系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(7) (2009, 7), 980–988

一类具变号非线性项二阶 m 点边值问题的正解*

杨 刘 沈春芳
(合肥师范学院数学系，合肥 230061)
刘锡平 贾 梅
(上海理工大学理学院，上海 200093)

摘要 利用一个新的不动点定理，研究一类具有变号且依赖一阶导数非线性项二阶 m 点边值问题正解的存在性，得到了正解存在的充分条件.

关键词 m 点边值问题，锥上的不动点定理，正解.

MR(2000) 主题分类号 34B10

1 引 言

本文讨论具变号非线性项二阶 m 点边值问题

$$\begin{cases} u''+f(t,u,u')=0, \quad t\in[0,1], & (1.1)\\ u'(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u'(\xi_i), \quad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i) & (1.2)\end{cases}$$

正解的存在性，其中

C$_1$ $f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty),R)$;

C$_2$ $\xi_i\in(0,1)$, $\alpha_i,\beta_i\geq 0$ 满足 $0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i<1$, $0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i<1$.

常微分方程多点边值问题广泛应用于经典力学和电学等应用数学和物理领域. 对线性多点边值问题的研究起源于 Il'in V A 和 Moiseev E I[1,2], 此后，非线性多点边值问题已经被广泛地研究，可参考 [3–8] 及相关的文献. 但是，为了利用解的凸性，这些结果都是在要求非线性项不变号的情况下得到的. 例如文献 [4] 讨论二阶 m 点边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)f(u)=0, \quad t\in[0,1], & (1.3)\\ u'(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u'(\xi_i), \quad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i) & (1.4)\end{cases}$$

* 安徽省高等学校自然科学研究 (2009KJB100) 项目资助.
收稿日期：2007-03-26.

正解的存在性，在非线性项非负且满足超线性或次线性增长条件下得到了正解存在的结果．目前讨论具变号非线性项二阶多点边值问题的文献还比较少．在非线性项不含一阶导数时，文献 [9–11] 讨论具有变号非线性项多点边值问题正解的存在性，在 f 满足一定增长性条件下得到了正解存在的结果．众所周知，对于二阶常微分方程边值问题，非线性项依赖一阶导数会给问题的处理带来一定的困难．文献 [8] 证明了一个新的锥上不动点定理，并利用它讨论二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0, \quad t \in (0,1), & (1.5)\\ u(0) = 0, \quad u(1) = \alpha u(\eta) & (1.6)\end{cases}$$

正解的存在性，得到了正解存在的结果．但是在非线性项变号的情况下，解 $u(t)$ 在区间 [0,1] 上不再具有凸性， [8] 中引理 3.2 不成立，因而文献 [8] 的结果不能自然地推广到解决非线性项变号且依赖一阶导数的情况．本文通过对文献 [8] 的结果的一个改进，讨论问题 (1.1)–(1.2) 正解的存在性，给出了正解存在的充分性条件．就作者所知，对于二阶常微分方程多点边值问题，在非线性项含有一阶导数且允许非线性项变号的情况下讨论问题正解的存在性的工作，目前还没有见到过．

此外，在 [4] 中，作者将边值问题 (1.3), (1.4) 转化为与其等价的积分方程

$$\begin{aligned} y(t) = &-\int_0^t (t-s)a(s)f(y)\mathrm{d}s + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}a(s)f(y)\mathrm{d}s}{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i - 1} \\ &+\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\Bigg(\int_0^1(1-s)a(s)f(y)\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i - s)a(s)f(y)\mathrm{d}s \\ &-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^{\xi_i}a(s)f(y)\mathrm{d}s}{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i - 1}\Big(1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_i\Big)\Bigg)\end{aligned}$$

进行讨论．在非线性项非负时，上式的右端含有一个正项和两个负项，给应用不动点定理带来一定的麻烦．

在本文中，我们借助于构造该问题的 Green 函数，给出了问题 (1.1), (1.2) 的一个新的等价积分方程，简化了对问题的处理．本文构造 Green 函数的方法具有普遍性，可以推广到其它多点边值问题的讨论上．

