系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(7) (2009, 7), 888–901

含两个小参数的抛物对流扩散方程的有限差分法*

岑仲迪

(浙江万里学院数学研究所，宁波 315100)

摘要 研究含有两个小参数的奇异摄动抛物对流扩散方程的有限差分法．应用极大模原理和障碍函数技巧，可得方程的准确解及其各阶导数的界的估计．基于准确解的有关性态，构造分片一致的 Shishkin 型网格．在 Shishkin 型网格上构建一个隐式迎风差分格式来进行数值求解，证得此差分策略是关于两个小参数都一致一阶收敛的．数值实验证实了理论结果的正确性．

关键词 奇异摄动，对流扩散，有限差分法， Shishkin 网格，一致收敛．

MR(2000) 主题分类号 65M06, 65M12, 65M50

1 引 言

最高阶导数项含有小参数的微分方程称为奇异摄动问题．由于小参数的存在，方程的准确解在某些区域的变化会变得非常激烈，也就是说方程的准确解存在边界层或内部层．奇异摄动问题广泛存在于流体力学、量子力学、弹性力学、化学、生物学以及控制论等领域．最著名的要数高雷诺数的 Navier-Stokes 方程．在奇异摄动问题中，摄动系数一般是比较小的，经典的数值方法给不出令人满意的数值结果．近二十年来，科研工作者在奇异摄动问题的数值求解方面开展了大量的研究工作，可参见文献 [1–4]. 对于只含有一个小参数的奇异摄动问题已经获得了许多稳健的数值方法，但是对于含有两个小参数的奇异摄动问题的研究工作至今还比较少．

本文考虑如下的奇异摄动抛物对流扩散方程

$$L_{\varepsilon,\mu}u \equiv \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t)\in D, \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\partial\Omega\times(0,T]} = 0, \tag{1.2}$$

* 国家自然科学基金 (10671180), 浙江省自然科学基金 (Y607504) 和宁波市自然科学基金资助课题．
收稿日期：2008-09-11.

这里 $\Omega=(0,1), D\equiv\Omega\times(0,T], \partial D=\overline{D}\setminus D$, 系数 $a(x,t), b(x,t)$ 和 $f(x,t)$ 是充分光滑函数, $0<\varepsilon\ll 1, 0<\mu\ll 1$ 是两个小参数. 另外，我们假设

$$a(x,t)\geq\alpha>0,\quad b(x,t)\geq\beta>0, \tag{1.3}$$

$$\Big|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\Big|\leq C\Big(1+\mu^{-k}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big),\quad k=0,1,2,\ (x,t)\in\overline{D}, \tag{1.4}$$

$$\Big|\frac{\partial^m f}{\partial t^m}\Big|\leq C\Big(1+\varepsilon^{-m}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big),\quad m=0,1,2,\ (x,t)\in\overline{D}. \tag{1.5}$$

并且我们假定方程的准确解在转角处具有充分的正则性和相融性，以致于准确解是充分光滑的. 本文主要构造奇异摄动问题的关于两个小参数都一致收敛 [2] 的数值计算方法.

当参数 $\varepsilon=0$ 时, 方程 (1.1) 就是已被广泛研究的对流扩散方程 [2,5−7], 其准确解在 $x=0$ 处含有一个指数边界层；当参数 $\varepsilon=1$ 时，方程 (1.1) 是一个抛物对流扩散方程 [8,9], 其准确解在 $x=0$ 边界含有一个抛物边界层. 无论是稳态的还是时间依赖的奇异摄动问题，已有不少文献 [6,7,9] 给出了稳健的数值计算方法. 文献 [10] 考虑了含两个小参数的二维抛物反应扩散问题，给出了基于自适应网格的差分策略.

本文构造基于 Shishkin 型网格的隐式迎风差分格式来求解奇异摄动抛物对流扩散问题 (1.1)–(1.2). 我们证明此差分策略是关于小参数 ε 和 μ 都一致收敛的，并且是几乎一阶收敛的.

本文的结构如下：在第 2 部分中，我们首先给出准确解及其各阶导数的界的估计；为证明差分策略是关于小参数 ε 和 μ 都是一致收敛的，在第 3 部分中需将准确解分解成光滑部分和边界层部分；在第 4 部分中我们给出 Shishkin 型网格和有限差分格式；然后在第 5 部分中证得此差分策略是关于无穷模几乎一阶收敛的，并且是关于小参数 ε 和 μ 都是一致收敛的；最后数值实验证实理论结果的准确性.

注 1　本文中， C 表示一个独立于小参数 ε,μ 和离散网格的正常数，并且在不同的地方可表示不同的常数； $\|\cdot\|$ 表示最大模.

2　准确解的性质

易知方程 (1.1) 中的微分算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 满足连续极大模原理.

引理 1 （极大模原理）如果函数 $y\in C^2(D)$ 满足 $L_{\varepsilon,\mu}y|_D\geq 0$ 和 $y|_{\partial D}\geq 0$, 那么 $y|_{\overline{D}}\geq 0$.

