测且局部有界, 故 iii) 成立. 引理 4 得证.

下面针对三种非光滑非线性分别证明算法 (12) 和 (13) 给出的控制序列为最优.

定理 2 对系统 (4) 及指标 (10), 设 $\mathcal{N} = DZ$, 假定 A1)–A5) 成立, 则由 (12) 和 (13) 给出的控制序列 $\{u_k(t)\}$ 有界且最优.

证 根据定理 1, 只要证明 $\{u_k(t)\}$ 有界且 $\delta v_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

定义 Lyapunov 函数 $\zeta(u) \triangleq (u_d(t) - u)^2$. $\zeta_u(\cdot)$ 和 $DZ(\cdot)$ 的零点集为

$$J_t = \begin{cases} u_d(t), & \text{若 } u_d(t) \notin I_m, \\ I_m, & \text{若 } u_d(t) \in I_m. \end{cases}$$

现在来证引理 3 中的 i) 成立. 若 $u_d(t) \notin I_m$, 以 $u_d(t) \in I_r$ 为例证明. 用归纳法证明, 即讨论 t 时刻的收敛性时, 总假定对时刻 $s = 0, \dots, t-1$ 均有 $\delta v_k(s) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. 则式 (15) 左端为

$$\begin{aligned} & \sup_k \sup_{\delta \leq d(u, J_t) \leq \Delta} \zeta_u(u) \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) [\mathcal{N}(u_d(t)) - \mathcal{N}(u)] \\ &= \sup_k \sup_{\delta \leq d(u, J_t) \leq \Delta} -2 \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) \cdot [u_d(t) - u] [\mathcal{N}(u_d(t)) - \mathcal{N}(u)], \end{aligned}$$

当 $u \neq u_d(t)$ 时, $[u_d(t) - u][\mathcal{N}(u_d(t)) - \mathcal{N}(u)] > 0$ 恒成立. 对任意 k , 由归纳法假设知 $\operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)$ 恒正且收敛到某正数, 故 (15) 成立. 由于 $\zeta(0) = (u_d(t))^2$, 而随着 $u \rightarrow \pm\infty$ 有 $\zeta(u) \rightarrow \infty$, 故存在适当大的 c_0 使得式 (16) 成立. 根据引理 3 及引理 4 知 $d(u_k(t), J_t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 由于这时 $J_t = \{u_d(t)\}$, 所以 $u_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_d(t)$, 因此 $\{u_k(t)\}$ 有界. 由于 $DZ(\cdot)$ 连续, 所以 $\delta v_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

若 $u_d(t) \in I_m$, $DZ(u_d(t)) = 0$. 此时

$$\zeta_u(u) g_k(u) = \begin{cases} 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) \cdot m_r u (u_d(t) - u), & u \in I_r, \\ 0, & u \in I_m, \\ 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) \cdot m_l u (u_d(t) - u), & u \in I_l, \end{cases}$$

所以 $u \notin J_t$ 时, 式 (15) 成立. 类似 $u_d(t) \notin I_m$ 情形, 知式 (16) 成立. 根据引理 3 和引理 4, 知 $d(u_k(t), J_t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, a.s. 由于这时 $J_t = I_m$, 所以从 $d(u_k(t), J_t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ 知 $\{u_k(t)\}$ 有界且 $\delta v_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. 定理得证.

定理 3 对系统 (4) 及指标 (10), $\mathcal{N} = Pr$, 假定 A1)–A5) 成立, 则由 (12) 和 (13) 所给出的控制序列 $\{u_k(t)\}$ 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_d(t) - u_k(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, N].$$

并且 $V_t(\{u_k(t)\}) = R_t$.

证 注意到预载非线性函数虽不连续, 但严格单调. 取 Lyapunov 函数为

$$\zeta(u) = (u_d(t) - u)^2.$$

由 $\zeta_u(u) = -2(u_d(t) - u)$ 可知 $\zeta_u(\cdot)$ 与回归函数零点重合, 故 $J_t = \{u_d(t)\}$, 是单点集. $\zeta(J_t)$ 无处稠密.