2 预备知识

本文利用的主要工具是如下的锥上的不动点定理，可以看做是文献 [8] 中不动点定理的一个改进．

设 E 是一个 Banach 空间， K 是 E 中锥．设 $\gamma,\theta : E \to R^+$ 为两个凹泛函并满足

$$\gamma(\lambda u) = |\lambda|\gamma(u), \quad \theta(\lambda u) = |\lambda|\theta(u), \quad 对\ u\in E,\ \lambda \in R,$$

$$\gamma(u) \le \gamma(v), \quad 对\ u, v \in K,\ u \le v,$$

并且存在常数 $\mu > 0$ 使得

$$\|u\| \le \mu \max\{\gamma(u), \theta(u)\}, \quad 对\ u \in E.$$

引理 2.1 设常数 $r_2 > r_1 > 0, L > 0$, 定义 E 中有界开集 Ω_1, Ω_2 和集合 D_1, D_2

$$\Omega_i = \{u \in E : \gamma(u) < r_i, \theta(u) < L\}, \quad D_i = \{u \in E : \gamma(u) = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

设 $T : K \to K$ 是一个全连续算子, 对 $u \in K$, 满足下列条件

(A_1) $\gamma(Tu) > r_1, u \in K \cap D_1; \gamma(Tu) < r_2, u \in K \cap D_2$;

(A_2) $\theta(Tu) < L, u \in K$;

(A_3) 存在常数 $p \in (\Omega \cap K) \setminus \{0\}, a \ge 0$ 使得 $\gamma(p) \ne 0, \gamma(u + ap) \ge \gamma(u)$,

则 T 在 $(K \cap \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1)$ 中至少有一个不动点.

证 由 [8] 中的引理 2.1, 2.2, 有

$$\deg\{I - T, \Omega_1 \cap K, 0\} = 0, \quad \deg\{I - T, \Omega_2 \cap K, 0\} = 1,$$

则

$$\deg\{I - T, (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1) \cap K), 0\} = \deg\{I - T, \Omega_2 \cap K, 0\} - \deg\{I - T, \Omega_1 \cap K, 0\} = 1,$$

所以 T 在 $(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1) \cap K$ 中至少有一个不动点.

设 $E = C^1[0, 1]$, 其范数

$$\|u\| := \max_{0 \le t \le 1} [(u(t))^2 + (u'(t))^2]^{\frac{1}{2}},$$

E 上的锥 $K = \{u \in E : u(t) \ge 0\}$.

引理 2.2 记 $\xi_0 = 0,\ \xi_{m-1} = 1,\ \alpha_0 = \alpha_{m-1} = \beta_0 = \beta_{m-1} = 0,\ \rho = \big(1 - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i\big)\big(1 - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \beta_i\big) \ne 0,\ y(t) \in C[0, 1]$. 则问题

$$\begin{cases} u'' + y(t) = 0, \quad t \in [0, 1], & (2.1) \\ u'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \beta_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i) & (2.2) \end{cases}$$

的解具有唯一形式

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) \mathrm{d}s, \tag{2.3}$$

其中 $G(t, s)$ 是问题

$$\begin{cases} -u'' = 0, \quad t \in [0, 1], & (2.4) \\ u'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \beta_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i) & (2.5) \end{cases}$$

对应的 Green 函数，可由下式给出：对 $\xi_{i-1} \le s \le \xi_i, i = 1, \cdots, m-1$,

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=i}^{m-1}\beta_k\left[(s-t)+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(t-\xi_k)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(t-s)\right]+\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\beta_k\right)\\ \qquad\displaystyle\cdot\left[(1-s)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(s-\xi_k)\right],\quad t\le s,\\ \displaystyle\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\beta_k\right)\left[(1-t)+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(t-s)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(t-\xi_k)\right]\\ \displaystyle+\sum_{k=i}^{m-1}\beta_k\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(s-\xi_k),\quad t\ge s.\end{cases}$$