应用极大模原理可得如下稳定性结果.

引理 2 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解 u 满足如下估计

$$|u(x,t)|\leq\frac{1}{\beta}\|f\|,\quad (x,t)\in\overline{D}.$$

下面的引理给出方程 (1.1)–(1.2) 的准确解 $u(x,t)$ 各阶导数的界的估计.

引理 3 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解 $u(x,t)$ 的各阶导数满足

$$\Big\|\frac{\partial^{k+m}u}{\partial x^k\partial t^m}(x,t)\Big\|_{\overline{D}}\leq C\varepsilon^{-m}\mu^{-k},\quad 0\leq k+m\leq 3,$$

这里 k,m 为非负整数.

证　我们首先作变量变换：$\eta=\frac{t}{\varepsilon},\xi=\frac{x}{\mu}$. 变换后的定义区域为 $\widetilde{D}=(0,\frac{1}{\mu})\times(0,\frac{T}{\varepsilon})$. 定义 $\widetilde{u}(\xi,\eta)=u(x,t)$, 类似地定义函数 $\widetilde{a},\widetilde{b}$ 和 $\widetilde{f}$. 作此变量变换后，方程 (1.1) 可变换成如下形式

$$\mu\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}+\mu\widetilde{b}\widetilde{u}=\mu\widetilde{f},\quad(\xi,\eta)\in\widetilde{D}.$$

应用文献 [11] 中估计式 (10.5), 对于满足 $0\le k+m\le 3$ 的非负整数 k,m 和任意的 $\widetilde{N}_\delta\subseteq\widetilde{D}$, 可得

$$\Big\|\frac{\partial^{k+m}\widetilde{u}}{\partial\xi^k\partial\eta^m}\Big\|_{\widetilde{N}_\delta}\le C(1+\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{N}_{2\delta}}),$$

这里，对于任意 $\lambda>0$, $\widetilde{N}_\lambda$ 是一个区域 $\widetilde{D}$ 中的直径为 λ 的领域， C 是一个独立于 $\widetilde{N}_\delta$ 的常数．回代原来的变量 x 和 t 可得

$$\Big\|\frac{\partial^{k+m}u}{\partial x^k\partial t^m}\Big\|_{\overline{D}}\le C\varepsilon^{-m}\mu^{-k}(1+\|u\|_{\overline{D}}).$$

应用引理 2 中准确解的估计可完成此引理的证明.

引理 4 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解的偏导数 u_x 满足如下估计

$$|u_x|\le C\Big(1+\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big),\quad(x,t)\in\overline{D}.$$

证　令 $z_1(x,t)=u_x$, 改写方程 (1.1) 成

$$\mu\frac{\partial z_1}{\partial x}+a(x,t)z_1=h_1(x,t),$$

这里

$$h_1(x,t)=-f(x,t)+\varepsilon u_t+b(x,t)u.$$

由引理 2 和 3 可得

$$|h_1(x,t)|\le C,\quad(x,t)\in\overline{D}.\tag{2.1}$$

令 $A(x,t)$ 是 $a(x,t)$ 关于变量 x 的不定积分．则可解得上面一阶微分方程的解为

$$\begin{aligned}z_1(x,t)=&\,z_1(0,t)\exp(-\mu^{-1}(A(x,t)-A(0,t)))\\&+\mu^{-1}\int_0^x h_1(s,t)\exp(-\mu^{-1}(A(x,t)-A(s,t)))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

利用不等式

$$\exp(-\mu^{-1}(A(x,t)-A(s,t)))\le\exp\Big(-\frac{\alpha(x-s)}{\mu}\Big),\quad x\ge s,\tag{2.2}$$

由式 (2.1) 和引理 3 可得

$$|z_1(x,t)|\le C\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)+C\mu^{-1}\int_0^x\exp\Big(-\frac{\alpha(x-s)}{\mu}\Big)\mathrm{d}s.$$

由此不等式可证得引理结论成立.

引理 5 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解的偏导数 u_t 满足如下估计

$$|u_t| \le C\Big(1+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big), \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

证　选取障碍函数

$$\phi_1(x,t)=C\Big(1+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big(1+\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big),$$

对于充分大的常数 C, 我们有

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon,\mu}(\phi_1\pm u_t) &= -C\beta\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big(1+\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big)\\
&\quad -C\Big(1+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big)\alpha^2\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\\
&\quad +C\Big(1+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big)\alpha\ a(x,t)\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\\
&\quad +Cb(x,t)\Big(1+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big(1+\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big)\pm(f_t+a_tu_x-b_tu)\\
&= Cb\Big(1+\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big)+C(b-\beta)\Big(1+\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big)\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\\
&\quad +C\alpha(a-\alpha)\Big(1+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big)\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\\
&\quad \pm(f_t+a_tu_x-b_tu)\ge 0.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

上面的推导利用了假设 (1.5), 引理 2 和 4.

由边界条件 (1.2) 可得

$$u_t|_{x=0,1}=0.$$

由上式和引理 3 可得

$$(\phi_1\pm u_t)|_{\partial D}\ge 0.\tag{2.4}$$

结合不等式 (2.3)–(2.4) 和引理 1 可完成此引理的证明.

