系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(10) (2008, 10), 1250–1254

Banach 空间中有限个极大单调算子公共零点的投影算法*

魏 利
(河北经贸大学数学与统计学学院, 石家庄 050061)
周 海 云
(军械工程学院应用数学与力学研究所, 石家庄 050003)

摘要 设计了一种带误差项的新投影迭代算法，利用 Lyapunov 泛函与广义投影映射等技巧，在 Banach 空间中，证明了迭代序列强收敛于有限个极大单调算子公共零点的结论.

关键词 Lyapunov 泛函，广义投影映射，极大单调算子，零点.

MR(2000) 主题分类号 47H05, 47H09

1 引言及预备知识

因为应用数学中的很多问题都与求极大单调算子的零点问题密切相关[1], 所以如何设计迭代格式用以逼近极大单调算子的零点便成为十分重要的数学课题. 现有的迭代算法大多局限在 Hilbert 空间的框架内，事实上，与许多重要问题相关的极大单调算子往往定义在一般 Banach 空间中[2]. 基于此因，我们展开了这方面的研究，并在 Banach 空间中得到了极大单调算子零点的近似邻近点算法强、弱收敛的一些结论[3–6]. 继而，又在文 [3–6] 的基础上，在文 [7] 中定义了一种迭代算法，证明了它弱收敛于有限个极大单调算子的公共零点. 本文将在 Banach 空间中构造一种带误差项的投影迭代算法，并证明迭代序列强收敛于有限个极大单调算子的公共零点. 较 [7] 中的近似邻近点算法而言，投影迭代收敛性的证明更简单，且得到的是强收敛的结论.

以下，设 E 为实 Banach 空间， E^* 为其对偶空间. 正规对偶算子 $J \subset E \times E^*$ 定义为 $J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \forall x \in E$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 E 与 E^* 元素间的广义对偶对. 分别用 “ $\longrightarrow$ ” 或 “ $\rightharpoonup$ ” 表示空间 E 或 E^* 中序列的强、弱收敛. 称多值算子 $A \subset E \times E^*$ 为单调算子：若 $\forall x_i \in D(A), y_i \in Ax_i, i = 1, 2$, 均有 $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \geq 0$. 单调算子 A 称为极大单调的：若 $\forall r > 0, R(J + rA) = E^*$. 对单调算子 A, 其核定义为：$A^{-1}0 = \{x \in E : 0 \in Ax\}$. 若 $x \in A^{-1}0$, 则称 x 为 A 的零点.

---

* 国家自然科学基金 (10771050) 项目资助.
收稿日期：2006-07-18, 收到修改稿日期：2007-03-13.

引理 1.1 [8,9] 若 E 是实自反、光滑 Banach 空间, 则 $J: E \to E^*$ 为单值算子且 $JE = E^*$; 若 E 是实一致光滑 Banach 空间，则 $J: E \to E^*$ 在 E 的每个有界子集上一致连续；若 E 是实光滑、一致凸 Banach 空间，则 $J^{-1}: E^* \to E$ 为正规对偶算子且在 E^* 的每个有界子集上一致连续.

引理 1.2 [9] 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子，则: $A^{-1}0$ 是 E 中的闭凸子集； A 的图像 $G(A)$ 是次闭的，即 $\forall \{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \rightharpoonup x\ (n \to \infty)$, $\forall y_n \in Ax_n$, $y_n \to y\ (n \to \infty) \Rightarrow x \in D(A)$ 且 $y \in Ax$.

定义 1.1 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子. $\forall r > 0$, 定义算子 $Q_r^A: E \to E$ 为 $Q_r^A x = (J + rA)^{-1} Jx$, 并称之为 Q_r^A 算子.

定义 1.2 设 E 为实光滑 Banach 空间，定义 Lyapunov 泛函 $\varphi: E \times E \to R^+$ 如下

$$\varphi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in E.$$

引理 1.3 [3] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空闭凸子集，则 $\forall x \in E$, 存在唯一的 $x_0 \in C$, 满足 $\varphi(x_0, x) = \inf\{\varphi(z, x) : z \in C\}$. 此时， $\forall x \in E$, 定义 $Q_C: E \to C$ 为 $Q_C x = x_0$, 并称 Q_C 为从 E 到 C 上的广义投影算子.