证　考虑问题 (2.4), 当 $\xi_{i-1} < s < \xi_i$, $i = 1, 2 \cdots m-1$ 时，设

$$G(t,s)=\begin{cases}A+Bt, & t\le s,\\ C+Dt, & t\ge s,\end{cases}$$

考虑 Green 函数的定义和性质，结合边值条件 (2.5), 我们有

$$\begin{cases}A+Bs=C+Ds,\\ B-D=1,\\ \displaystyle B=\sum_{k=0}^{i-1}\beta_kB+\sum_{k=i}^{m-1}\beta_kD,\\ \displaystyle C+D=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(A+B\xi_k)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(C+D\xi_k).\end{cases}$$

解上述方程组可得

$$A=\frac{1}{\rho}\left[\sum_{k=i}^{m-1}\beta_k\left(1-\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\xi_k\right)+\left(1-\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k\right)\left(1-s+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(s-\xi_k)\right)\right],\quad B=\frac{-\sum\limits_{k=i}^{m-1}\beta_k}{1-\sum\limits_{k=0}^{m-1}\beta_k},$$

$$C=\frac{1}{\rho}\left[\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\beta_k\right)\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_ks-\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k\xi_k\right)+\sum_{k=i}^{m-1}\beta_k\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(s-\xi_k)\right],\quad D=\frac{\sum\limits_{k=0}^{i-1}\beta_k-1}{1-\sum\limits_{k=0}^{m-1}\beta_k}.$$

则

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=i}^{m-1}\beta_k\left[(s-t)+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(t-\xi_k)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(t-s)\right]\\ \qquad\displaystyle+\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\beta_k\right)\left[(1-s)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(s-\xi_k)\right],\quad t\le s,\\ \displaystyle\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}\beta_k\right)\left[(1-t)+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(t-s)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(t-\xi_k)\right]\\ \displaystyle+\sum_{k=i}^{m-1}\beta_k\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(s-\xi_k),\quad t\ge s.\end{cases}$$

这样问题 (2.1), (2.2) 的解可由 (2.3) 式给出.

引理 2.3 假设条件 C_2 满足，则有 $G(t,s)\ge 0,\ 0\le t,\ s\le 1$.

证 对 $\xi_{i-1}\le s\le \xi_i, i=1,2,\cdots,m-1$, 若 $t\le s$,

$$\begin{aligned}(s-t)+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(t-\xi_k)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(t-s)&\ge \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k(s-t)+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(t-\xi_k)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(t-s)\\&=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(s-\xi_k)\ge 0,\end{aligned}$$

$$(1-s)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(s-\xi_k)\ge \sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(1-\xi_k)\ge 0.$$

若 $t\ge s$,

$$(1-t)+\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(t-s)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(t-\xi_k)\ge \sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k(1-s)+\sum_{k=i}^{m-1}\alpha_k(1-\xi_k)\ge 0.$$

则有 $G(t,s)\ge 0,\ t,s\in[0,1]$.

3 f 非负的情况

在这一节里假设 $f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty),[0,+\infty))$.

引理 3.1[4] 假设 C_2 满足，$y\ge 0$ 且在 [0,1] 的任意子区间上不恒等于零,则问题 (2.1), (2.2) 的解 $u(t)$ 满足

(1) $u(t)>0, \min\limits_{0\le t\le 1}u(t)\ge \delta\max\limits_{0\le t\le 1}u(t)$, 其中 $\delta=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i(1-\xi_i)}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_i}$;

(2) $u(t)$ 在 [0,1] 上单调递减.

记

$$M=\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s,\quad N=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s\right|.$$

定义泛函

$$\gamma(u)=\max_{0\le t\le 1}|u(t)|,\quad \theta(u)=\max_{0\le t\le 1}|u'(t)|,$$

其中 $u\in E$, 有 $\|u\|\le\sqrt{2}\max\{\gamma(u),\theta(u)\}$ 并且

$$\gamma(\lambda u)=|\lambda|\gamma(u),\quad \theta(\lambda u)=|\lambda|\theta(u),\quad 对\ u\in E,\ \lambda\in R,$$

$$\gamma(u)\le\gamma(v),\quad 对\ u,v\in K,\ u\le v.$$

则 γ,θ 满足引理 2.1 的条件.