引理 6 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解的偏导数 u_{xt} 满足如下估计

$$|u_{xt}|\le C\Big(1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big), \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

证　对方程 (1.1) 两边关于 t 求一次偏导数，并令 $z_2=u_{xt}$, 则可得

$$lz_2\equiv\mu\frac{\partial z_2}{\partial x}+a(x,t)z_2=h_2(x,t),$$

这里

$$h_2(x,t)=\varepsilon u_{tt}-a_tu_x+b_tu+bu_t-f_t.$$

由引理 2–5 和假设 (1.5) 可知

$$|h_2(x,t)| \le C\Big[1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)+\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big], \quad (x,t)\in\overline{D}. \tag{2.5}$$

由反证法容易证得如下极大模原理成立.

对于函数 $y\in C^1(D)$, 如果 $ly|_D\ge 0$ 和 $y|_{x=0}\ge 0$, 那么 $y|_{\overline{D}}\ge 0$.

选取障碍函数 $\phi_2(x,t)=C[1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}\mu^{-1}\exp(-\frac{\alpha x}{\mu})]$. 对于充分大的常数 C, 应用估计式 (2.5) 可得 $l(\phi_2\pm z_2)\ge 0$. 另外，由引理 3 可知 $|z_2(0,t)|\le C\varepsilon^{-1}\mu^{-1}$. 因此，应用极大模原理可得 $|u_{xt}|$ 的估计. 至此完成引理的证明.

引理 7 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解的偏导数 u_{xx} 满足如下估计

$$|u_{xx}|\le C\Big(1+\mu^{-2}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big), \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

证 对方程 (1.1) 两边关于 x 求一次偏导数，并令 $z_3=u_{xx}$, 则有

$$\mu\frac{\partial z_3}{\partial x}+a(x,t)z_3=h_3(x,t),$$

这里

$$h_3(x,t)=-f_x+\varepsilon u_{xt}-a_xu_x+b_xu+bu_x.$$

由引理 2–6 和假设 (1.4) 可知

$$|h_3(x,t)|\le C\Big(1+\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big), \quad (x,t)\in\overline{D}. \tag{2.6}$$

求解上面一阶微分方程可得

$$\begin{aligned} z_3(x,t)&=z_3(0,t)\exp(-\mu^{-1}(A(x,t)-A(0,t)))\\ &\quad+\mu^{-1}\int_0^x h_3(s,t)\exp(-\mu^{-1}(A(x,t)-A(s,t)))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

这里 $A(x,t)$ 同样是 $a(x,t)$ 关于变量 x 的不定积分. 由不等式 (2.2), (2.6) 和引理 3 可得

$$\begin{aligned}|z_3(x,t)|&\le C\mu^{-2}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\\ &\quad+C\mu^{-1}\int_0^x\Big(1+\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha s}{\mu}\Big)\Big)\exp\Big(-\frac{\alpha(x-s)}{\mu}\Big)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

由此不等式可得引理成立.

引理 8 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解的偏导数 u_{tt} 满足如下估计

$$|u_{tt}|\le C\Big(1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big), \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

证 选取障碍函数

$$\phi_2(x,t)=C\Big(1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big),$$

则对于充分大的常数 C 我们有

$$
\begin{aligned}
&L_{\varepsilon,\mu}(\phi_2 \pm u_{tt})\\
=&-C\beta\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)-C\alpha^2\varepsilon^{-1}\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)+Ca(x,t)\alpha\varepsilon^{-1}\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\\
&+Cb(x,t)\Big[1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big]\\
&\pm(f_{tt}+a_{tt}u_x+2a_tu_{xt}-b_{tt}u-2b_tu_t)\\
=&Cb(x,t)\Big(1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big)+C(b(x,t)-\beta)\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\\
&+C(a(x,t)-\alpha)\alpha\varepsilon^{-1}\mu^{-1}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\pm(f_{tt}+a_{tt}u_x+2a_tu_{xt}-b_{tt}u-2b_tu_t)\\
\geq&\, 0.
\end{aligned}\tag{2.7}
$$

上面的推导利用了引理 2–6 和假设 (1.5).

由边界条件 (1.2) 可知

$$u_{tt}|_{\partial\Omega\times(0,T]}=0.$$

结合上式和引理 3 可得：对于充分大的常数 C 有

$$(\phi_2\pm u_{tt})|_{\partial D}\geq 0 \tag{2.8}$$

成立.

结合不等式 (2.7)–(2.8) 和引理 1 可证得引理成立.