$\zeta_u(\cdot)$ 与回归函数 $\operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t) (Pr(u_d(t)) - Pr(u))$ 单调性相反, 又 $\operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(t)$ 恒正且收敛到某正数, 从而 (15) 成立. 取 c_0 足够大便知 (16) 成立.

于是由引理 4 知, 由 (12) 和 (13) 所定义的控制序列收敛, 且输出在指标 (10) 意义下达到最优.

在给出饱和情形的定理之前, 加强 A5) 为

A5)' 初始状态满足 $x_k(0) - x_d(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 且收敛速度为 $o(k^{-\delta})$, $\delta > 0$.

定理 4 对系统 (4) 及指标 (10), $\mathcal{N} = \text{Sat}$, 假定 A1)–A4) 及 A5)' 成立, 则由 (12) 和 (13) 所给出的控制序列 $\{u_k(t)\}$ 有界且为最优.

证 根据定理 1, 只要证明 $\delta v_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ 即可得最优性.

首先考虑 $t = 0$, 分 $u_d(0) \in I_m$ 和 $u_d(0) \notin I_m$ 两种情形证明.

$u_d(0) \in I_m$ 情形. 回归函数为

$$g_{0,k}(u) \triangleq \text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0) (\text{Sat}(u_d(0)) - \text{Sat}(u)). \quad (19)$$

取 Lyapunov 函数

$$\zeta(u) = - \int_0^u (\text{Sat}(u_d(0)) - \text{Sat}(x)) dx, \quad (20)$$

知 $\zeta_u(\cdot)$ 与 $g_{0,k}(u)$ 的根集为 $J_0 = u_d(0)$, $\zeta(J_0)$ 无处稠密. 下面分别验证 (15) 和 (16).

由于

$$\zeta_u(u) g_{0,k}(u) = -\text{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0) (\text{Sat}(u_d(0)) - \text{Sat}(u))^2,$$

故 $u \neq u_d(0)$ 时, 恒有 $\zeta_u(u) g_{0,k}(u) < 0$, 类似定理 2 中分析, 知 (15) 成立.

因为 $\zeta(0) = 0$, 所以要证 (16) 成立, 只需证明存在适当正数 c_0 使得下两式成立

$$\int_0^{c_0} (\text{Sat}(u_d(0)) - \text{Sat}(x)) dx < 0, \quad (21)$$

$$\int_{-c_0}^0 (\text{Sat}(u_d(0)) - \text{Sat}(x)) dx > 0. \quad (22)$$

以 $u_d(0) \in I_{mr}$ 为例, 经简单的计算可知

$$\int_0^{c_0} (\text{Sat}(u_d(0)) - \text{Sat}(x)) dx = \begin{cases} m_r u_d(0) c_0 - \frac{m_r}{2} c_0^2, & 0 \leq c_0 \leq b_r, \\ -m_r (b_r - u_d(0)) c_0 + \frac{m_r}{2} b_r^2, & c_0 \geq b_r, \end{cases}$$

$$\int_{-c_0}^0 (\text{Sat}(u_d(0)) - \text{Sat}(x)) dx = \begin{cases} m_r u_d(0) c_0 + \frac{m_l}{2} c_0^2, & 0 \leq c_0 \leq -b_l, \\ (m_r u_d(0) - m_l b_l) c_0 - \frac{m_l}{2} b_l^2, & c_0 > -b_l. \end{cases}$$

只要取 $c_0 > \max\{b_r, -b_l\}$ 且适当大即可使 (21), (22) 成立, 从而 (16) 成立. 根据引理 3 及引理 4 知 $d(u_k(0), J_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 此时 $J_0 = \{u_d(0)\}$, 所以 $\{u_k(0)\}$ 有界, 且 $\delta v_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

