系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
16(4) (1996, 10), 335–337

2- 阶邻域连通无爪图的 Hamilton 性*

李国君
(烟台师范学院数学系, 山东 264025)

刘振宏
(中国科学院系统科学研究所, 北京 100080)

摘要 设 G 是无爪图. 对 $x \in V(G)$, 若 $G[N(x)]$ 不连通, 则存在 $y_i \in V(G)-\{x\}$ $(i=1,2)$, 使 $|N(y_i)\cap K_i(x)| \geq 2$, 且 $|N(y_i)\cap N(K_{i+1}(x))\setminus\{x\}| \geq 2$ (i 模 2), 那么称无爪图 G 是强 2- 阶邻域连通的, 其中 $K_1(x), K_2(x)$ 分别表示 $G[N(x)]$ 的两个分支. 本文证明了: 连通且强 2- 阶邻域连通的无爪图是 Hamilton 图.

关键词 无爪图, 强 2- 阶邻域连通, 最长圈, Hamilton 图.

1 引言

本文讨论的图均指有限、无向简单图. 如果一个图 G 不含 $K_{1,3}$ 作为导出子图, 称 G 是无爪图. 用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集. 对 $S \subseteq V(G)$ 和 G 的子图 H, $G[S]$ 和 G-H 分别表示 G 的由 S 和 $V(G)-V(H)$ 导出的子图. 对 $x \in V(G)$, $N(x)$ 表示 x 的邻域, $N(H)=\bigcup\limits_{x\in V(H)} N(x)$. 设 K, T 是 G 的两个子图 (或顶点子集), $N_T(K)=N(K)\cap V(T)$, $E_G(K,T)=\{uv\in E(G)\,|\,u\in K,\, v\in T\}$, $M_G(K,T)$ 表示边导出子图 $G[E_G(K,T)]$ 的最大匹配. 对一个圈 C, 总可以给它指定一个方向. 对 $a,b\in V(C)$, 用 $C[a,b]$ 表示沿 C 指定的方向从 a 到 b 的一段道路上的顶点集, $\bar{C}[b,a]=C[a,b]$. 对 $x\in V(C)$, x^+ 和 x^- 分别表示 C 上 x 的前继顶点和后继顶点, x^{+l} 和 x^{-l} 类似定义. 对 $A\subset V(C)$, $A^+=\{a\in V(C)\,|\,a^-\in A\}$, $A^-=\{a\in V(C)\,|\,a^+\in A\}$; A^{+l} 和 A^{-l} 仿此定义. 对 $x\in V(G)$,

$$N_2(x)=\{uv\in E(G)\,|\,u\neq x\neq v,\ 且\ \{u,v\}\bigcap N(x)\neq\emptyset\},\ N^2(x)=N(N(x))-\{x\}.$$

如果对任一点 $x\in V(G)$, $G[N(x)]$ 都连通, 称 G 是局部连通; $G[N_2(x)]$ 都连通, 称 G 是 N_2- 局部连通; $G[N^2(x)]$ 都连通称 G 是 2- 阶邻域连通. 若 $G[N(x)]$ 不连通, 必存在 $y_i\in V(G)-\{x\}$ $(i=1,2)$ 使 $|N(y_i)\cap K_i(x)|\geq 2$, 且 $|N(y_i)\cap N(K_{i+1}(x))\setminus\{x\}|\geq 2$ (i 模 2), 称 G 强 2- 阶邻域连通. 其中 $K_1(x), K_2(x)$ 分别表示 $G[N(x)]$ 的两个分支.

1979 年 Oberly 和 Sumner 证明了: 连通且局部连通的无爪图是 Hamilton 图. Z. Ryjáček 在 1990 年又证明了: 连通且 N_2- 局部连通的无爪图 (排除几类例外图) 是 Hamilton 图. 本文证明: 连通且强 2- 阶邻域连通的无爪图是 Hamilton 图.

* 国家自然科学基金和山东省自然科学基金资助课题.