引理 9 方程 (1.1)–(1.2) 的准确解的偏导数 u_{xxx} 满足如下估计

$$|u_{xxx}|\leq C\Big(1+\mu^{-1}+\mu^{-3}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big),\quad (x,t)\in\overline{D}.$$

证 对方程 (1.1) 两边关于 x 求两次偏导数，并令 $z_4=u_{xxx}$, 则有

$$\mu\frac{\partial z_4}{\partial x}+a(x,t)z_4=h_4(x,t),$$

这里

$$h_4(x,t)=-f_{xx}+\varepsilon u_{xxt}-a_{xx}u_x-2a_xu_{xx}+b_{xx}u+2b_xu_x+bu_{xx}.$$

再对方程 (1.1) 两边关于 t 求一次偏导数可得

$$\mu u_{xxt}=\varepsilon u_{tt}-a_tu_x-au_{xt}+b_tu_t-f_t.$$

故有

$$|u_{xxt}|\leq C\Big(1+\varepsilon^{-1}\mu^{-1}+\varepsilon^{-1}\mu^{-2}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big), \tag{2.9}$$

这里我们已利用了假设 (1.5), 引理 4–6 和引理 8.

由引理 2–7, 不等式 (2.9) 和假设 (1.4) 可得

$$|h_4(x,t)|\leq C\Big(1+\mu^{-1}+\mu^{-2}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big),\quad (x,t)\in\overline{D}. \tag{2.10}$$

求解上面一阶微分方程可得

$$\begin{aligned} z_4(x,t) = {} & z_4(0,t)\exp(-\mu^{-1}(A(x,t)-A(0,t))) \\ & +\mu^{-1}\int_0^x h_4(s,t)\exp(-\mu^{-1}(A(x,t)-A(s,t)))\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

这里 $A(x,t)$ 同样为 $a(x,t)$ 关于变量 x 的不定积分. 由不等式 (2.2),(2.10) 和引理 3 可得

$$\begin{aligned} |z_4(x,t)| \le {} & C\mu^{-3}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big) \\ & +C\mu^{-1}\int_0^x \Big(1+\mu^{-1}+\mu^{-2}\exp\Big(-\frac{\alpha s}{\mu}\Big)\Big)\exp\Big(-\frac{\alpha(x-s)}{\mu}\Big)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

由此可得引理的结论是正确的.

3 准确解的分解

为构造关于小参数一致收敛的差分策略, 需要知道方程准确解的更加精确的估计. 下面将方程 (1.1)–(1.2) 的准确解作如下分解

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),\quad (x,t)\in\overline{D}, \tag{3.1}$$

其中 $v(x,t)$ 满足如下非退化方程

$$L_{\varepsilon,\mu}v(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{3.2}$$

$$v(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{3.3}$$

$$v(0,t)=v_0(0,t)+\mu v_1(0,t),\quad v(1,t)=0,\quad t\in(0,T], \tag{3.4}$$

而 $w(x,t)$ 满足如下退化方程

$$L_{\varepsilon,\mu}w(x,t)=0,\quad (x,t)\in D, \tag{3.5}$$

$$w(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{3.6}$$

$$w(0,t)=-v(0,t),\quad w(1,t)=0,\quad t\in(0,T]. \tag{3.7}$$

其中 $v_0(x,t),v_1(x,t)$ 是如下定义的

$$\varepsilon\frac{\partial v_0}{\partial t}-a(x,t)\frac{\partial v_0}{\partial x}+b(x,t)v_0=f(x,t),\quad x,t\in D, \tag{3.8}$$

$$v_0(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{3.9}$$

$$v_0(1,t)=0,\quad t\in(0,T], \tag{3.10}$$

$$\varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial t}-a(x,t)\frac{\partial v_1}{\partial x}+b(x,t)v_1=\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2},\quad (x,t)\in D, \tag{3.11}$$

$$v_1(x,0)=0,\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{3.12}$$

$$v_1(1,t)=0,\quad t\in(0,T]. \tag{3.13}$$

引理 10 存在某个常数 C, 使得如下估计成立

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{\partial^i v}{\partial x^i}\Big|\le C(1+\mu^{2-i}),\quad i=0,1,2,3,\ (x,t)\in\overline{D}, \\ &\Big|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\Big|\le C\Big(1+\varepsilon^{1-j}+\varepsilon^{-j}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big),\quad j=0,1,2,\ (x,t)\in\overline{D}. \end{aligned}$$

证 由于 $v_0(x,t), v_1(x,t)$ 和它们的各阶导数是独立于小参数 μ 的，因此我们有

$$\Big|\frac{\partial^i v_0}{\partial x^i}\Big| \le C, \quad \Big|\frac{\partial^i v_1}{\partial x^i}\Big| \le C, \quad j=0,1,2,3,\ (x,t)\in \overline{D}. \tag{3.14}$$

应用类似于前面引理中估计准确解 u 及其各阶导数的技巧，我们可得

$$\Big|\frac{\partial^j v_0}{\partial t^j}\Big| \le C\Big(1+\varepsilon^{-j}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big), \quad j=0,1,2,\ (x,t)\in \overline{D}, \tag{3.15}$$

$$\Big|\frac{\partial^j v_1}{\partial t^j}\Big| \le C\Big(1+\varepsilon^{-j}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big), \quad j=0,1,2,\ (x,t)\in \overline{D}. \tag{3.16}$$

