系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(5) (2009, 5), 577–584

关于齐次树上随机场的一类强偏差定理*

彭维才 杨卫国

(江苏大学理学院，镇江 212013)

摘要 通过引进渐近对数似然比作为齐次树上任意 Markov 随机场逼近的一种度量，通过构造鞅的方法，建立了关于随机场的一类强偏差 (也称小偏差) 定理．所得结论推广了一个已知的结果．

关键词 强偏差定理，齐次树，随机场．

MR(2000) 主题分类号 60J10, 60F15

1 引 言

若齐次树 T 上的每个顶点都有 $N+1$(N 为正整数) 个相邻的顶点，则我们称之为 Bethe 树，记作 $T_{B,N}$. 我们首先选定一个顶点作为根顶点 (简称根), 并记为 o. 设 σ,τ 为树的两个顶点，如果 τ 位于连接 o 到 σ 的唯一路径上，则记 $\tau\le\sigma$, 且记 $|\sigma|$ 为这条路径上的顶点数．对任意的两个顶点 σ,τ, 记 $\sigma\wedge\tau$ 为满足

$$\sigma\wedge\tau\le\sigma,\quad \sigma\wedge\tau\le\tau$$

离 o 最远的顶点．

如果 $\sigma\ne o, \overline{\sigma}\le\sigma, |\overline{\sigma}|=|\sigma|-1$, 则我们称 σ 为 $\overline{\sigma}$ 的子顶点，容易看出，根 o 有 $N+1$ 个子顶点，其他顶点有 N 个子顶点．

我们同时也讨论的另一种齐次树叫 Cayley 树，记作 $T_{C,N}$. 在 $T_{C,N}$ 上，根顶点有 N 个相邻顶点，而其他顶点有 $N+1$ 个相邻顶点，即所有 Cayley 树的顶点都有 N 个子顶点．当 $N=1$ 时， $T_{C,1}$ 即为非负整数序列．在本文中， $T_{B,N}$ 和 $T_{C,N}$ 都记作 T.

如果 $|\sigma|=n$, 我们称顶点 σ 在树 T 的第 n 层上．记 $T^{(n)}$ 为包含了从第 0 层到第 n 层的所有顶点的集合，记 L_n 为第 n 层上的所有顶点的集合．记 $s(\sigma)$ 为顶点 σ 的所有子顶点的集合，容易看出，如果 T 是 Bethe 树，则 $|s(o)|=N+1, |s(\sigma)|=N(\sigma\ne o)$, 如果 T 是 Cayley 树，则 $|s(\sigma)|=N$.

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间，$\{X_\sigma,\sigma\in T\}$ 为定义在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 且取值于状态空间 $S=\{0,1,\cdots,b-1\}$ (b 为正整数) 的随机变量族．μ 为一概率测度, 我们称 μ 为树 T 上的随机场. 记 $\{X_\sigma,\sigma\in T\}$ 在 μ 下的分布为 $\mu(X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}})=\mu(x^{T^{(n)}})$.

* 国家自然科学基金 (10571076) 资助项目．
收稿日期：2007-12-26, 收到修改稿日期：2008-05-26.

定义 1[1] 设 T 为齐次树, S 为状态空间, $\{X_\sigma, \sigma \in T\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ 上取值于 S 的随机变量族，设

$$p = \{p(x), x \in S\} \tag{1}$$

为 S 上的一个分布,

$$P = (P(y|x)), x, y \in S \tag{2}$$

为 S^2 上的随机矩阵，如果对任意两个顶点 σ, τ,

$$\boldsymbol{P}(X_\sigma = y | X_{\overline{\sigma}} = x \text{ 和 } X_\tau \text{ 满足 } \sigma \wedge \tau \le \overline{\sigma}) = \boldsymbol{P}(X_\sigma = y | X_{\overline{\sigma}} = x) = P(y|x), \quad x, y \in S \tag{3}$$

且

$$\boldsymbol{P}(X_0 = x) = p(x), \quad x \in S, \tag{4}$$

则称 $\{X_\sigma, \sigma \in T\}$ 为在概率测度 $\boldsymbol{P}$ 下具有初始分布 (1) 和转移矩阵 (2) 并在 S 中取值的树指标马氏链.

