

采用可变边界层法削弱一类 非线性变结构系统的抖振

李军红 李兰君 阳武娇

(南华大学电气工程学院, 衡阳 421001)

摘要 针对一类非线性系统, 提出一种削弱变结构控制系统抖振的新方法——可变边界层法, 推导出变结构控制系统的稳态误差与饱和特性宽度之间定量的数学关系, 通过系统的稳态误差指标可以设计出边界层宽度变化的饱和特性, 从而既削弱了系统的抖振又满足系统稳态误差指标, 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词 变结构控制, 非线性系统, 边界层, 抖振.

MR(2000) 主题分类号 93C10

1 引言

变结构控制系统的抖振现象是其应用的最大障碍. 目前已提出不少的解决方案, 主要包括时变切换面法^[1]、边界层法、变加权系数法^[2]以及与其他控制方法结合^[3]等等. 边界层法原则上能够削弱变结构系统的抖振, 近年来已成为该领域研究的热点. Pushkin^[4]采用固定边界法代替常规饱和特性以消除抖振, 取得了一定的效果; XuJian-Xin^[5]采用扇区特性代替常规饱和特性, 削弱抖振, 同时也减小系统的稳态误差, 但采用该方法控制时, 状态轨迹距离平衡点越远, 饱和特性宽度越大, 系统鲁棒性越差; Bartolini^[6]设法使抖振发生在控制量的虚拟导数上以平滑控制量, 但使系统失去了变结构系统特有的降阶特性. 应用边界层法削弱变结构系统的抖振关键在于如何确定边界层的宽度, 因为对于不确定性非线性系统来说, 边界层宽度选取太小, 稳态误差会大大减小, 但抖振又会加强; 相反边界层宽度选取得太大, 虽然可以大大削弱抖振, 但又会给系统带来较大的稳态误差^[7]. 以前的有关方法由于不能对系统稳态误差做出定量的描述, 所以在确定边界层宽度时, 不能很好地解决抖振和稳态误差间的矛盾. 为了克服这一缺点, 本文提出了一种可变边界层法, 推导出变结构控制系统的稳态误差与边界层宽度之间定量的数学关系, 可以根据稳态误差指标和系统不确定性大小动态改变边界层的宽度, 能很好地协调系统抖振和稳态误差间的矛盾, 使系统取得良好的综合效果.

2 一类不确定非线性系统的变结构控制

考虑一类典型 SISO 仿射非线性系统^[8]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= f(X, t) + b(X, t)u(t) + d(t), \\ y &= x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中, 状态向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T$, $u(t)$ 是控制输入; y 是系统的输出. 假设 $b(X, t)$ 为已知函数, $f(X, t)$ 是不确定的有界函数且

$$|f(X, t) - f^*(X, t)| \leq F(X, t), \quad (2)$$

其中, $f^*(X, t)$ 为 $f(X, t)$ 的估计值, 且有 $F = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$. 另外, $d(t)$ 是外干扰, 假设系统外干扰 $d(t)$ 有界, 满足

$$|d(t)| \leq D(t). \quad (3)$$

系统控制的目的是在 $f(X, t)$ 不确定和存在外干扰 $d(t)$ 的情况下使系统状态跟踪预先设定的参考向量 $X_d = (x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)})^T$ 或者使系统输出 $y(t)$ 跟踪参考信号 $y_r(t)$, 并使系统保持稳定且具有良好的性能. 若设跟踪误差为 $e = y(t) - y_r(t) = x_1 - x_d$, 取切换函数

$$S(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + e_n, \quad (4)$$

式中 $e_1 = e$, $e_2 = \dot{e}_1 = \dot{e}$, $e_3 = \dot{e}_2 = \dot{e}^{(2)}$, \dots , $e_n = \dot{e}_{n-1} = \dot{e}^{(n-1)}$, λ 是一正数, $\frac{d}{dt}$ 为微分算子, 常数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ 满足霍尔维兹稳定多项式^[9]: $\lambda^{n-1} + C_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + C_2\lambda + C_1$.