假设存在常数 $L>0, b>\delta b>c>0$ 使得 $f(t,u,v)$ 满足下面增长性条件

C_3 $f(t,u,v)>c/M$ 对 $(t,u,v)\in[0,1]\times[0,c]\times[-L,L]$;

C_4　$f(t,u,v)<\min\{\frac{b}{M},\ \frac{L}{N}\}$ 对 $(t,u,v)\in[0,1]\times[\delta b,b]\times[-L,L]$.

定义

$$f^*(t,u,v)=\begin{cases} f(t,u,v), & (t,u,v)\in[0,1]\times[0,b]\times(-\infty,+\infty),\\ f(t,b,v), & (t,u,v)\in[0,1]\times[b,\infty)\times(-\infty,+\infty),\end{cases}$$

$$f_1(t,u,v)=\begin{cases} f^*(t,u,v), & (t,u,v)\in[0,1]\times[0,\infty)\times[-L,L],\\ f^*(t,u,-L), & (t,u,v)\in[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,-L],\\ f^*(t,u,L), & (t,u,v)\in[0,1]\times[0,\infty)\times[L,\infty),\end{cases}$$

则 $f_1\in C([0,1]\times[0,\infty)\times R,R^+)$. 定义

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)f_1(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s,\quad 0\le t\le 1.$$

考虑 f 的连续性和 $G(t,s)$ 的有界性，由 Ascolli-Arezela 定理不难验证 $T:K\to K$ 是全连续算子. 显然 T 的不动点是问题 (1.1),(1.2) 并且满足

$$0<u(t)<b,|u'(t)|<L,0\le t\le 1.$$

定理 3.1 设条件 C_3, C_4 成立，则问题 (1.1), (1.2) 至少有一个不动点 $u(t)$ 满足

$$c<u(t)<b,\quad |u'(t)|<L,\quad 0\le t\le 1.$$

证　定义 E 中的有界开集 Ω_1,Ω_2 和集合 D_1,D_2

$$\Omega_1=\{u\in E:|u(t)|<c,|u'(t)|<L\},\quad \Omega_2=\{u\in E:|u(t)|<b,|u'(t)|<L\},$$

$$D_1=\{u\in E:\gamma(u)=c\},\quad D_2=\{u\in E:\gamma(u)=b\}.$$

引理 3.1 保证了 $T:K\to K$ 是自映射.

对 $u\in D_1\cap K$, 由条件 C_3 有

$$\begin{aligned}\gamma(Tu)&=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|\\ &\ge\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\right|\times\frac{c}{M}\ge M\times\frac{c}{M}=c.\end{aligned}$$

对 $u\in D_2\cap K$, 由条件 C_4 有

$$\begin{aligned}\gamma(Tu)&=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|\\ &\le\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\right|\times\frac{b}{M}\le M\times\frac{b}{M}=b.\end{aligned}$$

对 $x\in K$, 由条件 C_4, 有

$$\begin{aligned}\theta(Tu)&=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|\\ &\le\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s\right|\times\frac{L}{N}\le N\times\frac{L}{N}=L.\end{aligned}$$

显然存在常数 $p \in K \cap (\Omega_2) \setminus \{0\}$ 使得对任意的 $u \in K, a \ge 0$ 有 $\gamma(u + ap) \ge \gamma(u)$. 由引理 2.1, 至少存在一个 $u \in K \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1)$ 使得 $u(t) = (Tu)(t)$, $t \in [0,1]$ 满足 $c < u(t) < b$, $|u'(t)| < L$, $0 \le t \le 1$, 因而是问题 (1.1), (1.2) 的解. 证毕.