$u_d(0) \notin I_m$ 情形. 我们直接证明控制序列 $\{u_k(0)\}$ 的有界性和最优性, 而不再借助于引理 3 和 4. 我们只需针对 $u_d(0) \in I_r$ 情形证明, $u_d(0) \in I_l$ 情形证明完全类似. 由 A3) 及 A5)' 知 $\delta f_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, $\delta \mathbf{b}_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ 且速度为 $o(k^{-\delta})$, δ 由 A5)' 定义, 从而 $\varphi_k(0) = o(k^{-\delta})$.

先证明 $\{u_k(0)\}$ 有界, 即算法仅截断有限次. 反设算法截断无穷多次, 则必然存在子列 $u_{n_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ 或 $u_{n_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\infty$. 下面分别证明两者均不可能.

由 $\varphi_k(0) = o(k^{-\delta})$, 知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(0) < \infty$. 由 A4 知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) w_k(1) < \infty$. 若存在子列 $u_{n_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, 则必存在足够大的正整数 k_0 及正数 p , 记 $n_0 = n_{k_0}$, 使得

$$\begin{aligned} u_{n_0}(0) &> b_r + p, \quad M_{\sigma_{n_0}(0)} \geq u_{n_0}(0) + p, \\ \left\| \sum_{k=n_0}^m a_k \varphi_k(0) \right\| + \left\| \sum_{k=n_0}^m a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) w_k(1) \right\| &< p, \quad \forall m \geq n_0. \end{aligned}$$

由此从 (14) 知下式对 $i = 1$ 成立

$$u_{n_0+i}(0) = u_{n_0}(0) + \sum_{k=n_0}^{n_0+i-1} a_k \varphi_k(0) - \sum_{k=n_0}^{n_0+i-1} a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) w_k(1). \quad (23)$$

用归纳法, 假定 (23) 式对 $i = 1, 2, \dots, l$ 均成立, 则

$$\begin{aligned} u_{n_0+l}(0) &= u_{n_0}(0) + \sum_{k=n_0}^{n_0+l-1} a_k \varphi_k(0) - \sum_{k=n_0}^{n_0+l-1} a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) w_k(1) \\ &\geq u_{n_0}(0) - \left\| \sum_{k=n_0}^{n_0+l-1} a_k \varphi_k(0) \right\| - \left\| \sum_{k=n_0}^{n_0+l-1} a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) w_k(1) \right\| \\ &> b_r + p - p = b_r, \end{aligned}$$

于是 $a_{n_0+l} \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_{n_0+l}(0)) \mathbf{c}^+ \mathbf{b}_{n_0+l}(0) (m_r b_r - \operatorname{Sat}(u_{n_0+l}(0))) = 0$. 而

$$\begin{aligned} &u_{n_0+l}(0) + a_{n_0+l} \varphi_{n_0+l}(0) - a_{n_0+l} \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_{n_0+l}(0)) w_{n_0+l}(1) \\ &= u_{n_0}(0) + \sum_{k=n_0}^{n_0+l} a_k \varphi_k(0) - \sum_{k=n_0}^{n_0+l} a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) w_k(1) \\ &\leq u_{n_0}(0) + \left\| \sum_{k=n_0}^{n_0+l} a_k \varphi_k(0) \right\| + \left\| \sum_{k=n_0}^{n_0+l} a_k \operatorname{sgn}(\mathbf{c}^+ \mathbf{b}_k(0)) w_k(1) \right\| \\ &\leq u_{n_0}(0) + p \leq M_{\sigma_{n_0}(0)}, \end{aligned}$$

所以 (14) 对 $k = n_0 + l$ 没有截断, 由此可知 (23) 对 $i = l + 1$ 也成立. 即对 $i = 1, 2, \dots$, (23) 总成立. 结合上式知 $\forall i \geq 1, u_{n_0+i} \leq M_{\sigma_{n_0}(0)}$ 恒成立, 与假设矛盾, 所以不可能存在子列 $u_{n_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$.