定理 1 对于式 (1) 所描述的系统, 取式 (4) 的切换函数, 如果控制输入信号取为

$$u(t) = b^{-1}(X, t)[u_{eq} - k(X, t)\text{sgn}(S(t))], \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -f^*(X, t) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} + x_d^{(n)}, \\ k(X, t) &= F(X, t) + D(t) + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0). \end{aligned} \quad (6)$$

则滑动模态存在且可达.

证 式 (4) 对时间求导

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \lambda_1 \dot{e}_1 + \lambda_2 \dot{e}_2 + \dots + \lambda_{n-1} \dot{e}_{n-1} + \dot{e}_n \\ &= \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + \dots + \lambda_{n-1} e_n + \dot{e}_n. \end{aligned} \quad (7)$$

取 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2} S^2$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S\dot{S} = S(\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + \dots + \lambda_{n-1} e_n + \dot{e}_n) \\ &= S \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} + \dot{e}_n \right) = S \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} + x_1^{(n)} - x_d^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

根据式 (1) 可知

$$x_1^{(n)} = \dot{x}_n = f(X, t) + b(X, t)u + d(t). \quad (9)$$

把式 (9) 代入式 (8) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} + f(X, t) + b(X, t)u + d(t) - x_d^{(n)} \right) \\ &= S \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} + f(X, t) + b(X, t)b^{-1}(X, t)(u_{eq} - k(X, t)\text{sgn}(S(t)) + d(t)) - x_d^{(n)} \right) \\ &= S \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} + f(X, t) + u_{eq} - k(X, t)\text{sgn}(S(t)) + d(t) - x_d^{(n)} \right) \\ &= S(f(X, t) - f^*(X, t) - (F(X, t) + D(t) + \varepsilon)\text{sgn}(S(t)) + d(t)) \\ &= S(f(X, t) - f^*(X, t) + d(t)) - (F(X, t) + D(t) + \varepsilon)|S| \\ &\leq |S|(f(X, t) - f^*(X, t) + d(t)) - (F(X, t) + D(t) + \varepsilon)|S| \\ &< -\varepsilon|S|. \end{aligned}$$

根据滑动模态到达条件

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2, \quad \dot{V}(x) < 0,$$

可知定理 1 的结论是正确的.

3 可变边界层法的提出

常规边界层法一般是采用边界层宽度 β 不变的饱和函数 $\text{sat}(\frac{s}{\beta})$ 代替式 (5) 中的开关函数 $\text{sgn}(S)$, 根据 $K(X, t)$ 的最大幅值确定边界层宽度 β , 虽然可以平滑抖振, 但同时会增加系统的稳态误差. 如果要减小稳态误差, 就必须减小边界层的宽度 β , 这样又不能有效地平滑抖振. 可变边界层法是根据不确定性大小、外干扰的大小和系统稳态误差指标动态调整边界层的宽度, 寻求最优的边界层宽度, 兼顾减小抖振和满足系统稳态误差, 提高控制的综合效果. 在滑模切换面附近定义一个边界层宽度可随时间变化的饱和特性带 $B(t)$,

$$B(t) = \{X(t), |S(t)| < \beta(t)\}, \quad (10)$$

其中, $\beta(t)$ 是关于时间 t 的函数, 表示边界层的宽度. 对于系统式 (1) 来说, 可类似常规的边界层法, 采用边界层宽度变化的饱和函数代替控制输入信号 $u(t)$ 中的开关函数 $\text{sgn}(S)$

$$u(t) = b^{-1}(X, t)(u_{eq} - \hat{k}(X, t)\text{sat}(S(t), \beta(t))), \quad (11)$$

式中

$$u_{eq} = -f^*(X, t) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} + x_d^{(n)}, \quad (12)$$

$$\hat{k}(X, t) = F(X, t) + D(t) + \varepsilon - \dot{\beta}(t), \quad \varepsilon > 0. \quad (13)$$

