系 统 科 学 与 数 学
*J. Sys. Sci. & Math. Scis.*
**29**(6) (2009, 6), 786–799

# 广义向量变分不等式和广义对偶模型*

李 月 鲜
(内蒙古农业大学理学院，呼和浩特 010018)
戎 卫 东
(内蒙古大学理工学院数学系，呼和浩特 010021)
刘 海 军
(内蒙古农业大学理学院，呼和浩特 010018)

**摘要** 研究实 Banach 空间中带有不等式约束的非光滑向量优化问题 (VP). 首先，借助下方向导数引进了广义 Minty 型向量变分不等式，并通过变分不等式来探讨问题 (VP) 的最优性条件. 接着，利用函数的上次微分构造了不可微向量优化问题 (VP) 的广义对偶模型，并且在适当的弱凸性条件下建立了弱对偶定理.

**关键词** 下方向导数，广义 Minty 型向量变分不等式，广义对偶模型.

**MR(2000) 主题分类号** 49N45

## 1 引 言

多目标最优化是近 50 多年来迅速发展起来的一门新兴学科. 作为最优化的一个重要分支，它主要研究在某种意义下多个数值目标的同时优化的问题. 由于现实世界的大多数最优化问题都要涉及多个目标，因此，自 20 世纪 70 年代以来，对于多目标最优化问题的研究，在国际上引起了人们极大的关注和重视. 半个多世纪以来，不论是在理论与方法方面的研究成果，还是在诸多领域的应用成果，已经非常丰富. 如今，多目标最优化问题、变分不等式与互补问题、向量平衡问题和多目标最优控制等从不同角度提出的问题，已经被人们统一研究.

考虑到无限维空间中带有不等式约束的非光滑向量优化问题在数理经济，控制理论和工程技术等领域中的大量应用，在本文中，我们将注意力主要集中到无限维空间中带有不等式约束的非光滑向量优化问题 (VP). 首先推广了 [1] 的研究平台，在实 Banach 空间中引进了上、下方向导数，探讨上、下方向导数及上次微分的性质. 接着借助下方向导数引进了广义 Minty 型向量变分不等式，并通过变分不等式来探讨问题 (VP) 的最优性条件. 最后利用

* 内蒙古自治区自然科学基金 (20080404MS0110) 和运筹学与系统工程重庆市市级重点实验室资助课题.
收稿日期：2007-08-30, 收到修改稿日期：2008-07-21.

函数的上次微分构造了不可微向量优化问题 (VP) 的广义对偶模型，并且在适当的弱凸性条件下建立了弱对偶定理.

## 2 预备知识

在 $p$ 维 Euclid 空间 $R^p$ 中，记 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_p)^{\mathrm{T}}\in R^p$, 称集合 $R^p_+=\{v\in R^p;\ \ v_i\geq 0, i=1,2,\cdots,p\}$ 为 $R^p$ 的一个序锥. 对于 $y^1,y^2\in R^p$, 我们约定

$$y^1\leq y^2\Longleftrightarrow y^2-y^1\in R^p_+,\quad y^1<y^2\Longleftrightarrow y^2-y^1\in \mathrm{int}R^p_+.$$

**定义 2.1** 设 $y\in A\subset R^p$.

(I) 称 $y$ 为集合 $A$ 关于序锥 $R^p_+$ 的最小点, 记为 $y\in \mathrm{Min}(A,R^p_+)$, 如果 $A\cap(y-R^p_+)=\{y\}$;

(II) 称 $y$ 为集合 $A$ 关于序锥 $R^p_+$ 的弱最小点，记为 $y\in \mathrm{WMin}(A,R^p_+)$, 如果 $A\cap(y-\mathrm{int}R^p_+)=\emptyset$.

**定义 2.2** 设 $y\in A\subset R^p$.

(I) 称 $y$ 为集合 $A$ 关于序锥 $R^p_+$ 的局部极小点，记为 $y\in \mathrm{LMin}(A,R^p_+)$, 如果存在 $y$ 的邻域 $V$, 使得 $A\cap(y-R^p_+)\cap V=\{y\}$;

(II) 称 $y$ 为集合 $A$ 关于序锥 $R^p_+$ 的弱局部极小点，记为 $y\in \mathrm{LWMin}(A,R^p_+)$, 如果存在 $y$ 的邻域 $V$, 使得 $A\cap(y-\mathrm{int}R^p_+)\cap V=\emptyset$.

设 $X$ 是实 Banach 空间， $f:X\to R^p$ 是一个向量值映射； $g_i:X\to R$ $(i\in I=\{1,2,\cdots,q\})$ 是 $X$ 上的上半连续函数. 我们考虑如下带不等式约束的向量优化问题

$$\text{(VP)}\qquad\left\{\begin{array}{l}\min\ \ f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x))^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t.}\ \ g_i(x)\leq 0,\quad i\in I=\{1,2,\cdots,q\},\\ \qquad x\in X.\end{array}\right.$$

令 $E=\{x\in X:g_i(x)\leq 0,\forall i\in I\}\subset X$, $A=\{f(x):x\in X,g_i(x)\leq 0,\forall i\in I\}=f(E)\subset R^p$. 分别称 $E$ 和 $A$ 为问题 (VP) 在决策空间的可行域和在目标空间的可达域.

**定义 2.3** 设 $x\in E$.

(I) $x$ 称为问题 (VP) 的最小解，记为 $x\in E(\mathrm{VP})$, 如果 $f(x)\in \mathrm{Min}(A,R^p_+)$;

(II) $x$ 称为问题 (VP) 的弱最小解，记为 $x\in E_w(\mathrm{VP})$, 如果 $f(x)\in \mathrm{WMin}(A,R^p_+)$.

**定义 2.4** 设 $x\in E$.

(I) $x$ 称为问题 (VP) 的局部极小解，记为 $x\in E^L(\mathrm{VP})$, 如果存在 $x$ 的邻域 $V$, 使得 $A\cap(f(x)-R^p_+)\cap f(V)=\{f(x)\}$;

(II) $x$ 称为问题 (VP) 的弱局部极小解，记为 $x\in E^L_w(\mathrm{VP})$, 如果存在 $x$ 的邻域 $V$, 使得 $A\cap(f(x)-\mathrm{int}R^p_+)\cap f(V)=\emptyset$.

设 $D$ 是 $X$ 中的非空子集，集合 $D^-:=\{v\in X^*:\langle v,z\rangle\leq 0,\forall z\in D\}$, $D^+:=\{v\in X^*:\langle v,z\rangle\geq 0,\forall z\in D\}$ 分别称为 $D$ 的负对偶锥和正对偶锥.