记 $\{X_\sigma, \sigma \in T\}$ 在概率测度 $\boldsymbol{P}$ 下的分布为 $\boldsymbol{P}(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}) = \boldsymbol{P}(x^{T^{(n)}})$, 容易看出，若 $\{X_\sigma, \sigma \in T\}$ 在概率测度 $\boldsymbol{P}$ 下为树指标马氏链，则

$$\boldsymbol{P}(x^{T^{(n)}}) = p(x_0) \prod_{\tau \in L_1} P(x_\tau | x_0) \prod_{\sigma \in L_1} \prod_{\tau \in s(\sigma)} P(x_\tau | x_\sigma) \cdots \prod_{\sigma \in L_{n-1}} \prod_{\tau \in s(\sigma)} P(x_\tau | x_\sigma). \tag{5}$$

为避免技术问题，以下假定 $\mu(x^{T^{(n)}})$ 为严格正的.

注 1 当 T 为 Cayley 树时，设对 $N = 1$, 由 (5) 知

$$\boldsymbol{P}(x^{T^{(n)}}) = \boldsymbol{P}(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = p(x_0) \prod_{m=0}^{n} P(x_{m+1} | x_m).$$

这是马氏链的基本柱集分布.

定义 2[2] 设 $\{X_\sigma, \sigma \in T\}$ 是定义在可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 且在 S 中取值的随机变量族，对任意 $x, y \in S$, 有 $p(x) > 0$ 且 $P = (P(y|x))$ 为正的随机矩阵, $\mu, \boldsymbol{P}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的两个概率测度，其中 $\{X_\sigma, \sigma \in T\}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 下为树指标马氏链. 令

$$\varphi_n(\omega) = \frac{\mu(X^{T^{(n)}})}{P(X^{T^{(n)}})}, \tag{6}$$

$$\varphi_(\omega) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{|T^{(n)}|} \ln \varphi_n(\omega), \tag{7}$$

$\varphi(\omega)$ 称为渐近对数似然比.

注 2 显然当 $\mu = \boldsymbol{P}$ 时 $\varphi(\omega) \equiv 0$, 由下面引理 1 可以看出，在一般情况下恒有 $\varphi(\omega) \ge 0$ $\mu-$a.s., 故 $\varphi(\omega)$ 可作为 T 上的任意 Markov 随机场逼近的一种度量.

树模型近年来已引起物理学，概率论及信息论界的广泛兴趣. Berger 和叶中行研究了树图上某种平稳随机场的熵率存在性 [3], 之后叶中行与 Berger 又研究了树上 PPG 不变及遍历随机场的 Shannon-McMillan 定理 [4]. Benjamini 和 Peres 引进了树指标马氏链的概念，且研究了其常返性和射线常返性 [1]. 近年来，杨卫国研究了齐次树上可列齐次马氏链的强极限性质与齐次树上有限齐次马氏链的强大数定律和渐近等分性 (AEP)[5], 杨卫国和叶中行研究

了齐次树上可列非齐次马氏链的强极限性质与齐次树上有限非齐次马氏链的强大数定律和渐近等分性 [6], 刘文和王丽英研究了关于 Cayley 树上任意随机场和马氏链场的强偏差定理 (见文 [2]).

本文通过引进渐近对数似然比作为齐次树上任意 Markov 随机场逼近的一种度量，通过构造鞅的方法，建立了关于随机场的一类强偏差 (也称小偏差) 定理. 所得结论推广了文 [2] 的主要结果.

引理 1[2] 设 μ_1 与 μ_2 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个概率测度， $D\in\mathcal{F}$, $\{\tau_n,n\geq 1\}$ 是一列正值随机变量序列使得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\tau_n}{\left|T^{(n)}\right|}>0,\quad \mu_1-\text{a.e.于 }D, \tag{8}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\tau_n}\ln\frac{\mu_2(X^{T^{(n)}})}{\mu_1(X^{T^{(n)}})}\leq 0,\quad \mu_1-\text{a.e.于 }D. \tag{9}$$

注 3 令 $\mu_1=\mu$, $\mu_2=\boldsymbol{P}$, 由 (9) 知，存在 $A\in\mathcal{F}$, $\mu(A)=1$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\left|T^{(n)}\right|}\ln\frac{\boldsymbol{P}(X^{T^{(n)}})}{\mu(X^{T^{(n)}})}\leq 0,\quad \omega\in A,$$

因此有 $\varphi(\omega)\geq 0,\omega\in A$.