再证也不可能存在子列 $u_{n_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\infty$. 回归函数与 Lyapunov 函数仍如 (19) 和 (20) 所示. 此时 $\zeta_u(\cdot)$ 与 $g_{0,k}(u)$ 的根集为 $J_0 = I_r$, $\zeta(J_0)$ 为单值.

若 $\zeta(u_{n_k}(0)), \dots, \zeta(u_{m_k}(0))$ 满足 $\zeta(u_{n_k}(0)) \leq \xi_1, \zeta(u_{m_k}(0)) \geq \xi_2, \xi_1 < \zeta(u_i(0)) < \xi_2, \forall i: n_k < i < m_k$, 则称 $\zeta(u_{n_k}(0)), \dots, \zeta(u_{m_k}(0))$ 穿越区间 $[\xi_1, \xi_2]$. 把专著 [19] 中定理 2.2.1 的 x_k 对应 (12) 中的 $u_k(0)$, 则该定理步骤 1 至步骤 3 照样成立, 所以若 $\xi_1 < \xi_2$ 且 $d([\xi_1, \xi_2], \zeta(J_0)) > 0$, 则序列 $\{\zeta(u_k(0))\}$ 不可能无穷多次穿越 $[\xi_1, \xi_2]$.

若存在子列 $u_{n_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\infty$, 则显然存在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ (如 $[\xi_1, \xi_2] \triangleq [\zeta(\frac{b_r}{2}), \zeta(\frac{2b_r}{3})]$) 被 $\{\zeta(u_k(0))\}$ 穿越无穷多次. 这与上面结论矛盾, 所以不可能存在子列 $u_{n_k}(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\infty$.

因此 $u_d(0) \in I_r$ 时算法仅截断有限次, $\{u_k(0)\}$ 有界性得证. 同时对充分大的 k , 算法 (12) 变成无截断算法, 因此可以应用专著 [19] 中定理 2.2.3, 得 $d(u_k(0), I_r) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, 所以 $\delta v_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. $\{u_k(0)\}$ 的最优性得证.

为了对 t 用归纳法, 需要证明 $\delta x_k(1) = x_d(1) - x_k(1) = o(k^{-\delta_1})$, $\delta_1 > 0$. 注意到

$$\delta x_k(1) = \delta f_k(0) + \delta \mathbf{b}_k(0)v_d(0) + \mathbf{b}_k(0)\delta v_k(0), \quad (24)$$

由 A3), A5)' 知上式右端前两项满足 $\delta f_k(0) = o(k^{-\delta})$, $\delta \mathbf{b}_k(0)v_d(0) = o(k^{-\delta})$.

若 $u_d(0) \in I_m$, 由专著 [19] 中定理 3.1.1 可知 $u_k(0) - u_d(0) = o(k^{-\delta_0})$, $\delta_0 > 0$. 于是 $\delta v_k(0) = o(k^{-\delta_0})$, 由 (24) 知 $\delta x_k(1) = o(k^{-\delta_1})$, $\delta_1 = \min\{\delta, \delta_0\}$.

若 $u_d(0) \in I_r$, 若 $u_k(0) \in I_r$, 则 $\delta v_k(0) = 0$; 若 $u_k(0) \notin I_r$, 则由专著 [19] 中定理 3.1.1 可知 $d(u_k(0), I_r) = o(k^{-\delta_0})$, 从而 $\delta v_k(0) = o(k^{-\delta_0})$. 由 (24) 知 $\delta x_k(1) = o(k^{-\delta_1})$. 若 $u_d(0) \in I_l$, 与 $u_d(0) \in I_r$ 情形完全类似.

对 t 用归纳法, 定理 4 得证.