1992 年 8 月 22 日收到, 1995 年 3 月 28 日收到修改、压缩稿.

2 引 理

引理 1 设 C 是无爪图 G 中的最长圈， H 是 G-C 的一个分支. 若 $A = N_C(H) = \{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$, 则

a) $c_i^+ c_i^- \in E(G), i = 1, 2, \cdots, k$;

b) $c_i^+, c_i^- \notin N(c_j), i \neq j$;

c) A^+, A^-, A^{+2}, A^{-2} 都是独立集；

d) $c_i^+ c_j^{+2} \notin E(G), c_i^- c_j^{-2} \notin E(G), i \neq j$.

引理 2 在引理 1 的假设下，若存在 $u \in V(G)$, $c \in A$, $cu \in E(G)$, 且 $u \notin V(C)$ 或 $u^+u^- \in E(G)$, 则

$$N(u) \bigcap (A^+ \bigcup A^- \bigcup A^{+2} \bigcup A^{-2} - \{c^+, c^-, c^{+2}, c^{-2}\}) = \emptyset.$$

引理 3 设 G 是无爪图. 若 $G[N(x)]$ 不连通，则 $G[N(x)]$ 恰有两个分支且每个分支是一个团.

引理 4 在引理 1 的假设下，对 $c \in A$, 若 $B \subseteq N_C(c)$ 是 C 上的相继顶点的集合，且 $|B| \geq 2$, 则 $N_B(H) = \emptyset$. 进一步，若 $G[N(c)]$ 不连通，则 $B \subset K_1$, 从而 $G[\{c^+, c^-\} \cup B]$ 是团. 这里 K_1 是 $G[N(c)]$ 的含 c^+, c^- 的一个分支.

引理 5 在引理 1 的假设下，对 $c \in A$, 若 $v, v^+ \in N_C(c)$, 则存在最长圈 C', 使 v, c, v^+ 是 C' 上的三个相继顶点，且 $c \in N_{C'}(H)$.

引理 6 在引理 1 的假设下，如果 $w, w^+ \in C[c_i, c_{i+1}]$ (下标模 k), 则对任意 $j \neq i$, $|M_G(\{w, w^+\}, \{c_j^+, c_{j+1}^-\})| < 2$.

对 $c \in N_C(H), v_0 \in N_H(c)$, 如果 $G[N(c)]$ 不连通，由引理 3, $G[N(c)]$ 恰含两个分支. 用 K_2 表示含 v_0 的一支， K_1 表示另一支，也用 K_1, K_2 表示其顶点集. 显然，$c^+, c^- \in K_1, K_2 \subseteq N(v_0) \cup \{v_0\}$ 且 $K_1 \subseteq V(C)$.

引理 7 设 C 是连通无爪图 G 的最长圈. 若 $R = G - C$ 非空，则 $N_C(R)$ 中不存在满足下列条件之一的点 c:

1) $G[N(c)]$ 连通；

2) 存在 $y \neq c$, $G[N(c) \cup \{y\}]$ 连通，且 $|N(y) \cap N(c)| \geq 3$;

3) 存在 $y \neq c$, $G[N(c) \cup \{y\}]$ 连通，且 $G[N(y)]$ 连通；

4) 存在 $y \in K_1$, $|N(y) \cap (N(K_2) - \{c\})| \geq 2$;

5) 存在 $y \notin N(K_2) \cup K_1$ 和连接 K_2 与 y 的路 P, 使 $|N(y) \cap K_1| \geq 2$, 且对 P 的任一中途点 u, 或 $u \notin V(C)$ 或 $u^+u^- \in E(G)$.