设 $k,l\in S,S_n(k,\omega)$(简记 $S_n(k)$) 是 $X^{T^{(n)}}=\{X_t:t\in T^{(n)}\}$ 中 k 的个数， $S_n(k,l,\omega)$(简记 $S_n(k,l)$) 是随机变量序偶

$$\{(X_0,X_\tau),\tau\in L_1,(X_\sigma,X_\tau),\sigma\in L_i,\tau\in s(\sigma),1\leq i\leq n-1\}$$

中状态序偶 (k,l) 的个数，即

$$S_n(k)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\sigma\in L_m}\delta_k(X_\sigma), \tag{10}$$

$$S_n(k,l)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\sigma\in L_m}\sum_{\tau\in s(\sigma)}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau), \tag{11}$$

其中 $\delta_k(\cdot)(k\in S)$ 是 S 上的 Kronecker-δ 函数.

引理 2[2] 设 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 下的概率测度，$\varphi(\omega)$ 如 (7) 所记，$0\leq c<\ln(1-a_k)^{-1}$ 为一常数，令

$$D(c)=\{\omega:\varphi(\omega)\leq c\}, \tag{12}$$

$$M_k=\max\left\{\frac{[\ln\frac{1-a_k}{1-\lambda}+c]}{\ln\frac{\lambda(1-a_k)}{b_k(1-\lambda)}},0<\lambda\leq 1+(a_k-1)\mathrm{e}^c\right\}, \tag{13}$$

其中 $a_k=\max\{P(k|i),i\in S\}$, $b_k=\min\{P(k|i),i\in S\}$, 则

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}(k)}{\left|T^{(n)}\right|}\geq\frac{M_k}{N},\quad \mu-\text{a.e.于 }D(c). \tag{14}$$

引理 3 设 $P(l|k)$ 如前所记， $0<\alpha\le 1$, 则

$$\frac{1+(\lambda^{\alpha}-1)P(l|k)}{1+(\lambda-1)\alpha P(l|k)}\le 1$$

对一切的 $\lambda>0$ 恒成立.

证 令

$$f(\lambda)=\lambda^{\alpha}-\lambda\alpha+\alpha-1,$$

于是有 $f(0)\le 0$, $f(1)=0$, $f'(\lambda)=\alpha(\lambda^{\alpha-1}-1)$, 且当 $0<\lambda\le 1$ 时， $f'(\lambda)\ge 0$, 当 $\lambda>1$ 时， $f'(\lambda)<0$, 从而对一切 $\lambda>0$ 有 $f(\lambda)\le 0$, 即 $\lambda^{\alpha}-\lambda\alpha+\alpha-1\le 0$, 所以 $(\lambda^{\alpha}-1)P(l|k)\le(\lambda-1)\alpha P(l|k)$, 注意到对一切的 $\lambda>0$ 有 $1+(\lambda-1)\alpha P(l|k)>0$ 恒成立，故结论成立.

引理 4 设 $\{\alpha_m: 0<\alpha_m\le 1, m\in \boldsymbol{N}\}$ 为一列正实数， $\boldsymbol{N}$ 为非负整数集，对任意 $x,y\in S$, $p(x)>0$ 且 $P=(P(y|x))$ 为正的随机矩阵， $\mathcal{F}_n=\sigma(X^{T^{(n)}})$, $\mu,\boldsymbol{P}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个概率测度，其中 $\{X_\sigma,\sigma\in T\}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 下为树指标马氏链. 令

$$t_n(\lambda,\omega)=\prod_{m=0}^{n-1}\prod_{\sigma\in L_m}\prod_{\tau\in s(\sigma)}\frac{\lambda^{\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)}}{\left[1+(\lambda-1)E_{\boldsymbol{P}}(\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)\right]}\frac{\boldsymbol{P}(X^{T^{(n)}})}{\mu(X^{T^{(n)}})},\qquad(15)$$

其中 $E_{\boldsymbol{P}}$ 为由概率测度 $\boldsymbol{P}$ 计算的数学期望，则 $(t_n(\lambda,\omega),\mathcal{F}_n,n\ge 1)$ 为非负 μ- 上鞅.