**定义 2.5**[1] 设 $i:X\to R$ 是实值函数， $h\in X, t>0$, 对于点 $x\in X$, 方向 $d\in X$, 上极限

$$i'_+(x,d)=\limsup_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{i(x+th)-i(x)}{t}$$

称为函数 $i$ 在点 $x \in X$ 处沿方向 $d \in X$ 的上方向导数；下极限

$$i'_{-}(x,d) = \liminf_{\substack{h \to d \\ t \downarrow 0}} \frac{i(x+th)-i(x)}{t}$$

称为函数 $i$ 在点 $x \in X$ 处沿方向 $d \in X$ 的下方向导数.

若 $i'_{+}(x,d) = i'_{-}(x,d)$ 称函数 $i$ 在点 $x \in X$ 处沿方向 $d \in X$ 方向可微，记为 $i'(x,d)$.

**定义 2.6**[2] 对实值函数 $f: X \to R$, 点 $x \in X$, 方向 $d \in X$, 极限

$$f'(x,d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}.$$

称函数 $f$ 在点 $x$ 处沿方向 $d$ 的方向导数.

**定义 2.7**[2] 对实值函数 $f: X \to R$, 点 $x \in X$, 方向 $d \in X$, 上极限

$$f^0(x,d) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+td)-f(y)}{t}.$$

称函数 $f$ 在点 $x$ 处沿方向 $d$ 的广义方向导数.

**定义 2.8**[3] 对实值函数 $f: X \to R$, 点 $x \in X$, 若

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)}{\| y-x \|} = 0.$$

称函数 $f$ 在点 $x$ 处可微， $f'(x)$ 为其导数.

**性质 2.1** 设 $f: X \to R$ 在点 $x \in X$ 是可微的, 则对任何 $d \in X$, 有 $f'(x,d) = f'_{+}(x,d) = f'(x) \cdot d$.

证 $f$ 在点 $x \in X$ 是可微的，由定义 2.8 知， $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)}{\|y-x\|} = 0$. 令 $y = x+td$, 当 $y \to x$, 相应有 $t \to 0$, 于是有 $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+td)-f(x)-f'(x)(td)}{\|td\|} = 0$. 从而可得 $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} = f'(x) \cdot d$. 由定义 2.6 知

$$f'(x,d) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} = f'(x) \cdot d. \tag{2.1}$$

由定义 2.5, $f'_{+}(x,d) = \limsup\limits_{\substack{h \to d \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$, 由 $f$ 在点 $x \in X$ 是可微的，我们得到

$$\lim_{\substack{h \to d \\ t \to 0}} \frac{f(x+th)-f(x)-f'(x)(th)}{\| th \|} = 0.$$

从而可得 $f'_{+}(x,d) = f'(x) \cdot d$.

**性质 2.2** 对实值函数 $f: X \to R$, 方向 $d \in X$, 有 $f'_{+}(x,d)$ 和 $f'_{-}(x,d)$ 关于方向 $d$ 是正齐次的.

证 由定义 2.5 知，对于任意固定的 $k > 0$,

$$f'_{+}(x,kd) = \limsup_{\substack{kh \to kd \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x+tkh)-f(x)}{t} = k \limsup_{\substack{h \to d \\ tk \downarrow 0}} \frac{f(x+(tk)h)-f(x)}{tk} = kf'_{+}(x,d).$$

同理可证 $f'_-(x,d)$ 关于方向 $d$ 是正齐次的.

**性质 2.3** 对实值函数 $f:X\to R$, 方向 $d\in X$, 有 $-f'_+(x,d)=(-f)'_-(x,d)$.

证 由定义 2.5 知， $f'_+(x,d)=\limsup\limits_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$. 故可得

$$-f'_+(x,d)=\liminf_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{f(x)-f(x+th)}{t}=\liminf_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{(-f)(x+th)-(-f)(x)}{t}=(-f)'_-(x,d).$$

**性质 2.4** 对实值函数 $f:X\to R$, 当 $f$ 是凸函数时， $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d\in X$ 是次可加的.

证 由定义 2.5 和 $f$ 的凸性知，

$$\begin{aligned}f'_+(x,d_1+d_2)&=\limsup_{\substack{h\to d_1+d_2\\ t\downarrow 0}}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=\limsup_{\substack{h_1\to d_1,h_2\to d_2\\ t\downarrow 0}}\frac{f(x+t(h_1+h_2))-f(x)}{t}\\&=\limsup_{\substack{h_1\to d_1,h_2\to d_2\\ t\downarrow 0}}\frac{f[(\frac{1}{2}x+t(h_1))+(\frac{1}{2}x+t(h_2))]-f(x)}{t}\\&\le\limsup_{\substack{h_1\to d_1\\ t\downarrow 0}}\frac{f(x+2t(h_1))-f(x)}{2t}+\limsup_{\substack{h_2\to d_2\\ t\downarrow 0}}\frac{f(x+2t(h_2))-f(x)}{2t}\\&=f'_+(x,d_1)+f'_+(x,d_2).\end{aligned}$$

**定义 2.9** 设 $X^*$ 是实 Banach 空间 $X$ 的对偶空间，对实值函数 $f:X\to R$, 点 $x\in X$, 集合 $\partial_+f(x):=\{x^*\in X^*\mid\langle x^*,d\rangle\le f'_+(x,d),\forall d\in X\}$ 称为函数 $f$ 在点 $x$ 处的上次微分. $x^*\in\partial_+f(x)$ 称为函数 $f$ 在点 $x$ 处的上次梯度.

**引理 2.1** [2] (Hahn-Banach) 设 $X$ 是实线性空间， $Y\subset X$ 是线性子空间. 若 $P:X\to R$ 是正齐次和次可加函数， $f:Y\to R$ 是线性函数，且 $\forall y\in Y,f(y)\le P(y)$, 则存在一个线性函数 $F:X\to R$, 使得 $F(y)=f(y),\forall y\in Y$, 且 $F(x)\le P(x),\forall x\in X$.

**引理 2.2** [4] 设 $(X,\|\,.\,\|_1),(Y,\|\,.\,\|_2)$ 是同一数域上的赋泛线性空间， $T:X\to Y$ 是一个线性算子，则下列陈述是等价的.

(I) $T$ 在 $X$ 上是连续的.

(II) $T$ 是有界线性算子. 即存在 $M>0$, 使得 $\|Tx\|\le M\|x\|,\forall x\in X$.

**性质 2.5** $f:X\to R$ 是凸函数，且 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 在单位球 $U(X)$ 上有界，即存在单位球 $U(X)$ 和常数 $M\in R$, 满足 $|f'_+(x,d)|\le M,\forall d\in U(X)$, 则 $\partial_+f(x)$ 是非空的.