$v(x,t)$ 可表示为

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \mu v_1(x,t) + \mu^2 v_2(x,t), \tag{3.17}$$

其中 $v_2(x,t)$ 是方程

$$\varepsilon\frac{\partial v_2}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - a(x,t)\frac{\partial v_2}{\partial x} + b(x,t)v_2 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad (x,t)\in D,$$
$$v_2(x,0)=0, \quad x\in\overline{\Omega},$$
$$v_2(0,t)=v(1,t)=0, \quad t\in(0,T]$$

的解. 应用引理 2–9 可得

$$\Big|\frac{\partial^i v_2}{\partial x^i}\Big| \le C\Big(1+\mu^{2-i}+\mu^{-i}\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big)\Big), \quad i=0,1,2,3,\ (x,t)\in \overline{D}, \tag{3.18}$$

$$\Big|\frac{\partial^j v_2}{\partial t^j}\Big| \le C\Big(1+\varepsilon^{1-j}+\varepsilon^{-j}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big), \quad j=0,1,2,\ (x,t)\in \overline{D}. \tag{3.19}$$

结合 (3.14)–(3.19) 可完成引理的证明.

下面的引理给出 $w(x,t)$ 的估计.

引理 11 方程 (3.5)–(3.7) 的解 $w(x,t)$ 满足如下估计

$$|w(x,t)| \le C\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big), \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

证 选取障碍函数

$$\phi_3(x,t) = C\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big),$$

对于充分大的常数 C, 有

$$L_{\varepsilon,\mu}(\phi_3 \pm w) = C\mu^{-1}(-\alpha^2 + a(x,t)\alpha + b(x,t))\exp\Big(-\frac{\alpha x}{\mu}\Big) \ge 0. \tag{3.20}$$

由初值条件 (3.6) 和边值条件 (3.7) 可知

$$(\phi_3 \pm w)|_{\partial D} \ge 0. \tag{3.21}$$

结合不等式 (3.20)–(3.21) 和引理 1 可完成此引理的证明.

4 网格和差分格式

由准确解的性质可以看出，方程 (1.1)–(1.2) 的准确解 u 在边界 $x=0$ 和 $t=0$ 处存在边界层. 因此我们需要对边界层区域进行加密. 下面给出已被广泛应用于求解奇异摄动问题的 Shishkin 型加密网格.

令 σ_μ 和 σ_ε 是网格转折系数，定义如下

$$\sigma_\mu=\min\Big(\frac{1}{2},\frac{\mu}{\alpha}\ln N\Big),\quad \sigma_\varepsilon=\min\Big(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{\beta}\ln N\Big).$$

这里我们假设 $\sigma_\mu=\frac{\mu}{\alpha}\ln N$ 和 $\sigma_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\beta}\ln N$; 否则 N^{-1} 和 K^{-1} 分别是相对于 μ 和 ε 指数小的，我们可以用经典的数值方法进行求解.

在空间方向上，我们分别等分小区间 $[0,\sigma_\mu]$ 和 $[\sigma_\mu,1]$ 成 $\frac{N}{2}$ 个小区间. 类似地，在时间方向上，我们也可以分别等分小区间 $[0,\sigma_\varepsilon]$ 和 $[\sigma_\varepsilon,T]$ 成 $\frac{K}{2}$ 个小区间. 那么我们的分片一致的 Shishkin 型加密网格为 $D^{N,K}=\{(x_i,t_j)|i=0,1,\cdots,N;j=0,1,\cdots,K\}$, 这里

$$x_i=\begin{cases}\dfrac{2i\sigma_\mu}{N}, & i=0,1,\cdots,\dfrac{N}{2},\\ 1-\dfrac{2(1-\sigma_\mu)(N-i)}{N}, & i=\dfrac{N}{2}+1,\cdots,N,\end{cases}\tag{4.1}$$

$$t_j=\begin{cases}\dfrac{2j\sigma_\varepsilon}{K}, & j=0,1,\cdots,\dfrac{K}{2},\\ 1-\dfrac{2(1-\sigma_\varepsilon)(K-j)}{K}, & j=\dfrac{K}{2}+1,\cdots,K.\end{cases}\tag{4.2}$$

明显可以看出，网格步长 $h_i=x_i-x_{i-1}$ 和 $\tau_j=t_j-t_{j-1}$ 分别满足

$$h_i\le\begin{cases}C\mu N^{-1}\ln N, & i=1,2,\cdots,\dfrac{N}{2},\\ CN^{-1}, & i=\dfrac{N}{2}+1,\cdots,N,\end{cases}\tag{4.3}$$

$$\tau_j\le\begin{cases}C\varepsilon K^{-1}\ln K, & j=1,2,\cdots,\dfrac{K}{2},\\ CK^{-1}, & j=\dfrac{K}{2}+1,\cdots,K.\end{cases}\tag{4.4}$$