引理 1.4 [3] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空闭凸子集，则 $\forall x \in E$, $\forall y \in C$, 有

$$\varphi(y, Q_C x) + \varphi(Q_C x, x) \le \varphi(y, x).$$

引理 1.5[4] 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 为 E 中两个序列，若其中之一有界且 $\varphi(x_n, y_n) \to 0$, $n \to \infty$, 则 $x_n - y_n \to 0$, $n \to \infty$.

引理 1.6[3] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子且 $A^{-1}0 \ne \emptyset$, 则 $\forall x \in E$, $y \in A^{-1}0$ 及 $r > 0$, 有 $\varphi(y, Q_r^A x) + \varphi(Q_r^A x, x) \le \varphi(y, x)$.

引理 1.7 [3] 设 E 为实光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空闭凸子集， $x \in E$, $x_0 \in C$, 则 $\varphi(x_0, x) = \inf\{\varphi(z, x) : z \in C\}$ 当且仅当 $\langle z - x_0, Jx_0 - Jx\rangle \ge 0, \forall z \in C$.

2 主要结论

以下假设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $A_i \subset E \times E^*, i = 1, 2, \cdots, m$ 为极大单调算子且 $D := \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i^{-1}0 \ne \emptyset$. 引入迭代算法

$$\begin{cases} x_0 \in E,\ r_{0,i} > 0,\ i = 1, 2, \cdots, m, \\ y_{n,i} = Q_{r_{n,i}}^{A_i} x_n, \quad n \ge 0,\ i = 1, 2, \cdots, m, \\ Ju_{n,i} = \beta_{n,i} Jy_{n,i} + (1 - \beta_{n,i}) Je_n, \quad n \ge 0,\ i = 1, 2, \cdots, m, \\ Jz_{n,i} = \alpha_{n,i} Jx_n + (1 - \alpha_{n,i}) Ju_{n,i}, \quad n \ge 0,\ i = 1, 2, \cdots, m, \\ H_{n,i} = \{v \in E : \varphi(v, z_{n,i}) \le (\alpha_{n,i} + \beta_{n,i} - \alpha_{n,i}\beta_{n,i})\varphi(v, x_n) \\ \qquad\qquad +(1 - \alpha_{n,i})(1 - \beta_{n,i})\varphi(v, e_n)\}, \quad n \ge 0, \\ H_n := \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_{n,i}, \quad n \ge 0, \\ W_n = \{z \in E : \langle z - x_n, Jx_0 - Jx_n\rangle \le 0\}, \quad n \ge 0, \\ x_{n+1} = Q_{H_n \bigcap W_n}(x_0), \quad n \ge 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\{r_{n,i}\}\subset(0,+\infty)$, $\{\alpha_{n,i}\},\{\beta_{n,i}\}\subset[0,1],\{e_n\}$ 为误差序列.

引理 2.1 由投影算法 (2.1) 产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 是有意义的.

证 显然 W_n 为 E 的闭凸子集. 因

$$\begin{aligned}\varphi(v,z_{n,i})\le\ &(\alpha_{n,i}+\beta_{n,i}-\alpha_{n,i}\beta_{n,i})\varphi(v,x_n)+(1-\alpha_{n,i})(1-\beta_{n,i})\varphi(v,e_n)\\&\Leftrightarrow\|z_{n,i}\|^2-(\alpha_{n,i}+\beta_{n,i}-\alpha_{n,i}\beta_{n,i})\|x_n\|^2-(1-\alpha_{n,i})(1-\beta_{n,i})\|e_n\|^2\\&\le\ 2\langle v,Jz_{n,i}-(\alpha_{n,i}+\beta_{n,i}-\alpha_{n,i}\beta_{n,i})Jx_n-(1-\alpha_{n,i})(1-\beta_{n,i})Je_n\rangle,\end{aligned}$$

故可知 $H_{n,i},i=1,2,\cdots,m$ 也为 E 的闭凸子集.