4 允许 f 变号的情况

在允许非线性项变号的情况下, Liu[9], Guo[10], Ren[11] 得到了二阶微分方程多点边值问题正解的存在性, 其中 $f(t,u,u') = f(t,u)$. 本节我们讨论问题 (1.1),(1.2) 具有变号非线性项时正解的存在性.

设常数 $L > 0$, $b > \delta b > c > 0$ 满足条件 $\frac{c}{M} < \frac{L}{N}$ 并且满足下列条件

(H_1) $f(t,u,v) > \frac{c}{M}$, 其中 $(t,u,v) \in [0,1] \times [0,c] \times [-L,L]$;

(H_2) $f(t,u,v) < \min\{\frac{b}{M}, \frac{L}{N}\}$, 其中 $(t,u,v) \in [0,1] \times [0,b] \times [-L,L]$.

定义

$$(Au)(t) = \Big(\int_0^1 G(t,s) f(s,u(s),u'(s)) \mathrm{d}s\Big)^+,$$

即

$$Au = (Tu)^+,$$

其中 $(B)^+ = \max\{B, 0\}, f_1$ 的定义和第 3 节的相同.

设区间 $[t_{i-1}, t_i] \subset [0,1]$ 满足

$$(Tu)(t_{i-1}) = (Tu)(t_i) = 0$$

且

$$(Tu)(t) < 0, \quad t \in (t_{i-1}, t_i),$$

令 $I_1 = \bigcup (t_{i-1}, t_i), I_2 = [0,1] \setminus \overline{I}_1$. 定义凹泛函 γ_1, θ_1

$$\gamma_1(u) = \max_{0 \le t \le 1} |u(t)|, \quad \theta_1(u) = \max\Big\{\max_{t \in I_2} |u'(t)|, \max\{|u'_{(-)}(t_{i-1})|, |u'_{(+)}(t_i)|\}\Big\},$$

显然 γ_1, θ_1 满足引理 2.1 的条件.

设 T 是 $E \to E$ 的算子, 定义

$$\phi: E \to K: (\phi \circ T)(t) = \max\{T(u), 0\}.$$

引理 4.1[10] 设 $T: E \to E$ 是全连续算子, 那么 $(\phi \circ T)$ 也是全连续算子.

定理 4.1 设条件 (H_1)–(H_2) 成立, 则问题 (1.1), (1.2) 至少有一个正解, 如果 f 满足条件 (H_3) $f(t,0,0) \ge 0$ 且在 [0,1] 上不恒等于零.

证 我们首先证明算子 A 有一个不动点 $u_1 \in K$. Banach 空间中的有界开集 Ω_1, Ω_2 和集合 D_1, D_2 与定理 3.1 相同.

对 $u \in D_1 \cap K$, 由条件 (H_1) 有

$$\begin{aligned}\gamma(Tu) &= \max_{0 \le t \le 1} \Big|\Big(\int_0^1 G(t,s) f(s,u(s),u'(s)) \mathrm{d}s\Big)^+\Big| \\ &\ge \max_{0 \le t \le 1} \int_0^1 G(t,s) \mathrm{d}s \times \frac{c}{M} = M \times \frac{c}{M} = c.\end{aligned}$$

对 $u \in D_2 \cap K$, 有

$$\begin{aligned}\gamma(Tu) &= \max_{0\le t\le 1}\Big|\Big(\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\Big)^+\Big|\\ &\le \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s \times \frac{b}{M}\\ &= M\times\frac{b}{M} = b.\end{aligned}$$

对 $x \in K$, 由 (H_2), 结合 θ_1 定义，易证

$$\begin{aligned}\theta_1(Au) &= \max\Big\{\max_{t\in I_2}|(Tu)'(t)|, \max\{|(Tu)'_{(-)}(t_{i-1})|, |(Tu)'_{(+)}(t_i)|\}\Big\}\\ &\le \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 \Big|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f(s,u(s),u'(s))\Big|\mathrm{d}s\\ &\le N\times\frac{L}{N} = L.\end{aligned}$$

故 A 有不动点 u_1 满足 $c < u_1(t) < b, |u_1'(t)| < L$.