在 Shishkin 型网格 $D^{N,K}$ 上，应用隐式迎风差分格式来离散方程 (1.1)–(1.2)

$$L^{N,K}_{\varepsilon,\mu}U_i^j\equiv\varepsilon D_t^-U_i^j-\mu\delta_x^2U_i^j-a_i^jD_x^+U_i^j+b_i^jU_i^j=f_i^j,\quad 1\le i<N,\ 1\le j\le K,\tag{4.5}$$

$$U_i^0=0,\quad 1\le i<N,\quad U_0^j=U_N^j=0,\quad 0\le j\le K,\tag{4.6}$$

这里

$$D_x^+U_i^j=\frac{U_{i+1}^j-U_i^j}{h_{i+1}},\quad D_x^-U_i^j=\frac{U_i^j-U_{i-1}^j}{h_i},$$
$$\delta_x^2U_i^j=\frac{2}{h_{i+1}+h_i}(D_x^+U_i^j-D_x^-U_i^j),\quad D_t^-U_i^j=\frac{U_i^j-U_i^{j-1}}{\tau_j}.$$

5　误差分析

我们应用离散极大模原理、截断误差估计和障碍函数技巧来进行误差估计.

引理 12 (离散极大模原理)　$L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}$ 在分片一致的网格 $D^{N,K}$ 上满足离散极大模原理, 即如果 $\{\varphi_i^j\}$ 和 $\{\psi_i^j\}$ 是网格函数, 满足 $\varphi_0^j \le \psi_0^j$, $\varphi_N^j \le \psi_N^j$ $(0 \le j \le K)$, $\varphi_i^0 \le \psi_i^0$ $(0 \le i \le N)$ 和 $L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}\varphi_i^j \le L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}\psi_i^j$ $(1 \le i < N, 1 \le j \le K)$, 那么对于所有的 i,j 有 $\varphi_i^j \le \psi_i^j$ 成立.

证　容易证明与算子 $L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}$ 相应的矩阵是一个 M- 阵, 可参见文献 [5] 中引理 3.1 的证明.

下面的引理给出一个估计截断误差的有用公式.

引理 13　令 $r(x,t)$ 是定义在区域 $\overline{D}$ 上的光滑函数, 则有如下的截断误差估计式成立

$$
\begin{aligned}
|L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}r_i^j - L_{\varepsilon,\mu}r(x_i,t_j)| \le{}& C\varepsilon\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big|\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}(x_i,t)\Big|\mathrm{d}t + C\mu\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\Big|\frac{\partial^3 r}{\partial x^3}(x,t_j)\Big|\mathrm{d}x \\
&+C\int_{x_i}^{x_{i+1}}\Big|\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(x,t_j)\Big|\mathrm{d}x,\quad 1 \le i < N,\ 1 \le j \le K.
\end{aligned}
$$

证　应用 Peano 核定理即可得引理成立, 可参见文献 [5] 中引理 3.3 的证明.

下面我们给出一个定理证明中需要用到的结果.

引理 14　定义网格函数

$$
S_i^j = \prod_{k=1}^{i}\Big(1+\frac{\alpha h_k}{\mu}\Big)^{-1},\quad 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le K,
$$

这里对于所有的 j 都有 $S_0^j = 1$. 那么网格函数 S_i^j 满足

$$
\begin{aligned}
&L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}S_i^j \ge \frac{CS_i^j}{\max\{\mu,h_i\}},\quad 1 \le i < N,\ 1 \le j \le K,\\
&\exp\Big(-\frac{\alpha x_i}{\mu}\Big) \le S_i^j,\quad 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le K.
\end{aligned}
$$

证　通过简单计算易得引理成立, 可参见文献 [12, 13].

至此, 我们可得本文的主要结果.

定理 1　设 u 是方程 (1.1)–(1.2) 的准确解, U 是差分策略 (4.5)–(4.6) 的解. 则我们有如下误差估计式成立

$$
|u_i^j - U_i^j| \le C(N^{-1}\ln N + K^{-1}\ln K),\quad 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le K.
$$

证　回顾准确解的分解式 (3.1), 可类似分解离散解成如下形式

$$
U_i^j = V_i^j + W_i^j,\quad 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le K,
$$

这里 V 满足如下方程

$$
\begin{aligned}
&L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}V_i^j = f_i^j,\quad 1 \le i < N,\ 1 \le j \le K,\\
&V_i^0 = v_i^0,\quad 0 \le i \le N,\\
&V_0^j = v_0^j,\quad V_N^j = v_N^j,\quad 0 < j \le K,
\end{aligned}
$$

而 W 满足如下方程

$$\begin{aligned}&L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}W_i^j=0,\quad 1\le i<N,\ 1\le j\le K,\\&W_i^0=w_i^0,\quad 0\le i\le N,\\&W_0^j=w_0^j,\quad W_N^j=w_N^j,\quad 0<j\le K.\end{aligned}$$

那么在每个网格点上的误差为

$$u_i^j-U_i^j=v_i^j-V_i^j+w_i^j-W_i^j.$$

因此可分别估计 v 和 w 的误差.