令 $p\in D$. 由定义 1.1 知, 存在 $y_{0,i}\in E$ 使得 $y_{0,i}=Q^{A_i}_{r_{0,i}}(x_0)$. 于是由引理 1.6 知 $\varphi(p,y_{0,i})\le\varphi(p,x_0),\ i=1,2,\cdots,m$, 从而

$$\begin{aligned}\varphi(p,z_{0,i})&\le\alpha_{0,i}\varphi(p,x_0)+(1-\alpha_{0,i})\varphi(p,u_{0,i})\\&\le(\alpha_{0,i}+\beta_{0,i}-\alpha_{0,i}\beta_{0,i})\varphi(p,x_0)+(1-\alpha_{0,i})(1-\beta_{0,i})\varphi(p,e_0).\end{aligned}$$

因此 $p\in H_{0,i},i=1,2,\cdots,m$. 由于 $W_0=E$, 所以 $p\in H_0\bigcap W_0$. 于是 $x_1=Q_{H_0\cap W_0}(x_0)$ 有意义.

假设 $p\in H_n\bigcap W_n(n\ge1)$ 且 x_{n+1} 有意义, 由定义 1.1 知: 存在 $y_{n+1,i}\in E$ 使得 $y_{n+1,i}=Q^{A_i}_{r_{n+1,i}}(x_{n+1})$. 从而引理 1.6 蕴含 $\varphi(p,y_{n+1,i})\le\varphi(p,x_{n+1}),i=1,2,\cdots,m$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi(p,z_{n+1,i})&\le\alpha_{n+1,i}\varphi(p,x_{n+1})+(1-\alpha_{n+1,i})[\beta_{n+1,i}\varphi(p,y_{n+1,i})+(1-\beta_{n+1,i})\varphi(p,e_{n+1})]\\&\le(\alpha_{n+1,i}+\beta_{n+1,i}-\alpha_{n+1,i}\beta_{n+1,i})\varphi(p,x_{n+1})+(1-\alpha_{n+1,i})(1-\beta_{n+1,i})\varphi(p,e_{n+1}).\end{aligned}$$

因此 $p\in H_{n+1,i},i=1,2,\cdots,m$. 再由引理 1.7 知

$$\langle p-x_{n+1},Jx_0-Jx_{n+1}\rangle=\langle p-Q_{H_n\cap W_n}(x_0),Jx_0-JQ_{H_n\cap W_n}(x_0)\rangle\le0,$$

所以 $p\in W_{n+1}$, 即 $p\in H_{n+1}\bigcap W_{n+1}$. 于是 $x_{n+2}=Q_{H_{n+1}\cap W_{n+1}}(x_0)$ 有意义. 至此利用归纳法证明了由算法 (2.1) 产生的迭代序列有意义.

注 2.1 由引理 2.1 的证明过程可知: $D:=\bigcap\limits_{i=1}^{m}A_i^{-1}0\subset H_n\cap W_n$, 对 $n\ge0$.

定理 2.1 设 $\{x_n\}$ 是由 (2.1) 产生的迭代序列, 设 $\inf\limits_{n\ge0}r_{n,i}>0,\ \liminf\limits_{n\to\infty}\alpha_{n,i}>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\beta_{n,i}=1$ 且存在正常数 M 使得 $\|e_n\|\le M$, 则 $x_n\to Q_D(x_0),\ n\to\infty$.

证 第 1 步 $\{x_n\}$ 有界.

事实上 $\forall p\in D\subset H_n\bigcap W_n$, 由引理 1.4 知

$$\varphi(p,Q_{W_n}x_0)+\varphi(Q_{W_n}x_0,x_0)\le\varphi(p,x_0).$$

又由 W_n 的定义及引理 1.7 和引理 1.3 知 $x_n=Q_{W_n}x_0$. 从而 $\varphi(p,x_n)+\varphi(x_n,x_0)\le\varphi(p,x_0)$. 于是 $\{x_n\}$ 有界. 利用引理 1.6 还知 $\{y_{n,i}\}$ 也有界, $\forall i=1,2,\cdots,m$ 及 $n\ge0$.