证 由于

$$t_n(\lambda,\omega)=t_{n-1}(\lambda,\omega)\prod_{\sigma\in L_{n-1}}\prod_{\tau\in s(\sigma)}\frac{\lambda^{\alpha_{n-1}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)}}{[1+(\lambda-1)E_{\boldsymbol{P}}(\alpha_{n-1}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)]}\frac{\boldsymbol{P}(X^{L_n}|X^{T^{(n-1)}})}{\mu(X^{L_n}|X^{T^{(n-1)}})},$$

其中 $\boldsymbol{P}(X^{L_n}|X^{T^{(n-1)}})$ 为 X^{L_n} 关于 $X^{T^{(n-1)}}$ 在测度 $\boldsymbol{P}$ 下的条件概率.

$$\begin{aligned}E_\mu(t_n(\lambda,\omega)|\mathcal{F}_{n-1})&=t_{n-1}(\lambda,\omega)\sum_{x^{L_n}}\prod_{\sigma\in L_{n-1}}\prod_{\tau\in s(\sigma)}\frac{\lambda^{\alpha_{n-1}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)}}{[1+(\lambda-1)E_{\boldsymbol{P}}(\alpha_{n-1}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)]}\\&\quad\times\frac{\boldsymbol{P}(X^{L_n}=x^{L_n}|X^{T^{(n-1)}})}{\mu(X^{L_n}=x^{L_n}|X^{T^{(n-1)}})}\mu(X^{L_n}=x^{L_n}|X^{T^{(n-1)}})\\&=t_{n-1}(\lambda,\omega)\sum_{x^{L_n}}\frac{\prod\limits_{\sigma\in L_{n-1}}\prod\limits_{\tau\in s(\sigma)}\lambda^{\alpha_{n-1}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(x_\tau)}P(x_\tau|X_\sigma)}{\prod\limits_{\sigma\in L_{n-1}}\prod\limits_{\tau\in s(\sigma)}[1+(\lambda-1)E_P(\alpha_{n-1}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)]}\\&=t_{n-1}(\lambda,\omega)\frac{\sum\limits_{x^{L_n}}\prod\limits_{\sigma\in L_{n-1}}\prod\limits_{\tau\in s(\sigma)}\lambda^{\alpha_{n-1}\delta_k(X_\sigma)\delta_l(x_\tau)}P(x_\tau|X_\sigma)}{[1+(\lambda-1)\alpha_{n-1}P(l|k)]^{N\sum\limits_{\sigma\in L_{n-1}}\delta_k(X_\sigma)}}\\&=t_{n-1}(\lambda,\omega)\frac{[1+(\lambda^{\alpha_{n-1}}-1)P(l|k)]^{N\sum\limits_{\sigma\in L_{n-1}}\delta_k(X_\sigma)}}{[1+(\lambda-1)\alpha_{n-1}P(l|k)]^{N\sum\limits_{\sigma\in L_{n-1}}\delta_k(X_\sigma)}},\quad \mu-\text{a.s.}\end{aligned}$$

由引理 3, 当 $0<\alpha_{n-1}\le 1$ 时，

$$\frac{1+(\lambda^{\alpha_{n-1}}-1)P(l|k)}{1+(\lambda-1)\alpha_{n-1}P(l|k)}\le 1$$

对一切的 $\lambda>0$ 恒成立，所以

$$E_\mu(t_n(\lambda,\omega)|\mathcal{F}_{n-1})\le t_{n-1}(\lambda,\omega),\quad \mu-\text{a.s.},$$

引理 4 证毕.

2 主要结果

定理 1 设 $\mu,\boldsymbol{P}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个概率测度，其中 $\{X_\sigma,\sigma\in T\}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 下为树指标马氏链，对任意 $x,y\in S$, $p(x)>0$ 且 $P=(P(y|x))$ 为正的随机矩阵， $D(c)$ 与 M_k 分别由 (12) 和 (13) 所记，$\{\alpha_m:0<\alpha_m\le 1,m\in\boldsymbol{N}\}$ 为一列正实数，$\boldsymbol{N}$ 为正整数集. 设 $0\le c<\ln(1-a_k)^{-1}$, 记

$$H_n(\omega)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\sigma\in L_m}\sum_{\tau\in s(\sigma)}\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau),\tag{16}$$

$$G_n(\omega)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\sigma\in L_m}\sum_{\tau\in s(\sigma)}E_{\boldsymbol{P}}(\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma),\tag{17}$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\le\frac{c}{M_k}+2\sqrt{\frac{cP(l|k)}{M_k}},\quad \mu-\text{a.e.于 } D(c)\tag{18}$$

且当 $0\le c\le P(l|k)M_k$ 时

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\ge -2\sqrt{\frac{cP(l|k)}{M_k}},\quad \mu-\text{a.e.于 } D(c).\tag{19}$$