证 当 $f$ 是凸函数时，由性质 2.2 和性质 2.4 可知 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d\in X$ 是正齐次的和次可加的，由引理 2.1, 令 $Y$ 空间为 0 子空间， $f(0)=0$, 可知 $f(0)=f'_+(x,0)=0$, 存在线性函数 $F:X\to R$, 使得 $F(0)=f(0)=0$,

$$F(d)\le f'_+(x,d),\quad\forall d\in X.\tag{2.2}$$

又由 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 在单位球 $U(X)$ 上有界，即存在 $M$ 使得 $|f'_+(x,d)|\le M\|d\|$. 当 $F(d)\ge 0$ 时， $|F(d)|=F(d)\le|f'_+(x,d)|\le M\|d\|$. 当 $F(d)<0$ 时，因 $F$ 是线性的，故 $F(d)=-F(-d)$, 从而有

$$F(-d)>0,\quad|F(d)|=F(-d)\le f'_+(x,-d)\le M\|d\|.$$

综上，有 $|F(d)|) \le M \parallel d \parallel, \forall d \in X$. 即 $F$ 为有界线性算子，由引理 2.2 可知 $F$ 为连续的，所以 $F \in X^*$, 再由 (2.2) 式和定义 2.9 知 $F \in \partial_+ f(x)$, 因此 $\partial_+ f(x)$ 是非空的.

**引理 2.3**[8] 设 $f: X \to R \cup +\infty$ 为拓扑空间 $X$ 上的真凸函数. 如果存在 $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$, 使得 $f$ 在 $x_0$ 的邻域内有界，即存在零邻域 $U$ 和常数 $C$, 满足 $f(x) \le C, \forall x \in x_0 + U$, 那么 $f$ 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ 中连续.

**性质 2.6** 若 $f: X \to R$ 是凸函数，且 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 在单位球 $U(X)$ 上有界，则 $\partial_+ f(x)$ 是 $X^*$ 中的紧凸集.

证 先证 $\partial_+ f(x)$ 是凸集. 设 $\xi_1, \xi_2 \in \partial_+ f(x), \lambda \in (0,1)$, 由定义知 $\forall d \in X$,

$$\langle \xi_1, d\rangle \le f'_+(x,d), \quad \langle \xi_2, d\rangle \le f'_+(x,d).$$

$$\langle \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, d\rangle = \lambda\langle \xi_1 +, d\rangle + (1-\lambda)\langle \xi_2, d\rangle \le \lambda f'_+(x,d) + (1-\lambda) f'_+(x,d) = f'_+(x,d).$$

有

$$\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \in \partial_+ f(x).$$

下面再证 $\partial_+ f(x)$ 是闭集. 设序列 $\{\xi_n\} \subset \partial_+ f(x)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. 可知 $\forall d \in X$,

$$\langle \xi_n, d\rangle \le f'_+(x,d), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$ 得到 $\langle \xi, d\rangle \le f'_+(x,d)$. 从而有 $\xi \in \partial_+ f(x)$. 这表明 $\partial_+ f(x)$ 是闭集.

下面再证 $\partial_+ f(x)$ 是紧集. $(\partial_+ f(x))^0 = \{d \in X \mid f'_+(x,d) \le 1\}$. 由性质 2.2 和性质 2.4 可知 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 是正齐次和次可加的，从而 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 是凸的，且 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 在单位球 $U(X)$ 上有界，由引理 2.3 可知，$f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 是连续的，上式右端显然是 $X$ 的零邻域. 因此，取对称零邻域 $U \subset (\partial_+ f(x))^0$, 则由 Alaoglu-Bourbaki 定理可知，$U^0$ 是 $\sigma(X^*, X)$ 紧凸集. 而 $\partial_+ f(x) \subset (\partial_+ f(x))^{00} \subset U^0$ 是 $U^0$ 的 $\sigma(X^*, X)$ 闭凸子集，故也是 $\sigma(X^*, X)$ 紧凸集.

**性质 2.7** 设 $f: X \to R$ 是凸函数，$f'_+(x,\cdot)$ 关于方向 $d$ 在单位球 $U(X)$ 上有界，则对任何 $d \in X$, 有

$$f'_+(x,d) = \sup\{\langle x^*, d\rangle \mid x^* \in \partial_+ f(x)\}, \quad \forall d \in X.$$

证 由定义 2.9 知，$f'_+(x,d) \ge \sup\{\langle x^*, d\rangle \mid x^* \in \partial_+ f(x)\}$. 我们只需再证相反方向的不等式成立. 若其不然，存在 $d_1 \in X$, 使得

$$f'_+(x,d_1) > \sup\{\langle x^*, d_1\rangle \mid x^* \in \partial_+ f(x)\}.$$

类似于性质 2.5 的证明, 根据引理 2.1 可知, 存在线性函数 $F: X \to R$, 使得 $f'_+(x,d_1) = F(d_1)$; $f'_+(x,d) \ge F(d), \forall d \in X$. 又由于 $f'_+(x,d)$ 关于方向 $d$ 在单位球 $U(X)$ 上有界，重复性质 2.5 的相应证明部分，可知 $F \in X^*, F \in \partial_+ f(x)$.

$$F(d_1) = f'_+(x,d_1) > \sup\{\langle x^*, d_1\rangle \mid x^* \in \partial_+ f(x)\} \ge F(d_1).$$

矛盾. 故假设不成立，性质得证.

**性质 2.8** 设 $f_1, f_2: X \to R, d \in X$, 则

$$(f_1 + f_2)'_+(x,d) \le (f_1)'_+(x,d) + (f_2)'_+(x,d).$$

证 由定义 2.5 知，

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)'_+(x,d)&=\limsup_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{(f_1+f_2)(x+th)-(f_1+f_2)(x)}{t}\\&=\limsup_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}+\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\\&\le\limsup_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}+\limsup_{\substack{h\to d\\ t\downarrow 0}}\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\\&=(f_1)'_+(x,d)+(f_2)'_+(x,d).\end{aligned}$$

**性质 2.9** 设 $C_1,C_2$ 是 $X$ 中的闭凸集， $x^*\in X^*$, 令 $\sigma_{C_1}(x^*)=\sup\limits_{c\in C_1}\langle c,x^*\rangle$. 称 $\sigma_{C_1}(x^*)$ 为 $C_1$ 的支撑函数，令 $\sigma_{C_2}(x^*)=\sup\limits_{c\in C_2}\langle c,x^*\rangle$. 称 $\sigma_{C_2}(x^*)$ 为 $C_2$ 的支撑函数，我们有 $C_1\subset C_2\Longleftrightarrow\sigma_{C_1}(x^*)\le\sigma_{C_2}(x^*)$.