第 2 步 $\omega(x_n)\subset D$, 其中 $\omega(x_n)$ 表示 $\{x_n\}$ 的所有弱收敛子列的弱极限点的全体.

因为由第 1 步知 $\varphi(x_{n+1},x_n)+\varphi(x_n,x_0)\le\varphi(x_{n+1},x_0)$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n,x_0)$ 存在. 于是 $\varphi(x_{n+1},x_n)\to0,\ n\to\infty$. 由引理 1.5, $x_{n+1}-x_n\to0,n\to\infty$.

因 $x_{n+1} \in H_{n,i}, \forall i=1,2,\cdots,m$ 所以

$$\varphi(x_{n+1},z_{n,i}) \le (\alpha_{n,i}+\beta_{n,i}-\alpha_{n,i}\beta_{n,i})\varphi(x_{n+1},x_n)+(1-\alpha_{n,i})(1-\beta_{n,i})\varphi(x_{n+1},e_n),$$

于是 $\varphi(x_{n+1},z_{n,i}) \to 0, n\to\infty$, 从而 $x_{n+1}-z_{n,i}\to 0, n\to\infty, \forall i=1,2,\cdots,m.$

因 J 和 J^{-1} 均在有界集上一致连续, 故由 $Jz_{n,i}=\alpha_{n,i}Jx_n+(1-\alpha_{n,i})Ju_{n,i}$ 及 $\liminf\limits_{n\to\infty}\alpha_{n,i}>0$ 知 $u_{n,i}-x_n\to 0$, 再由 $Ju_{n,i}=\beta_{n,i}Jy_{n,i}+(1-\beta_{n,i})Je_n$ 知 $y_{n,i}-u_{n,i}\to 0, n\to\infty$. 进而 $y_{n,i}-x_n\to 0, n\to\infty, \forall i=1,2,\cdots,m.$

由第 1 步知 $\omega(x_n)\ne\emptyset$. 于是 $\forall q\in\omega(x_n)$, 存在 $\{x_n\}$ 的子列，不妨仍记为 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\rightharpoonup q$, 当 $n\to\infty$. 从而 $y_{n,i}\rightharpoonup q$, 当 $n\to\infty, \forall i=1,2,\cdots,m$. 由 $y_{n,i}$ 的定义又知：存在 $v_{n,i}\in A_iy_{n,i}$ 使 $v_{n,i}\to 0,\ n\to\infty, \forall i=1,2,\cdots,m$. 故引理 1.2 蕴含 $q\in D$.

第 3 步　$x_n\to w^*=Q_Dx_0$, 当 $n\to\infty$.

令 $\{x_{n_i}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的弱收敛到 $w\in D$ 的任意子列. 因 $x_{n+1}=Q_{H_n\cap W_n}(x_0)$ 且 $w^*\in D\subset H_n\bigcap W_n$, 故 $\varphi(x_{n+1},x_0)\le\varphi(w^*,x_0)$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi(x_n,w^*)&=\varphi(x_n,x_0)+\varphi(x_0,w^*)-2\langle x_n-x_0,Jw^*-Jx_0\rangle\\&\le\varphi(w^*,x_0)+\varphi(x_0,w^*)-2\langle x_n-x_0,Jw^*-Jx_0\rangle,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty}\varphi(x_{n_i},w^*)&\le\varphi(w^*,x_0)+\varphi(x_0,w^*)-2\langle w-x_0,Jw^*-Jx_0\rangle\\&=2\langle w^*-w,Jw^*-Jx_0\rangle\le 0,\end{aligned}$$

故 $\varphi(x_{n_i},w^*)\to 0,\ i\to\infty$. 由引理 1.5, $x_{n_i}\to w^*,\ i\to\infty$. 此即表明 $x_n\rightharpoonup w^*, n\to\infty$. 又因为 $\{x_n\}$ 的所有弱收敛子列均强收敛于 w^*, 故 $x_n\to w^*=Q_D(x_0),\ n\to\infty$.