证 取 $t_n(\lambda,\omega)$ 如 (15) 所定义，则由引理 4 知 $(t_n(\lambda,\omega),\mathcal{F}_n,n\ge 1)$ 为非负 μ- 上鞅，由 Doob 鞅收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}t_n(\lambda,\omega)=t(\lambda,\omega)<\infty\ ,\quad \mu-\text{a.e.}$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\ln t_n(\lambda,\omega)\le 0,\quad \mu-\text{a.e.}$$

由 (14) 得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln t_n(\lambda,\omega)}{NS_n(k)}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|T^{(n)}|}{NS_n(k)}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\ln t_n(\lambda,\omega)\le 0,\quad \mu-\text{a.e. 于 } D(c).$$

由 (6) 与 (15) 得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{NS_n(k)}\Big[H_n(\omega)\ln\lambda-\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\sigma\in L_m}\sum_{\tau\in s(\sigma)}\ln(1+(\lambda-1)E_P(\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)$$
$$-\ln\varphi_n(\omega)\Big]\le 0,\quad \mu-\text{a.e.于 }D(c).$$

所以

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)\ln\lambda}{NS_n(k)}\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{NS_n(k)}\Big[\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{\sigma\in L_m}\sum_{\tau\in s(\sigma)}\ln[1+(\lambda-1)E_{\boldsymbol{P}}(\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)]\\ &+\ln\varphi_n(\omega)\Big],\quad \mu-\text{a.e. 于 }D(c).\end{aligned}\tag{20}$$

再根据 (7), (12), (14) 及 (20) 知当 $0\le c<\ln(1-a_k)^{-1}$ 时

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)\ln\lambda}{NS_{n-1}(k)}\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\sum\limits_{\sigma\in L_m}\sum\limits_{\tau\in s(\sigma)}\ln[1+(\lambda-1)E_P(\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)]}{NS_{n-1}(k)}\\ &+\frac{c}{M_k},\quad \mu-\text{a.e. 于 }D(c),\end{aligned}\tag{21}$$

取 $\lambda>1$，由 (21) 有

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\sum\limits_{\sigma\in L_m}\sum\limits_{\tau\in s(\sigma)}\frac{\ln[1+(\lambda-1)E_P(\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)]}{\ln\lambda}-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\\ &+\frac{c}{M_k\ln\lambda},\quad \mu-\text{a.e. 于 }D(c).\end{aligned}\tag{22}$$

由 (17) 及 (22), 利用不等式 $1-\frac{1}{x}\le\ln x\le x-1\ (x>0)$ 得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\le(\lambda-1)\limsup_{n\to\infty}\frac{G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}+\frac{\lambda c}{(\lambda-1)M_k},\quad \mu-\text{a.e. 于 }D(c).\tag{23}$$

由于 $0<\alpha_m\le 1$, 所以 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{G_n(\omega)}{[NS_{n-1}(k)]}\le P(l|k)$, 故

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\le(\lambda-1)P(l|k)+\frac{\lambda c}{(\lambda-1)M_k},\quad \mu-\text{a.e. 于 }D(c).\tag{24}$$

记 $g(\lambda)=(\lambda-1)P(l|k)+\frac{\lambda c}{[(\lambda-1)M_k]}$ $(\lambda>1)$, 当 $c>0$ 时，$g(\lambda)$ 在 $\lambda=1+\sqrt{\frac{c}{[P(l|k)M_k]}}$ 达到它在区间 $(1,\infty)$ 上的最小值 $g\Big(1+\sqrt{\frac{c}{[P(l|k)M_k]}}\Big)=2\sqrt{P(l|k)\frac{c}{M_k}}+\frac{c}{M_k}$. 在 (24) 中取 $\lambda=1+\sqrt{\frac{c}{[P(l|k)M_k]}}$ 即得 (18) 式；当 $c=0$ 时，取 $\lambda_i\to 1+0(i\to\infty)$, 由 (24) 知 (18) 此时也成立.