对于光滑部分的估计，由引理 10 和 13 可得

$$\begin{aligned}&|L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}(v_i^j-V_i^j)|\\=\;&|L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}v_i^j-L_{\varepsilon,\mu}v_i^j|\le C\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big(1+\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{\beta t}{\varepsilon}\Big)\Big)\mathrm{d}t+CN^{-1}\\\le\;&CN^{-1}+C\Big(\tau_j-\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}|_{t_{j-1}}^{t_j}\Big)\\\le\;&CN^{-1}+CK^{-1}\ln K,\quad 1\le i<N,\ 1\le j\le K,\end{aligned}$$

这里我们已经利用了网格步长的估计式 (4.3)–(4.4) 和转折点 σ_ε 的选取. 选取障碍函数 $G_i^j=C(N^{-1}+K^{-1}\ln K)$ (常数 C 充分大), 由引理 12 可得

$$|v_i^j-V_i^j|\le C(N^{-1}+K^{-1}\ln K),\quad 0\le i\le N,\ 0\le j\le K. \tag{5.1}$$

对于 $w(x_i,t_j)-W_i^j$ 的误差分析，直接的截断误差和障碍函数技巧得不到关于小参数 ε 和 μ 都一致收敛的令人满意的结果. 这里我们先在粗网格上进行误差估计. 首先，注意到

$$|W_N^j|=|w_N^j|\le C\exp\Big(-\frac{\alpha}{\mu}\Big)=C\prod_{k=1}^{N}\exp\Big(-\frac{\alpha h_k}{\mu}\Big)\le C\prod_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{\alpha h_k}{\mu}\Big)^{-1},\quad 0\le j\le K.$$

又已知 $|W_0^j|=|w_0^j|\le C\ (0\le j\le K)$ 和 $L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}W_i^j=0\ \ (1\le i<N,1\le j\le K)$ 成立. 由引理 14 可知：对于充分大的常数 C, $Q_i^j=CS_i^j$ 是 W_i^j 的一个障碍函数. 因此，利用引理 12 可得如下估计

$$|W_i^j|\le CS_i^j=C\prod_{k=1}^{i}\Big(1+\frac{\alpha h_k}{\mu}\Big)^{-1},\quad 0\le i\le N,\ 0\le j\le K.$$

故有

$$|w_i^j-W_i^j|\le|w_i^j|+|W_i^j|\le C\exp\Big(-\frac{\alpha x_i}{\mu}\Big)+CS_i^j,\quad 0\le i\le N,\ 0\le j\le K. \tag{5.2}$$

下面我们证明当 $\frac{N}{2}\le i\le N,\ 0\le j\le K$ 时成立 $S_i^j\le CN^{-1}$. 由于 $S_{i+1}^j\le S_i^j$ $(0\le i\le N,\ 0\le j\le K)$, 故只要证明 $S_{\frac{N}{2}}^j\le CN^{-1}$ $(0\le j\le K)$ 成立即可.

经计算有

$$\ln\Big(\prod_{k=1}^{\frac{N}{2}}\Big(1+\frac{\alpha h_k}{\mu}\Big)\Big)\geq\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}\Big(\frac{\alpha h_k}{\mu}-\frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha h_k}{\mu}\Big)^2\Big)\geq\frac{\alpha x_{\frac{N}{2}}}{\mu}-2\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}}k^{-2}\geq\frac{\alpha x_{\frac{N}{2}}}{\mu}-\frac{\pi^2}{3}.$$

注意到 $x_{\frac{N}{2}}=\frac{\mu}{\alpha}\ln N$, 由式 (5.2) 可得

$$|w_i^j-W_i^j|\leq CN^{-1},\quad \frac{N}{2}\leq i\leq N,\ 0\leq j\leq K. \tag{5.3}$$

对于 $1\leq i<\frac{N}{2}$, $1\leq j\leq K$, 由引理 7–10 和引理 14 可得

$$\begin{aligned}|L_{\varepsilon,\mu}^{N,K}(w_i^j-W_i^j)|&\leq C\int_{t_{j-1}}^{t_j}(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}})\mathrm{d}t+C\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(1+\mu^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha x}{\mu}})\mathrm{d}x\\&\leq CK^{-1}\ln K+CN^{-1}+C\mu^{-1}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\mu}}-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha x_{i+1}}{\mu}})\\&=CK^{-1}\ln K+CN^{-1}+C\mu^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha x_i}{\mu}}(\mathrm{e}^{\frac{\alpha h_i}{\mu}}-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha h_{i+1}}{\mu}})\\&\leq CK^{-1}\ln K+CN^{-1}+C\mu^{-1}N^{-1}\ln N\mathrm{e}^{-\frac{\alpha x_i}{\mu}}\\&\leq CK^{-1}\ln K+CN^{-1}+C\mu^{-1}N^{-1}\ln NS_i^j\end{aligned} \tag{5.4}$$

成立.