注　2.2　与文 [3–7] 中近似邻近点迭代算法收敛性的证明相比较，此文关于投影算法收敛性的证明则非常简单.

注　2.3　将迭代算法 (2.1) 的迭代步稍作修改可得算法

$$\begin{cases}x_0\in E,\ r_{0,i}>0,\ i=1,2,\cdots,m,\\ y_{n,i}=Q_{r_{n,i}}^{A_i}x_n,\quad n\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m,\\ Ju_{n,i}=\beta_{n,i}Jy_{n,i}+(1-\beta_{n,i})Je_n,\quad n\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m,\\ Jz_{n,i}=\alpha_{n,i}Jx_0+(1-\alpha_{n,i})Ju_{n,i},\quad n\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m,\\ H_{n,i}=\{v\in E:\varphi(v,z_{n,i})\le\alpha_{n,i}\varphi(v,x_0)+(1-\alpha_{n,i})\beta_{n,i}\varphi(v,x_n)\\ \qquad\qquad +(1-\alpha_{n,i})(1-\beta_{n,i})\varphi(v,e_n)\},\quad n\ge 0,\\ H_n:=\bigcap\limits_{i=1}^{m}H_{n,i},\quad n\ge 0,\\ W_n=\{z\in E:\langle z-x_n,Jx_0-Jx_n\rangle\le 0\},\quad n\ge 0,\\ x_{n+1}=Q_{H_n\cap W_n}(x_0),\quad n\ge 0.\end{cases}\tag{2.2}$$

类似于定理 2.1 可证明下面的结论.

推论 2.1　设 $\{x_n\}$ 是由 (2.2) 产生的迭代序列, 设 $\liminf\limits_{n\ge 0}r_{n,i}>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{n,i}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_{n,i}=1, i=1,2,\cdots,m$ 且存在正常数 M 使得 $\|e_n\|\le M$, 则 $x_n\to Q_D(x_0), n\to\infty$.

参 考 文 献

[1] Rockafellar R T. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM. J. Control and Optim.*, 1976, **14**: 877–898.

[2] Mosco U. Perturbation of variational inequalities. Nonlinear Functional Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, IL, 1968.

[3] 魏利，周海云．Banach 空间中极大单调算子零点的带误差项的新迭代格式．应用数学，2006, **19**(1): 101–105.

[4] 魏利，周海云．Banach 空间中极大单调算子零点的迭代收敛定理及应用．数学的实践与认识，2006, **36**(5): 235–241.

[5] Wei Li. A new iterative algorithm with errors for maximal monotone operators and its applications. Proceeding of ICMLC 2005 Conference, Guangzhou, 2005, 969–975.

[6] 魏利，周海云．Banach 空间中极大单调算子零点的迭代逼近定理．数学研究与评论，2007, **27**(4): 913–918.

[7] 魏利，周海云．Banach 空间中有限个极大单调算子公共零点的迭代格式．系统科学与数学，2007, **27**(2): 184–193.

[8] Takahashi W. Nonlinear Functional Analysis. Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[9] Pascali D, Sburlan S. Nonlinear Mappings of Monotone Type. Sijthoff and Noordhoff International Publishers, Romania, 1978.

PROJECTION SCHEME FOR COMMON ZERO POINTS OF FINITE MAXIMAL MONOTONE OPERATORS IN BANACH SPACES

WEI Li

(*School of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang* 050061)

ZHOU Haiyun

(*Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang* 050003)

Abstract A new projection scheme with error terms is constructed and is proved to be strongly convergent to common zero points of finite maximal monotone operators in Banach space by using the techniques of Lyapunov functional and generalized projection operator.

Key words Lyapunov functional, generalized projection mapping, maximal monotone operator, zero point.