取 $0<\lambda<1$, 由 (21) 有

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\\ &\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1}\sum\limits_{\sigma\in L_m}\sum\limits_{\tau\in s(\sigma)}\frac{\ln[1+(\lambda-1)E_P(\alpha_m\delta_k(X_\sigma)\delta_l(X_\tau)|X_\sigma)]}{\ln\lambda}-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\\ &\quad+\frac{c}{M_k\ln\lambda},\quad \mu-\text{a.e. 于 } D(c),\end{aligned}\tag{25}$$

由 (17), (25), 利用不等式 $1-\frac{1}{x}\leq\ln x\leq x-1\ (x>0)$ 得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}\geq(\lambda-1)P(l|k)+\frac{c}{(\lambda-1)M_k},\quad \mu-\text{a.e. 于 } D(c).\tag{26}$$

记 $h(\lambda)=(\lambda-1)P(l|k)+\frac{c}{[(\lambda-1)M_k]}$ $(0<\lambda<1)$, 当 $0\leq c\leq P(l|k)M_k$ 时，$h(\lambda)$ 在 $\lambda=1-\sqrt{\frac{c}{[P(l|k)M_k]}}$ 达到它在区间 $(0,1)$ 上的最小值

$$h\Big(1-\sqrt{\frac{c}{[P(l|k)M_k]}}\Big)=-2\sqrt{\frac{cP(l|k)}{M_k}}.$$

在 (26) 中取 $\lambda=1-\sqrt{\frac{c}{[P(l|k)M_k]}}$ 即得 (19) 式；当 $c=0$ 时，取 $\lambda_i\to 1-0(i\to\infty)$, 由 (26) 知 (19) 此时也成立. 定理证毕.

推论 1　在定理 1 的条件下,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}=0,\quad \mu-\text{a.e.于 } D(0).$$

证　在定理 1 中令 $c=0$ 即可，证毕.

推论 2　在定理 1 的条件下,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n(\omega)-G_n(\omega)}{NS_{n-1}(k)}=0,\quad P-\text{a.e.}$$

证　在定理 1 中取 $\mu=P$, 则 $\varphi_n(\omega)\equiv 0, D(0)=\Omega$. 于是本结论可由推论 1 得出，证毕.

推论 3[2]　若树 T 为 Cayley 树，则在定理 1 的条件下有

$$\limsup_{n\to\infty}\Big[\frac{S_n(k,l)}{NS_{n-1}(k)}-P(l|k)\Big]\leq 2\sqrt{\frac{cP(l|k)}{M_k}}+\frac{c}{M_k},\quad \mu-\text{a.e. 于 } D(c)$$

且当 $0\leq c\leq M_kP(l|k)$ 时，有

$$\liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{S_n(k,l)}{NS_{n-1}(k)}-P(l|k)\Big]\geq -2\sqrt{\frac{cP(l|k)}{M_k}},\quad \mu-\text{a.e. 于 } D(c).$$

证　在定理 1 中取 $\alpha_m \equiv 1$, 注意到此时 $H_n(\omega) = S_n(k,l), G_n(\omega) = NS_{n-1}(k)P(l|k)$, 故结论成立.

注 4　推论 3 即为文 [2] 的主要结果.

参 考 文 献

[1] Benjamini I, Peres Y. Markov chains indexed by trees. *Ann. Probab.*, 1994, **22**: 219–243.

[2] Liu W, Wang L Y. The Markov approximation of the random field on Cayley tree and a class of small deviation theorems. *Statist. Probab. Lett.*, 2003, **63**: 113–121.

[3] Berger T, Ye Z. Entropic aspects of random fields on trees. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1990, **36**(5): 1006–1018.

[4] Ye Z, Berger T. Entropic, regularity and asymptotic equipartition property of random fields on trees. *J. Combin. Inform. System. Sci.*, 1996, **21**(2): 157–184.

[5] Yang W G. Some limit properties for Markov chains indexed by a homogeneous tree. *Statist. Probab. Lett.*, 2003, **65**: 241–250.

[6] Yang W G, Ye Z. The asympotoic equipartition property for nonhomogeneous Markov chains indexed by a homogeneous tree. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2007, **53**(9): 3275–3280.

[7] Spitzer F. Markov random fields on an infinite tree. *Ann. Probab.*, 1975, **3**: 287–298.

[8] Liu W, Yang W G. The Markov approximation of the sequences of N-valued random variables and a class of small deviation theorems. *Stochastic Process. Appl.*, 2000, **89**: 117–130.

A CLASS OF SMALL DEVIATION THEOREMS FOR RANDOM FIELDS ON A HOMOGENEOUS TREE

PENG Weicai　　YANG Weiguo

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013)

Abstract　By introducing the asymptotic logarithmic likelihood ratio as a measure of Markov approximation of the arbitrary random field on a homogeneous tree, and constructing a non-negative martingale, a class of small deviation theorems for random fields is established, and an existing result is generalized.

Keywords　Small deviation theorems, homogeneous tree, random field.