饱和和特性函数 $\text{sat}(S(t), \Delta(t))$ 的定义如下

$$\text{sat}(S(t), \beta(t)) = \begin{cases} \frac{S(t)}{\beta(t)}, & |S(t)| \leq \beta(t), \\ \text{sgn}(S(t)), & |S(t)| \geq \beta(t). \end{cases} \quad (14)$$

由式 (6) 和式 (13) 可知

$$\hat{k}(X, t) = k(X, t) - \dot{\beta}(t). \quad (15)$$

当系统的状态轨迹在 $|S(t)| > \beta(t)$ 区域时, 系统特性等同于常规的变结构控制, 要保证饱和带 $B(t)$ 外的系统状态轨迹很快被吸引至饱和带内部, 必须满足下面滑模存在条件^[5]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(S^2(t)) = S\dot{S} \leq (\dot{\beta}(t) - \varepsilon)|S(t)|, \quad (\varepsilon \text{ 为一正的裕度常数}). \quad (16)$$

按照定理 1 的证明方法, 很容易证明系统满足滑模存在条件式 (16); 当系统的状态轨迹在 $|S(t)| \leq \beta(t)$ 区域时, 采用变边界饱和和特性代替开关特性, 边界层宽度可以动态改变, 这样不仅能减少变结构系统的抖振, 又能满足系统稳态误差的指标, 有效克服了常规边界层法的缺点.

4 系统稳态误差的分析

当系统的状态轨迹在 $|S(t)| \leq \beta(t)$ 区域时, 采用了变边界饱和和动态特性, 本文提出了下述两个定理, 给出了系统稳态误差与边界层宽度之间的定量描述, 为应用可变边界层法提供了理论依据.

定理 2 若对于被控对象式 (1) 采用可变边界层法进行控制, 系统满足滑模存在条件式, 则边界层宽度 $\beta(t)$ 受下列方程约束

$$\dot{\beta}(t) = -\gamma\beta(t) + k(X_d, t), \quad (17)$$

式中

$$\gamma = \frac{\hat{k}(X_d, t)}{\beta(t)}.$$

证 当 $|S(t)| \leq \beta(t)$ 时, 由式 (1), 式 (7), 式 (11) 和式 (14) 容易得到

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} - x_d(n) + f(X, t) + b(X, t)u + d(t) \\ &= -\frac{\hat{k}(X, t)}{\beta(t)}S(t) - \Delta f^*(X, t) + d(t), \end{aligned}$$

式中

$$\Delta f(X, t) = f(X, t) - f^*(X, t).$$

把 \dot{S} 在 $X = X_d$ 处按泰勒级数展开, 取一阶近似, 其余高阶项合并为 $o(\xi)$, 有

$$\dot{S}(t) = -\frac{\hat{k}(X_d, t)}{\beta(t)}S(t) - \Delta f(X_d, t) + d(t) + o(\xi), \quad (18)$$

式中, $o(\xi)$ 可看做 X_d 代替 X 而产生的高阶无穷小. 令 $\gamma = \frac{\widehat{k}(X_d, t)}{\beta(t)}$, 再由式 (15) 可知

$$\dot{\beta}(t) = -\gamma\beta(t) + k(X_d, t).$$

定理 3 若对于被控对象式 (1) 采用可变边界层法控制, 则满足系统的稳态误差小于给定值 e_m 的充分条件是饱和特性宽度 $\beta(t)$ 的方程 $\dot{\beta}(t) = -\gamma\beta(t) + k(X_d, t)$ 中的参数 γ 必须满足

$$\gamma > \frac{\max_{\forall t}(F(X_d, t) + D(t))}{\lambda^{n-1}e_m}. \quad (19)$$