3 主要结果

定理 连通且强 2- 阶邻域连通的无爪图是 Hamilton 图，

证 若不然，设 C 是 G 的最长圈， $R = G - C$ 非空. 设 $c_1 \in N_C(R), v_0 \in N_R(c_1)$, 则 $G[N(c_1)]$ 不连通. 因 G 强 2- 阶邻域连通，存在 $u_1, u_2 \in K_1, v_1, v_2 \in N(K_2)$ 和 $w \in V(G) - \{c_1\}$, 使 $\{wu_1, wu_2, wv_1, wv_2\} \subset E(G)$. 由引理 7, $v_i \in V(C)$ 且 $v_i^+ v_i^- \notin E(G) \, (i = 1, 2)$. 此时 $w \in V(C)$. 记 $U = \{u_1, u_2\}, V = \{v_1, v_2\}$. 我们只须对 $|N(V) \cap K_2| = 1$ 或 2 分别导出矛盾. 在此只讨论前者，后者省略.

设 $c_2 \in N(V) \cap K_2$, 则 $c_2 \in V(C)$, 且 $u_i \in V(C)$ 及 $u_i^+ u_i^- \notin E(G)\,(i=1,2)$. 由 G 无爪及引理 5, 可设 $u_1 \in \{c_1^+, c_1^-\}, v_1 \in \{c_2^+, c_2^-\}$, 此时 $w \notin \{c_1^+, c_2^-\}$. 还可假设 $w \in C[c_1^+, c_2^-]$ 及 $u_2 \in C(c_1^+, w^-]$.

如果 $\{u_1, v_1\} = \{c_1^+, c_2^+\}$. 注意到 $w^- c_1^+$ 或 $w^- c_2^+ \in E(G)$, 且 $c_1 u_2^-$ 或 $c_1 u_2^+ \in E(G)$ 即可导出矛盾.

如果 $\{u_1, v_1\} = \{c_1^-, c_2^-\}$. c_1, c_2 交换下标，且 C 重新定向，即化为上述情形.

如果 $\{u_1, v_1\} = \{c_1^+, c_2^-\}$. 因 $c_1^- u_2^+ \in E(G)$, 且 $c_1 u_2^+$ 或 $c_1 u_2^- \in E(G)$, 则 $w^+ w^- \notin E(G)$. 此时有 $c_1^+ w^+ \notin E(G)$, 故 $c_1^+ w^- \in E(G)$. 再考虑

$$v_2 \in C[c_2^+, c_1^-) \bigcup C[w^+, c_2^-) \bigcup C(c_1^+, u_2^-) \bigcup C(u_2^+, w^-],$$

无论哪种情形都将违背 C 的选择.

如果 $\{u_1, v_1\} = \{c_1^-, c_2^+\}$. 由引理 6, $w^- u_1, w^+ u_1 \notin E(G)$, 故 $w^+ w^- \notin E(G)$. 此时圈

$$\bar{C}[c_2, w^+]\bar{C}[w^-, u_2^+]\bar{C}[c_1^-, c_2^+]w\bar{C}[u_2, c_1]v_0 c_2$$

与 C 的选择矛盾.

参　考　文　献

[1] Bondy J A and Murty U S R. Graph Theory with Applications. The Macmillan Press, London, 1976.

[2] 刘振宏　等. 无爪图中的 Hamilton 问题的研究概况. 南京大学学报, 1991, **27**: 223-231.

HAMILTONICITY ON 2-ORDER NEIGHBOR CONNECTED CLAW-FREE GRAPHS

Li Guojun

(*Yantai Teacher's College, Shandong* 264025)

Liu Zhenhong

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract Let G be a claw-free graph. For $x \in V(G)$, as long as $G[N(x)]$ is not connected, there exist $y_i \in V(G) - \{x\}\ (i=1,2)$ such that $|N(y_i) \cap K_i(x)| \geq 2$ and

$$|N(y_i) \bigcap N(K_{i+1}(x))| \geq 2 \ (i \bmod 2).$$

Then the graph G is said to be strongly 2-order neighbor connected, where $K_1(x)$ and $K_2(x)$ denote, respectively, the two components of $G[N(x)]$.

It is proved in this paper that any connected and strongly 2-order neighbor connected claw-free graph is Hamiltonian.

Key words Claw-free graph, strongly 2-order neighbor connected, longest cycle, Hamitonian graph.