证 因为 $C_1\subset C_2$, 立即可得 $\sigma_{C_1}(x^*)\le\sigma_{C_2}(x^*)$. 反之，不妨设 $C_1$ 不包含于 $C_2$, 则存在 $c\in C_1,c\notin C_2$. 又因为 $C_2$ 为闭凸集，由凸集分离定理，存在 $\xi\in X^*\backslash\{0\}$, 使得 $\langle\xi,c\rangle>\langle\xi,x\rangle,\forall x\in C_2$. 所以， $\sigma_{C_1}(\xi)\ge\langle\xi,c\rangle>\sup\limits_{x\in C_2}\langle\xi,x\rangle=\sigma_{C_2}(\xi)$. 这与条件矛盾，故假设不成立，性质得证.

**性质 2.10** 设 $f_1,f_2:X\to R$ 是连续函数，且 $(f_1)'_+(x,\cdot)$ 和 $(f_2)'_+(x,\cdot)$ 关于方向 $d$ 在单位球 $U(X)$ 上有界，则

$$\partial_+(f_1+f_2)(x)\subseteq\partial_+f_1(x)+\partial_+f_2(x).$$

证 由性质 2.6 可知， $\partial_+(f_1+f_2)(x)$ 为闭凸集，由性质 2.7 可知， $\partial_+(f_1+f_2)(x)$ 的支撑函数是 $(f_1+f_2)'_+(x,d)$, 由性质 2.6 可知， $\partial_+f_1(x)$ 为紧凸集， $\partial_+f_2(x)$ 为紧凸集，故 $\partial_+f_1(x)+\partial_+f_2(x)$ 为闭凸集， $\partial_+f_1(x)+\partial_+f_2(x)$ 的支撑函数是 $(f_1)'_+(x,d)+(f_2)'_+(x,d)$, 由性质 2.8 有

$$(f_1+f_2)'_+(x,d)\le(f_1)'_+(x,d)+(f_2)'_+(x,d),$$

再由性质 2.9 得到

$$\partial_+(f_1+f_2)(x)\subset\partial_+f_1(x)+\partial_+f_2(x).$$

## 3 下方向导数和广义向量变分不等式

在这一节， $X$ 是实 Banach 空间， $E\subset X$, 和 $f:X\to R^p$ 是一个向量值映射；我们借助于下方向导数将文献 [5] 中的结论推广到广义向量变分不等式. 我们引进以下变分不等式的概念.

设 $h:E\to R$, 求点 $y\in E$, 使得

$$\text{(GMVI)}\quad h'_-(x,y-x)\le 0,\quad\forall x\in E.\tag{3.1}$$

称 (3.1) 为 Minty 型广义变分不等式. 我们知道当 $h$ 可微时，上述 Minty 型广义变分不等式是下面 Minty 型变分不等式的推广. 求点 $y\in E$, 使得

$$\text{(MVI)}\quad h'(x)(y-x)\le 0,\quad\forall x\in E.$$

设 $f: E \to R^p$ 为可微向量值函数，求点 $y \in E$, 使得

$$\text{(MVVI)} \quad (y-x)\nabla f(x) \not\geq_{R_+^p \setminus \{0\}} 0, \quad \forall x \in E. \tag{3.2}$$

称 (3.2) 为 Minty 型向量变分不等式.

设 $f: E \to R^p$ 为可微向量值函数，求点 $y \in E$, 使得

$$\text{(MWVVI)} \quad (y-x)\nabla f(x) \not\geq_{\text{int}R_+^p} 0, \quad \forall x \in E. \tag{3.3}$$

称 (3.3) 为 Minty 型弱向量变分不等式.

设 $f: E \to R^p$, 求点 $y \in E$, 使得,

$$\text{(GMVVI)} \quad f'_-(x, y-x) = ((f_1)'_-(x, y-x), \cdots, (f_p)'_-(x, y-x))^{\mathrm{T}} \not\geq_{R_+^p \setminus \{0\}} 0, \quad \forall x \in E. \tag{3.4}$$

称 (3.4) 为 Minty 型广义向量变分不等式. 由性质 2.1 和性质 2.3 可以看出，当 $f(x)$ 可微时，它就是问题 (MVVI), 因此问题 (GMVVI) 是问题 (MVVI) 的推广.

设 $f: E \to R^p$, 求点 $y \in E$, 使得

$$\text{(GMWVVI)} \quad f'_-(x, y-x) = ((f_1)'_-(x, y-x), \cdots, (f_p)'_-(x, y-x))^{\mathrm{T}} \not\geq_{\text{int}R_+^p} 0, \quad \forall x \in E. \tag{3.5}$$

称 (3.5) 为 Minty 型广义弱向量变分不等式. 由性质 2.1 和性质 2.3 可以看出，当 $f(x)$ 可微时，它就是问题 (MWVVI), 因此问题 (GMWVVI) 是问题 (MWVVI) 的推广.

**定义 3.1** 集合 $E^* := \{x^* \in E : [x^*, x] \subset E, \forall x \in E\}$. 称为集合 $E$ 的核. 若 $E^* \neq \emptyset$，我们称集合 $E$ 为星形的.

**定义 3.2** 设集合 $E \subset X$ 是星形的， $x^* \in E^*$. 如果 $\forall x \in E$, 函数 $h: E \to R$ 在线段 $[x^*, x]$ 上是增加的，我们称 $h$ 在 $E$ 上沿着始于 $x^*$ 的射线是增加的，记为 $h \in \text{IAR}(E, x^*)$. (也就是，令 $x(t) = (1-t)x^* + tx, 0 \leq t \leq 1$. 当 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 有 $h(x(t_1)) \leq h(x(t_2))$, 我们称 $h$ 在 $E$ 上沿着始于 $x^*$ 的射线是增加的.)

**定义 3.3** 设集合 $E \subset X$ 是星形的， $x^* \in E^*$, 如果 $\forall x \in E$, 函数 $h: E \to R$ 在线段 $[x^*, x]$ 上是减少的，我们称 $h$ 在 $E$ 上沿着始于 $x^*$ 的射线是减少的. 记为 $h \in \text{DAR}(E, x^*)$. (也就是，令 $x(t) = (1-t)x^* + tx, 0 \leq t \leq 1$. 当 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 有 $h(x(t_2)) \leq h(x(t_1))$, 我们称 $h$ 在 $E$ 上沿着始于 $x^*$ 的射线是减少的.)

注 1 显然任何一个非空凸集 $E$ 是星形的，且 $E^* = E$.