证 由式 (18), 系统在 $|S(t)| \leq \beta(t)$ 区域内, $-\Delta f(X_d, t) + d(t) + o(\xi)$ 作为输入, $S(t)$ 作为输出的等效框图如图 1 所示. 由于 $o(\xi)$ 为高阶无穷小, 而式 (19) 确定的 γ 值是一个范围, 因此在下面的分析中可以将 $o(\xi)$ 忽略, 图 1 所示输出 $S(t)$ 与输入 $-\Delta f(X_d, t) + d(t)$ 之间的关系为

$$S(s) = \frac{1}{s + \gamma}(-\Delta f(s) + d(s)). \quad (20)$$

根据终值定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + \gamma}(-\Delta f(s) + d(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \gamma} \lim_{s \rightarrow 0} s(-\Delta f(s) + d(s)) \\ &= \frac{1}{\gamma} \lim_{t \rightarrow \infty} (-\Delta f(X_d, t) + d(t)) \\ &\leq \frac{\max_{\forall t}(F(X_d, t) + D(t))}{\gamma}. \end{aligned}$$

于是, 系统的稳态滑模误差 S_∞ 应该在下述的范围内

$$S_\infty \leq \frac{\max_{\forall t}(F(X_d, t) + D(t))}{\gamma}. \quad (21)$$

由式 (4) 可知

$$\begin{aligned} e_m &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(s + \lambda)^{n-1}} S(s) \\ &= \frac{1}{\lambda^{n-1}} \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} S_\infty. \end{aligned} \quad (22)$$

由式 (21) 和式 (22) 可以推导出

$$\gamma > \frac{\max_{\forall t}(F(X_d, t) + D(t))}{\lambda^{n-1}e_m}.$$

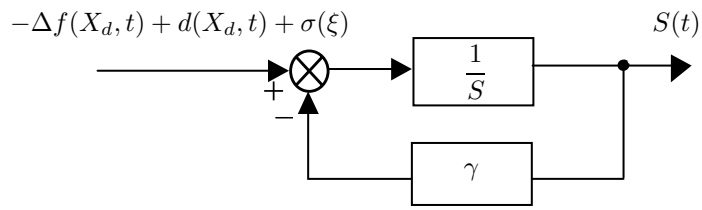


图 1 切换面等效方框图

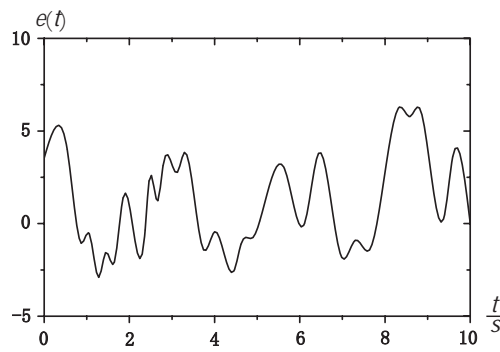


图 2 系统控制量

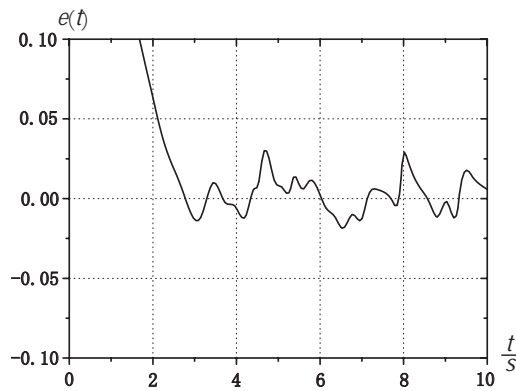


图 3 系统稳态误差

5 仿真实例

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(1 + 0.25 \sin t)x_1^2 + u + \sin(2t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (23)$$

由式 (23) 可知:

$$d(t) = \sin(2t), \quad f^*(X, t) = -x_1^2, \quad \Delta f(X, t) = -0.25x_1^2 \sin t,$$

$$b(X, t) = 1, \quad F(X, t) = 0.25x_1^2, \quad D(t) = 1.$$

假设参考输出信号为

$$y_r = X_d = \sin(2t); \quad \lambda = 2,$$

则滑模切换面为

$$S(t) = 2e_1(t) + e_2(t) = 2e(t) + \dot{e}(t),$$

其中 $e(t) = e_1(t) = x_1 - x_d = y - y_r$, 系统要求的误差指标 $e_m = 0.1$. 本实例采用计算机语言 MATLAB/SIMULINK 进行了仿真, 仿真时 $x_1(0), x_2(0), \beta(0)$ 和 ε 分别取 5, -0.45, 0.2 和 0.2, 计算机采样时间取为 1ms. 可变边界层法的设计如下:

(1) 根据定理 3 计算 γ 值

$$\max_{\forall t} (F(x_d, t) + D(t)) = 0.25 \sin^2(2t) + 1 = 1.25,$$

$$\gamma > \frac{1.25}{2 \times 0.1} = 6.25, \quad \text{取 } \gamma = 7.$$

(2) 由式 (11) 可确定控制策略

$$u(t) = x_1^2 - 2x_2 - 4 \sin(2t) + 4 \cos(2t) - \hat{k}(X, t) \text{sat}(s(t), \beta(t)),$$

式中

$$\hat{k}(X, t) = 0.25x_1^2 + 1.2 - \dot{\beta}(t).$$

由定理 2 可确定边界层宽度 $\beta(t)$ 的约束方程为

$$\dot{\beta}(t) = -7\beta(t) + 0.25 \sin^2(2t) + 1.2.$$

其仿真结果如图 2, 图 3 所示. 从图中可以看出控制量的抖振明显削弱, 并且稳态误差也达到了预先设计的要求.

6 结 语

本文针对一类典型 SISO 仿射非线性系统, 提出了一种可变边界层法, 给出了变结构控制系统的稳态误差与边界层宽度之间的数学关系, 根据这种关系可设计出边界层宽度动态变化的饱和特性. 计算机仿真实验结果表明该方法有效克服了传统边界层法的缺点, 很好地

解决了系统抖振和稳态误差之间的矛盾, 既能削弱系统的抖振, 又能满足系统稳态误差的指标, 使系统取得良好的综合效果.

参 考 文 献

- [1] Lee Jujang, Xu Yangsheng. A new method of switching surface design for multivariable variable structure systems. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 2001, **63**(1): 19–29.
- [2] 张晓宇. 变结构控制系统抖振问题的研究. 硕士学位论文, 杭州, 浙江大学, 2003.
- [3] Lin F J, Chiu S L. Adaptive fuzzy sliding-mode control for PM synchronous servo motor drives. *IEEE Proceedings Control Theory and Applications*, 1998, **145**(1): 63–72.
- [4] Pushkin Kachroo, Masayo Shi, Tom Izuka. Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1996, **41**(7): 1063–1068.
- [5] Xu Jianxin, Lee Tongheng, Wang Mao et al. Design of variable structure controllers with continuous switching control. *Int J Contr*, 1996, **65**(3): 409–431.
- [6] Bonto Lini G. An improved, chattering free, VSC scheme for uncertain dynamical system. *IEEE Trans on Autom Control*, 1996, **41**(8): 241–246.
- [7] Nguyen Q I, Rye D C, Durrantwhyte H F. Fuzzy sliding-mode controllers with application. *IEEE*, 2001, **48**(1): 38–46.
- [8] 庄开宇. 变结构控制理论若干问题研究及其应用. 博士学位论文, 杭州, 浙江大学, 2002.
- [9] Utkin V I. Variable structure control systems with sliding mode. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**: 212–222.

CHATTERING REDUCTION USING VARIABLE BOUNDARY LAYER SOLUTION IN A CLASS OF NONLINEAR VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS

LI Junhong LI Lanjun YANG Wujiao

(Faculty of Electrical Engineering, Nanhua University, Hengyang 421001)

Abstract A new method, variable boundary layer solution, is proposed in this paper for a class of nonlinear variable structure systems to restrain the chattering. The mathematical relationship between the static errors and the width of saturating property is presented. The saturating property with time-varying boundary layer width can be designed through the specification of the static errors, which can not only reduce the chattering in the system but also simultaneously satisfy the specification of the static errors. The simulation results show the validity of the method.

Key words Variable structure control, nonlinear systems, boundary layer, chattering.