显然 u_1 是问题 (1.1),(1.2) 的解的充分必要条件是 $u_1(t)$ 是算子 T 的不动点．下证 $u_1(t)$ 是算子 T 的不动点，若否，则 $I_1 \neq \emptyset$. 对 $t \in I_1$, 由条件 (H_3) 有 $(Tu_1)''(t) = -f(t,0,0) \le 0$, 显然 $(Tu_1)(t)$ 在 I_1 上是凸函数．我们首先证明 $0 \notin I_1$. 假设 $(Tu_1)(0) < 0$, 由 $(Tu_1)(t)$ 的凸性结合引理 3.1 有 $(Tu_1)(t)$ 在 I_1 上单调递减，易证得 $I_1 = [0,1]$, 则 $f(t,0,0) \equiv 0, t \in [0,1]$, 与条件 (H_3) 矛盾，则 $(Tu_1)(0) \ge 0$. 考虑 I_1 非空，结合 $(Tu_1)(t)$ 在 I_1 上的凸性易知 $1 \in I_1$, 故 $(Tu_1)(t) = \min\limits_{0\le t\le 1}(Tu_1)(t) < 0$, 考虑

$$\begin{aligned}(Tu_1)(1) - (Tu_1)(1) &= \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i(Tu_1)(\xi_i) - (Tu_1)(1)\\ &> \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i(Tu_1)(\xi_i) - \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i(Tu_1)(1)\\ &= \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i[(Tu_1)(\xi_i) - Tu_1)(1)] \ge 0,\end{aligned}$$

矛盾．综上， $u_1(t)$ 是算子 T 的一个不动点，因而是问题 (1.1), (1.2) 的一个解．我们完成了对问题 (1.1), (1.2) 正解存在性的讨论．

参 考 文 献

[1] Il'in V A and Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator. *Differential Equations*, 1987, **23**(8): 979–987.

[2] Il'in V A and Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects. *Differential Equations*, 1987, **23**(7): 803–810.

[3] Ma R Y. Positive solutions for a nonlinear three-point boundary value problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1999, **34**: 1–8.

[4] Ma R Y, Cataneda N. Existence of solution for nonlinear m-point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **256**: 556–567.

[5] Panos K P. Positive and monotone solutions of an m-point boundary-value problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2002, **18**: 1–16.

[6] Liu B. Positive solutions of a nonlinear four-point boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, 2004, **155**: 179–203.

[7] Bai Z B, Ge W G and Wang Y F. Multiplicity results for some second-order four-point boundary-value problems. *Nonlinear Analysis*, 2004, **60**: 491–500.

[8] Guo Yanping and Ge Weigao. Positive solutions for three-point boundary-value problems with dependence on the first order derivative. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **290**: 291–301.

[9] Liu B. Positive solutions of second-order three-point boundary value problems with change of sign. *Comput. Math. Appl.*, 2004, **47**: 1351–1361.

[10] Guo Y P, Ge W G, Dong S J. Double positive solutions for second-order three-point boundary value problems with sign changing nonlinearities. *Acta. Appl. Math. Sinica*, 2004, **3**: 522–529 (In Chinese).

[11] Ren J L, Ge W G. Positive solution for three-point boundary value problems with sign changing nonlinearities. *Appl. Math. Lett.*, 2004, **17**: 451–458.

POSITIVE SOLUTION FOR SECOND MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SIGN CHANGING NONLINEARITY

YANG Liu SHEN Chunfang

(*Hefei Teachers College, Hefei* 230061)

LIU Xiping JIA Mei

(*University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai* 200093)

Abstract By using a new fixed point theorem, the existence of positive solution for a kind of second order multi-point boundary value problems with sign changing nonlinearity is obtained.

Key words Multi-point boundary value problem, fixed point theorem, positive solution.