**命题 3.1** 设 $E$ 是 $X$ 中的非空凸集，且 $C$ 是 $X$ 中的非空点闭凸锥，且 $E - x^* \subset C, h: E \to R$ 是单调增的，则 $h \in \text{IAR}(E, x^*)$.

证 $\forall x \in E$, 令 $x(t) = x^* + t(x - x^*), t \in [0,1]$, 不妨设 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 则 $x(t_2) - x(t_1) = (x - x^*)(t_2 - t_1)$. 由 $E - x^* \subset C$ 可知， $x - x^* \in C$, 又由 $C$ 是一个非空点闭凸锥，$(x - x^*)(t_2 - t_1) \in C$. 这表明，按锥 $C$ 诱导的偏序有 $x(t_2) \geq_C x(t_1)$, 又因为 $h$ 单调增加，$h(x(t_2)) \geq h(x(t_1))$. 由定义 3.2 可知 $h \in \text{IAR}(E, x^*)$.

**命题 3.2** 设集合 $E \subset X$ 是星形的，函数 $h: E \to R$ 连续，若 $x^* \in E^*$ 是广义 Minty 型变分不等式 $h'_-(x, y-x) \leq 0, \ \forall x \in E$ 的解，则 $h \in \text{IAR}(E, x^*)$.

证 任取 $x \in E$, 令 $x(t) = (1-t)x^* + tx$, $0 \leq t \leq 1$. 由 $h'_-(x(t), x^* - x(t)) \leq 0$, $h'_-(x(t), t(x^* - x)) \leq 0$. 由性质 2.2 下，方向导数关于方向是正齐次的，从而

$$h'_-(x(t), x^* - x) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.6}$$

我们现在来证明 $h \in \mathrm{IAR}(E, x^*)$ ，任取 $0 \le t_1 < t_2 \le 1$, 按定义 3.2, 只需证明 $h(x(t_1)) \le h(x(t_2))$. 构造辅助函数

$$\varphi(t) = h((1-t)x^* + tx) - \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} h(x(t_1)) - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} h(x(t_2)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

因为 $h$ 连续, 所以 $\varphi(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上是连续的, 所以 $\varphi(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上某一点 $\widehat{t}$ 达到它的全局最小. 若 $\widehat{t} = t_1$ ，因为 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$ ，可知在 $t_2$ 上也达到全局最小. 令 $\widehat{t} = t_2$. 对于 $\widehat{t} \ne t_1$, 由 $\widehat{t}$ 的定义和定义 2.5 可知 $\varphi'_-(\widehat{t}, -1) \ge 0$.

$$\begin{aligned}
\varphi'_-(\widehat{t}, -1) &= \liminf_{s \downarrow 0} \frac{\varphi(\widehat{t} - s) - \varphi(\widehat{t})}{s} \\
&= \liminf_{s \downarrow 0} \frac{h(x(\widehat{t}) + s(x^* - x)) - h(x(\widehat{t})}{s} - \frac{h(x(t_1))}{t_2 - t_1} + \frac{h(x(t_2))}{t_2 - t_1} \\
&= h'_-(x(\widehat{t}), x^* - x) - \frac{h(x(t_1)) - h(x(t_2))}{t_2 - t_1} \ge 0.
\end{aligned}$$

由 (3.6) 式可得， $h(x(t_1)) - h(x(t_2)) \le (t_2 - t_1) h'_-(x(\widehat{t}), x^* - x) \le 0$; $h(x(t_1)) \le h(x(t_2))$. 故 $h \in \mathrm{IAR}(E, x^*)$.

注 2 从上述证明可知，若上述广义 Minty 型变分不等式严格小于 0, 则 $h$ 在 $E$ 上沿着始于 $x^*$ 的射线是严格增加的.

**命题 3.3** 集合 $E \subset X$ 是星形的，函数 $h: E \to R$ 连续，若 $x^* \in E^*$ 是广义 Minty 型变分不等式 $h'_-(x, x^* - x) \ge 0, \ \forall x \in E$ 的解，则 $h \in \mathrm{DAR}(E, x^*)$.

证 与命题 3.2 的证明雷同，故略.

注 3 从上述证明可知，若上述广义 Minty 型变分不等式严格大于 0, 则 $h$ 在 $E$ 上沿着始于 $x^*$ 的射线是严格减少的.

**命题 3.4** 集合 $E \subset X$ 是星形的，$x^* \in E^*$, 函数 $h: E \to R$ 是连续的, 且 $h \in \mathrm{IAR}(E, x^*)$, 则 $x^*$ 是广义 Minty 型变分不等式 $h'_-(x, y - x) \le 0, \ \forall x \in E$ 的解.

证 因为 $h$ 是连续的，由定义 2.5 知

$$h'_-(x, x^* - x) = \liminf_{t \downarrow 0} \frac{h(x + t(x^* - x)) - h(x)}{t}, \quad \forall x \in E.$$

又因为 $h \in \mathrm{IAR}(E, x^*)$, 由定义 3.2 可知 $h(x + t(x^* - x)) \le h(x)$. 据此和上式得到 $h'_-(x, x^* - x) \le 0, \forall x \in E$.

**定理 3.1** 集合 $E \subset X$ 是星形的， $x^* \in E^*$, 且 (VP) 问题的目标函数 $f(x)$ 是连续的，若 $x^*$ 是问题 (GMWVVI)

$$f'_-(x, y - x) = ((f_1)'_-(x, y - x), \cdots, (f_p)'_-(x_1, y - x))^{\mathrm{T}} \not\geq_{\mathrm{int} R^p_+} 0, \quad \forall x \in E$$

的解，则 $x^*$ 是问题 (VP) 的弱最小解，即 $x^* \in E_w(\mathrm{VP})$.

证 若 $x^*$ 是问题 (GMWVVI) 的解，由 (3.5) 式

$$f'_-(x, x^* - x) = ((f_1)'_-(x, x^* - x), \cdots, (f_p)'_-(x_1, x^* - x))^{\mathrm{T}} \not\geq_{\mathrm{int} R^p_+} 0, \quad \forall x \in E.$$

因此存在 $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$, 使得 $(f_i)'_-(x, x^* - x) \le 0, \forall x \in E$. 由命题 3.2 可知 $f_i \in \mathrm{IAR}(E, x^*)$, 再由定义 3.2 可知， $f_i(x^*) \le f_i(x), \forall x \in E$. 由此推出 $f(E) \cap (f(x^*) - \mathrm{int} R^p_+) = \emptyset$. 于是，由定义 2.3(II) 有 $x^* \in E_w(\mathrm{VP})$.

**定理 3.2** 集合 $E\subset X$ 是星形的, $x^*\in E^*$, 且 (VP) 问题的目标函数 $f(x)$ 是连续的, 若 $x^*$ 是问题 (VP) 的局部极小解, 即 $x^*\in E^L$(VP), 则 $x^*$ 是问题 (GMVVI)

$$f'_-(x,y-x)=((f_1)'_-(x,y-x),\cdots,(f_p)'_-(x,y-x))^{\mathrm{T}}\not\geq_{R^p_+\setminus\{0\}}0,\quad \forall x\in E$$

的解.