5 结 论

本文对带有死区、预载、饱和三种输入端非线性及量测噪声的仿射非线性系统, 给出了统一的迭代学习控制律, 在适当的条件下证明了控制序列的有界性及最优性. 本文所考虑三种非光滑非线性函数的参数未知, 系统参数也未知, 系统的动态非线性函数可以任意阶次的多项式增长. 进一步的研究可以考虑状态方程带有随机噪声的情形.

参 考 文 献

- [1] Arimoto S, Karamura S and Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. *J. Robot. Syst.*, 1984, **1**: 123–140.
- [2] Bristow D A, Tharayil M and Alleyne A G. A survey of iterative learning control: A learning-based method for high-performance tracking control. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, **26**(3): 96–114.
- [3] Ahn Hyosung, Chen Y Q and Moore Kevin L. Iterative learning control: Survey and categorization from 1998 to 2004. *IEEE Trans. System Man and Cybernetics Part C*, 2007, **37**(6): 1099–1121.
- [4] Chen Y Q and Wen C. *Iterative Learning Control: Convergence, Robustness and Applications*. London, Springer-Verlag, 1999.
- [5] Xu J X and Tan Y. *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*. New York, Springer, 2003.
- [6] Tao Gang and Kokotovic P V. Adaptive control of plants with unknown dead-zones. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, **39**(1): 59–68.
- [7] Tao Gang and Kokotovic P V. Discrete-time adaptive control of systems with unknown dead-zone. *International Journal of Control*, 1995, **61**(1): 1–17.
- [8] Tao Gang and Canudas de Wit Carlos A. Special issue on adaptive systems with non-smooth nonlinearities. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1997, **11**(1): 1–100.

- [9] Xu Jianxin, Xu Jing and Lee Tongheng. Iterative learning control for systems with input deadzone. *IEEE Trans. Automatic Control*, 2005, **50**(9): 1455–1459.
- [10] Xu Jianxin, Tan Ying and Lee Tongheng. Iterative learning control design based on composite energy function with input saturation. *Automatica*, 2004, **40**(8): 1371–1377.
- [11] Chen H F. Almost surely convergence of iterative learning control for stochastic systems. *Science in China (Series F)*, 2003, **46**(1): 69–79.
- [12] Chen H F and Fang H T. Output tracking for nonlinear stochastic systems by iterative learning control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 2004, **49**(4): 583–588.
- [13] Taware A and Tao Gang. An adaptive dead-zone inverse controller for systems with sandwiched dead-zones. *International Journal of Control*, 2003, **76**(8): 755–769.
- [14] Kung Minchio and Womack Baxter F. Discrete time adaptive control of linear systems with preload nonlinearity. *Automatica*, 1984, **20**(4): 477–479.
- [15] Bai Erwei. Identification of linear systems with hard input nonlinearities of known structure. *Automatica*, 2002, **38**(5): 853–860.
- [16] Annaswamy A M and Wong J E. Adaptive control in the presence of saturation non-linearity. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1997, **11**(1): 3–19.
- [17] Kapila V and Grigoriadis K M. Actuator Saturation Control. USA, Routledge, 2002.
- [18] Chen H F and Guo L. Identification and Stochastic Adaptive Control. Boston, Birkhäuser, 1991.
- [19] Chen H F. Stochastic Approximation and Its Applications. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 2002.

ITERATIVE LEARNING CONTROL FOR A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS

SHEN Dong CHEN Hanfu

(Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

Abstract The iterative learning control (ILC) is considered for a class of nonlinear systems, for which the dynamic nonlinearity grows up not faster than a polynomial as the state diverges and the observation equation is corrupted by noise. The control sequence cannot directly feed to the system but first has to pass through a nonlinear function such as the dead-zone, pre-load, and saturation etc. The iterative learning control sequence is recursively defined, and its boundedness and optimal tracking property are proved in the paper.

Key words Nonlinear system, iterative learning control, measurement noise, dead-zone, pre-load, saturation, stochastic approximation.