证 (反证法) 假设 $x^*$ 不是 (GMVVI) 的解, 则存在 $x\in E$ 使得

$$f'_-(x,x^*-x)=((f_1)'_-(x,x^*-x),\cdots,(f_p)'_-(x,x^*-x))^{\mathrm{T}}\geq_{R^p_+\setminus\{0\}}0.$$

据此,有 $(f_i)'_-(x,x^*-x)\geq 0,\forall i\in\{1,2,\cdots,p\}$, 且存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,p\}$ 使得 $(f_{i_0})'_-(x,x^*-x)>0$. 由命题 3.3 可知, $f_i(x)$ 在线段 $[x^*,x]$ 上是减少的, 由注 3 可知, $f_{i_0}(x)$ 在线段 $[x^*,x]$ 上是严格减少的. 这表明, $\forall y\in[x^*,x]$, 有 $f_i(y)\leq f_i(x^*),f_{i_0}(y)<f_{i_0}(x^*)$, 任取 $x^*$ 的邻域 $V$, 总有 $\hat{x}\in(x^*,x]\cap V$, 由定义 2.4(i), $x^*\notin E^L$(VP), 这与 $x^*$ 是 (VP) 问题的局部极小解矛盾.

**定理 3.3** 集合 $E\subset X$ 是星形的, $x^*\in E^*$, 且问题 (VP) 的目标函数 $f(x)$ 是连续的, 若 $x^*$ 是 GMVVI

$$f'_-(x,y-x)=((f_1)'_-(x,y-x),\cdots,(f_p)'_-(x,y-x))^{\mathrm{T}}\not\geq_{R^p_+\setminus\{0\}}O,\quad \forall x\in E.$$

的解, 则 $x^*$ 是 (VP) 问题的最小解, 即 $x^*\in E$(VP).

证 设 $x^*$ 是 GMVVI 的解, 即

$$f'_-(x,x^*-x)=((f_1)'_-(x,x^*-x),\cdots,(f_p)'_-(x_1,x^*-x))^{\mathrm{T}}\not\geq_{R^p_+\setminus\{0\}}0,\quad \forall x\in E.$$

而这有两种可能: 或者存在 $i\in\{1,2,\cdots,p\}$ , 使得 $(f_i)'_-(x,x^*-x)<0$; 或者 $f'_-(x,x^*-x)=0$. 当 $(f_i)'_-(x,x^*-x)<0$ 时, 由注 2 可知, $f_i(x)$ 沿着射线 $[x^*,x]$ 是严格增加的, 也就是 $\forall x\in E$, $f_i(x^*)<f_i(x)$. 由定义 2.3(I) 可知, $x^*\in E$(VP). 当 $f'_-(x,x^*-x)=0$ 时, 由命题 3.2,3.3 可知 $\forall i\in\{1,2,\cdots,p\}$, $f_i(x)$ 沿着射线非增非减, 也就是 $\forall x\in E$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,p\}$, $f_i(x^*)=f_i(x)$, 从而有 $f(x)=f(x^*)$, $\forall x\in E$. 由定义 2.3(I) 可知, $x^*\in E$(VP).

## 4 广义对偶模型与弱对偶定理

在这一节里, 我们利用函数的上次微分构造了不可微向量优化问题 (VP) 的广义对偶模型, 并且在适当的弱凸性条件下建立了弱对偶定理. 这是对文献 [6] 的推广. 考虑第 2 节已经给出的向量优化问题

$$(\mathrm{VP})\qquad\begin{cases}\min\ \ f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x))\\ \text{s.t.}\ \ g_i(x)\leq 0,\quad i\in I=\{1,2,\cdots,q\},\\ \qquad\ x\in X.\end{cases}$$

其中 $X$ 是一个实 Banach 空间, $f:X\to R^p$ 是一个向量值连续映射. $g_j:X\to R$ $(j=1,2,\cdots,q)$ 是 $X$ 上的连续函数. $(f_i)'_+(x,\cdot),(g_j)'_+(x,\cdot)(i=1,2,\cdots,p,\ j=1,2,\cdots,q)$ 是有界

的．我们提出 (VP) 的如下广义对偶模型

$$
\text{(VD1)} \qquad \begin{cases} \max \ \Big(f_1(u)+\sum\limits_{j\in J_0} y_jg_j(u),\cdots,f_p(u)+\sum\limits_{j\in J_0} y_jg_j(u)\Big) \\ \text{s.t. } 0\in\partial_+\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_if_i(u)+\sum\limits_{j=1}^{q} y_jg_j(u)\Big), \\ \qquad \sum\limits_{j\in J_r} y_jg_j(u)\ge 0, \quad r=1,2,\cdots,\gamma, \\ \qquad y_j\ge 0, \quad j=1,2,\cdots,q, \\ \qquad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)^{\mathrm T}\in\Lambda^+. \end{cases}
$$

其中 $J_r\subset I=\{1,2,\cdots,q\}$, $r=0,1,\cdots,\gamma$, $\sum\limits_{r=0}^{\gamma} J_r=I$, 且若 $r_1\neq r_2$, 则 $J_{r_1}\cap J_{r_2}=\emptyset$. $\Lambda^+=\{\lambda\in R^p|\lambda_i>0,\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i=1\}$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_q)^{\mathrm T}$. 称 (VD1) 的可行点 $(u^*,\lambda^*,y^*)$ 是 (VD1) 的一个有效解，如果对 (VD1) 的任意可行解 $(u,\lambda,y)$, 条件

$$f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_jg_j(u)\ge f_i(u^*)+\sum_{j\in J_0} y_j^*g_j(u^*), \quad \forall i\in P=\{1,2,\cdots,p\},$$

蕴涵

$$f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_jg_j(u)= f_i(u^*)+\sum_{j\in J_0} y_j^*g_j(u^*), \quad \forall i\in P=\{1,2,\cdots,p\}.$$

下面引进和推广不可微函数的广义 $F-\rho$- 凸概念：

设 $K$ 是 $X$ 的一个子集，其中 $X$ 是一个实 Banach 空间．称函数 $F:K\times K\times X^*\to R$ 是次线性的，如果对任意 $x,u\in K$, 有

(I) $F(x,u,\alpha_1+\alpha_2)\le F(x,u,\alpha_1)+F(x,u,\alpha_2),\forall\alpha_1,\alpha_2\in X^*$;

(II) $F(x,u,r\alpha)=rF(x,u,\alpha),\forall r\in R,r\ge 0,\alpha\in X^*$.

**定义 4.1** 设 $F:K\times K\times X^*\to R$ 是次线性函数， $\phi:K\to R$ 是实值函数， $\rho\in R$, 且 $\theta:K\times K\to R$.

(I) 称函数 $\phi$ 在点 $u\in K$ 处是 $(F,\rho,\theta)-$ 凸的，如果对所有 $x\in K$ 和 $\xi\in\partial_+\phi(u)$, 有

$$\phi(x)-\phi(u)\ge F(x,u,\xi)+\rho\parallel\theta(x,u)\parallel^2.$$

如果 $\phi$ 在 $K$ 的每一点都是 $(F,\rho,\theta)-$ 凸的，则称函数 $\phi$ 在 $K$ 上是 $(F,\rho,\theta)-$ 凸的．

(II) 称函数 $\phi$ 在点 $u\in K$ 处是 $(F,\rho,\theta)-$ 拟凸的，如果对所有 $x\in K$ 和 $\xi\in\partial_+\phi(u)$, 有

$$\phi(x)\le\phi(u)\Rightarrow F(x,u,\xi)\le-\rho\parallel\theta(x,u)\parallel^2.$$

如果 $\phi$ 在 $K$ 的每一点都是 $(F,\rho,\theta)-$ 拟凸的，则称函数 $\phi$ 在 $K$ 上是 $(F,\rho,\theta)-$ 拟凸的．

(III) 称函数 $\phi$ 在点 $u\in K$ 处是 $(F,\rho,\theta)-$ 伪凸的，如果对所有 $x\in K$ 和 $\xi\in\partial_+\phi(u)$, 有

$$F(x,u,\xi)\ge-\rho\parallel\theta(x,u)\parallel^2\Rightarrow\phi(x)\ge\phi(u).$$

如果 $\phi$ 在 $K$ 的每一点都是 $(F,\rho,\theta)-$ 伪凸的，则称函数 $\phi$ 在 $K$ 上是 $(F,\rho,\theta)-$ 伪凸的．

(IV) 称函数 $\phi$ 在点 $u\in K$ 处是 $(F,\rho,\theta)-$ 严格伪凸的，如果对所有 $x\in K,x\neq u$ 和 $\xi\in\partial_+\phi(u)$, 有

$$F(x,u,\xi)\ge-\rho\parallel\theta(x,u)\parallel^2\Rightarrow\phi(x)>\phi(u).$$

如果 $\phi$ 在 $K$ 的每一点都是 $(F,\rho,\theta)-$ 严格伪凸的, 则称函数 $\phi$ 在 $K$ 上是 $(F,\rho,\theta)-$ 严格伪凸的.

注 4 如果 $\phi$ 是凸上半连续函数时, 上述定义退化为文献 [6] 中的定义 1.1.10. 如果 $\phi$ 是可微函数时, 上述定义退化为文献 [7] 中的定义 1.1.

**定理 4.1** (弱对偶) 设 $x$ 为 (VP) 的任意可行解, $(u,\lambda,y)$ 为 (VD1) 的任意可行解. 如果 $\sum\limits_{j\in J_r} y_jg_j(\cdot),\ r=1,2,\cdots,\gamma$ 在 $u$ 是 $(F,\beta_r,\theta)-$ 拟凸的, 并且下面 3 个条件中有一个成立

(I) $f_i(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_jg_j(\cdot)$ 在 $u$ 既是 $(F,\rho_i,\theta)-$ 拟凸的, 又是 $(F,\rho_i,\theta)-$ 伪凸的, $i\in P$, 且 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_i\geq 0$.

(II) $f_i(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_jg_j(.)$ 在 $u$ 既是 $(F,\rho_i,\theta)-$ 拟凸的, $\forall i\in P$, 且存在 $i_0\in P$ 使得 $f_{i_0}(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_jg_j(\cdot)$ 在 $u$ 是 $(F,\rho_{i_0},\theta)-$ 严格拟凸的, 且 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_i\geq 0$.

(III) $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_if_i(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_jg_j(\cdot)$ 在 $u$ 是 $(F,\rho,\theta)-$ 伪凸的, 且 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\rho\geq 0$.

则下列结论不同时成立,

$$f_i(x)\leq f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_jg_j(u),\quad \forall i\in P; \tag{4.1}$$

和

$$f_i(x)< f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_jg_j(u),\quad \exists i\in P. \tag{4.2}$$

证 由于 $x$ 是 (VP) 的可行解, $(u,\lambda,y)$ 是 (VD1) 的可行解, 我们有

$$\sum_{j\in J_r} y_jg_j(u)\geq 0\geq \sum_{j\in J_r} y_jg_j(x),\quad r=1,2,\cdots,\gamma.$$

因为 $\sum\limits_{j\in J_r} y_jg_j(\cdot),r=1,2,\cdots,\gamma,$ 是 $(F,\beta_r,\theta)-$ 拟凸的, 所以对任意 $\xi_r\in\partial_+(\sum\limits_{j\in J_r} y_jg_j(u))$, 有

$$F(x,u,\xi_r)\leq -\beta_r\parallel\theta(x,u)\parallel^2.$$

另一方面, 由 $0\in\partial_+(\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_if_i(u)+\sum\limits_{j=1}^{q} y_jg_j(u))$ 和上次微分的性质 2.10, 有

$$\partial_+\bigg(\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(u)+\sum_{j=1}^{q} y_jg_j(u)\bigg)\subset\partial_+\bigg(\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_jg_j(u)\bigg)+\partial_+\bigg(\sum_{j\in J_r} y_jg_j(u)\bigg).$$

故存在

$$\overline{\xi}\in\partial_+\bigg(\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_jg_j(u)\bigg),\quad \overline{\xi_r}\in\partial_+\bigg(\sum_{j\in J_r} y_jg_j(u)\bigg),\quad r=1,2,\cdots,\gamma,$$

使得 $0=\overline{\xi}+\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\overline{\xi_r}$. 由 $F$ 的次线性性, 我们有

$$0=F(x,u,0)\leq F(x,u,\overline{\xi})+\sum_{r=1}^{\gamma}F(x,u,\overline{\xi_r}).$$

所以

$$F(x,u,\overline{\xi}) \geq -\sum_{r=1}^{\gamma} F(x,u,\overline{\xi_r}) \geq \sum_{r=1}^{\gamma} \beta_r \parallel \theta(x,u) \parallel^2 . \tag{4.3}$$

现假定 (4.1) 和 (4.2) 同时成立，我们有

$$f_i(x)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(x) \leq f_i(x) \leq f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(u), \quad \forall i\in P,$$

且对某个 $i\in P$, 有

$$f_i(x)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(x) \leq f_i(x) < f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(u).$$

由上次微分的性质 2.10 和 $\lambda_i>0, \sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i=1$, 我们有

$$\partial_+\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(u)\Big) \subset \Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \partial_+\Big(f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(u)\Big)\Big).$$

因此，存在 $\pi_i\in\partial_+(f_i(u)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(u)), \forall i\in P$, 使得 $\overline{\xi}=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\pi_i$. 由 (I), 我们得到

$$F(x,u,\pi_i) \leq -\rho_i \parallel \theta(x,u) \parallel^2, \quad \forall i\in P,$$
$$F(x,u,\pi_i) < -\rho_i \parallel \theta(x,u) \parallel^2, \quad \exists i\in P.$$

由 $F$ 的次线性性，我们有

$$F(x,u,\overline{\xi}) \leq \sum_{i=1}^{p}\lambda_i F(x,u,\pi_i) < \Big(-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_i\Big) \parallel \theta(x,u) \parallel^2 .$$

又由 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_i \geq 0$, 我们有

$$F(x,u,\overline{\xi}) < \Big(\sum_{r=1}^{\gamma}\beta_r\Big) \parallel \theta(x,u) \parallel^2 .$$

这与 (4.3) 式矛盾，所以 (4.1) 与 (4.2) 不能同时成立.

对于 (II), 由上面的讨论可知，存在 $i_0\in P$ 使得 $f_{i_0}(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(\cdot)$ 在 $u$ 是 $(F,\rho_{i_0},\theta)-$ 严格拟凸的，可得

$$F(x,u,\pi_{i_0}) < -\rho_{i_0} \parallel \theta(x,u) \parallel^2 .$$

类似于刚才的证明可以推出， (4.1) 与 (4.2) 不能同时成立.

若 (III) 成立，由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(\cdot)$ 在 $u$ 是 $(F,\rho,\theta)-$ 伪凸的，且 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\rho\geq 0$, 可得

$$F(x,u,\overline{\xi}) < -\rho \parallel \theta(x,u) \parallel^2 \leq \Big(\sum_{r=1}^{\gamma}\beta_r\Big) \parallel \theta(x,u) \parallel^2 .$$

这与 (4.3) 矛盾，因此 (4.1) 与 (4.2) 不能同时成立.

注 5 当问题 (VP) 中 $f_i(x),\ i=1,2,\cdots,p,\ g_i(x),\ j=1,2,\cdots,q$ 是 $X$ 上的可微函数时，(VP) 的广义对偶模型 (VD1) 成为广义对偶模型

$$
\text{(VD2)}\qquad \begin{cases} \max \ \left(f_1(u)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(u),\cdots,f_p(u)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(u)\right) \\ \text{s.t.}\ \ \sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla f_i(u)+\sum\limits_{j=1}^{q} y_j\nabla g_j(u)=0, \\ \qquad \sum\limits_{j\in J_r} y_j g_j(u)\ge 0,\quad r=1,2,\cdots,\gamma, \\ \qquad y_j\ge 0,\quad j=1,2,\cdots,q, \\ \qquad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in\varLambda^{+}. \end{cases}
$$

而且由弱对偶定理和微分运算的线性性，可得下面的推论.

**推论 4.1** 问题 (VP) 中 $f_i(x),i=1,2,\cdots,p,g_i(x),j=1,2,\cdots,q$ 是 $X$ 上的可微函数时，设 $x$ 为 (VP) 的任意可行解，$(u,\lambda,y)$ 为 (VD2) 的任意可行解, 如果 $\sum\limits_{j\in J_r} y_j g_j(.),r=1,2,\cdots,\gamma$ 在 $u$ 是 $(F,\beta_r,\theta)-$ 拟凸的，并且下面 3 个条件中有一个成立.

(I) $f_i(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(\cdot)$ 在 $u$ 既是 $(F,\rho_i,\theta)-$ 拟凸的，又是 $(F,\rho_i,\theta)-$ 伪凸的，$i\in P$, 且 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_i\ge 0$.

(II) $f_i(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(.)$ 在 $u$ 是 $(F,\rho_i,\theta)-$ 拟凸的，$\forall i\in P$, 且存在 $i_0\in P$ 使得 $f_{i_0}(.)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(.)$ 在 $u$ 是 $(F,\rho_{i_0},\theta)-$ 严格拟凸的，且 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_i\ge 0$.

(III) $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(\cdot)+\sum\limits_{j\in J_0} y_j g_j(\cdot)$ 在 $u$ 是 $(F,\rho,\theta)-$ 伪凸的，且 $\sum\limits_{r=1}^{\gamma}\beta_r+\rho\ge 0$.

则下列结论不同时成立，

$$f_i(x)\le f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(u),\quad \forall i\in P$$

和

$$f_i(x)< f_i(u)+\sum_{j\in J_0} y_j g_j(u),\quad \exists i\in P.$$

## 参 考 文 献


[1] Stein O. On constraint qualifications in optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004, **121**(3): 647–671.

[2] Makela M M, Neittaanmaki P. Nonsmooth Optimization: Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control. World Scientific Publishing Co. Ltd., Singapore, 1992.

[3] Aubin Helene, Frankowska Jean Pierre. Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston, 1990.
[4] Angus E, Taylor David, Lay C. Introduction to Functional Analysis. John Wiley and Sons Inc., USA, 1980.
[5] Crespi G P, Ginchev I and Rocca M. Minty variational inequalities, increase-along-rays property and optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004, **123**(3): 479–496.
[6] Peng J W and Yang X M. Duality for a class of nonsmooth multiobjective programming problems. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2005, **18**(1): 1–11.
[7] Yang X M, Teo K L and Yang X Q. Duality for a class of nondifferentiable multiobjective programming problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, **252**(3): 999–1005.
[8] 史树中．凸分析．上海：上海科学技术出版社， 1990.

# THE GENERALIZED VECTOR VARIATIONAL INEQUALITIES AND THE GENERALIZED DUAL MODELS

LI Yuexian

(*College of Mathematics, Inner Mongolia Agriculture University, Hohhot* 010018)

RONG Weidong

(*Department of Mathematics, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021)

LIU Haijun

(*College of Mathematics, Inner Mongolia Agriculture University, Hohhot* 010018)

**Abstract** In this paper, the nonsmooth vector optimization problem with inequality constraints in real Banach space is studied. First, in terms of the lower directional derivatives, the generalized Minty type vector variational inequalities are introduced. Then, the optimality condition of the problem (VP) is obtained. Finally, the generalized dual model of the problem (VP) is presented with the help of upper subdifferential of function, and a weak duality theorem is given.

**Key words** Lower directional derivative, generalized Minty type vector variational inequality, generalized dual model.