容易知道在小区域 $[0,\sigma]\times[0,T]$ 上离散极大模原理 (引理 12) 仍旧成立. 我们应用极大模原理，利用式 (5.3)–(5.4), 引理 14 和障碍函数

$$P_i^j=CK^{-1}\ln K+CN^{-1}+CS_i^jN^{-1}\ln N,\quad 0\leq i\leq\frac{N}{2},\ 0\leq j\leq K,$$

可得

$$|w_i^j-W_i^j|\leq CK^{-1}\ln K+CN^{-1}\ln N,\quad 0\leq i\leq\frac{N}{2},\ 0\leq j\leq K. \tag{5.5}$$

结合式 (5.1), (5.3) 和 (5.5) 可证得定理成立.

6　数值实验

下面考虑数值例子，用数值实验来证实理论结果的正确性.

例 1　考虑如下问题

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\mu\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-(x+1)\frac{\partial u}{\partial x}+u=f(x,t),\quad (x,t)\in(0,1)\times(0,1],\\&u(0,t)=u(1,t)=u(x,0)=0,\quad t\in[0,1],\quad x\in[0,1],\end{aligned}$$

这里选取 $f(x,t)$ 使得准确解为

$$u(x,t)=t\left[\frac{1-\exp(-\frac{x}{\mu})}{1-\exp\big(-\frac{1}{\mu}\big)}-x\right]+x(1-x)\Big[1-\exp\Big(-\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big].$$

为简单起见，在数值实验中我们选取 $N=K$. 我们选取充分小的 ε 和 μ 使得问题具有奇异摄动的特性. 我们分别计算误差的离散最大模 $\|\cdot\|_\infty$, 收敛速率 r^N

$$r^N=\log_2\left(\frac{\|u-U^N\|_\infty}{\|u-U^{2N}\|_\infty}\right)$$

和收敛常数 C^N

$$C^N=\frac{\|u-U^N\|_\infty}{N^{-1}\ln N}.$$

数值结果 (表 1–4) 很清楚地表明定理 1 的收敛估计是正确的, 它显示理论结果是相当稳健的.

表 1 $\varepsilon=0.0001,\ \mu=0.0001$

$N=K$	error	rate	constant
32	$9.5534e-2$	0.886	0.8821
64	$5.1707e-2$	0.909	0.7957
128	$2.7543e-2$	0.918	0.7266
256	$1.4580e-2$	0.923	0.6731
512	$7.6900e-3$	0.929	0.6311
1024	$4.0383e-3$	-	0.5966

表 2 $\varepsilon=0.0001,\ \mu=0.00000001$

$N=K$	error	rate	constant
32	$9.5716e-2$	0.884	0.8838
64	$5.1858e-2$	0.907	0.7980
128	$2.7664e-2$	0.914	0.7298
256	$1.4680e-2$	0.917	0.6777
512	$7.7760e-3$	0.919	0.6382
1024	$4.1132e-3$	-	0.6077

表 3 $\varepsilon=0.00000001,\ \mu=0.0001$

$N=K$	error	rate	constant
32	$9.5533e-2$	0.886	0.8821
64	$5.1706e-2$	0.909	0.7957
128	$2.7543e-2$	0.918	0.7266
256	$1.4580e-2$	0.923	0.6731
512	$7.6900e-3$	0.929	0.6311
1024	$4.0383e-3$	-	0.5966

表 4 $\varepsilon=0.00000001,\ \mu=0.00000001$

$N=K$	error	rate	constant
32	$9.5714e-2$	0.884	0.8837
64	$5.1858e-2$	0.907	0.7980
128	$2.7664e-2$	0.914	0.7298
256	$1.4680e-2$	0.917	0.6777
512	$7.7760e-3$	0.919	0.6382
1024	$4.1132e-3$	-	0.6077

参 考 文 献

[1] Cen Z D. Parameter-uniform finite difference scheme for a system of coupled singularly perturbed convection-diffusion equations. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2005, **18**(4): 498–510.

[2] Farrell P A, Hegarty A F, Miller J J H, O'Riordan E and Shishkin G I. Robust Computational Techniques for Boundary Layers. London: Chapman & Hall, 2000.

[3] Khan I and Aziz T. Tension spline method for second-order singularly perturbed boundary-value problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 2005, **82**: 1547–1553.

[4] Kumar M, Singh P and Mishra H K. A recent survey on computational techniques for solving singularly perturbed boundary value problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 2007, **84**: 1439–1463.

[5] Kellogg R B and Tsan A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points. *Math. Comp.*, 1978, **32**: 1025–1039.

[6] Miller J J H, O'Riordan E and Shishkin G I. Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Singapore: World Scientific Publishing, 1996.

[7] Linß T. Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2003, **192**: 1061–1105.

[8] Hemker P W, Shishkin G I and Shishkina L P. ε-uniformly schemes with high-order time-accuracy for parabolic singular perturbation problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 2000, **20**: 99–121.

[9] Roos H G, Stynes M and Tobiska L. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Berlin: Springer, 1996.

[10] Li J. Optimal uniform convergence analysis for a two-dimensional parabolic problem with two small parameters. *Intern. J. Numer. Anal. Modeling*, 2005, **2**: 107–126.

[11] Ladyzhenskaya O A, Solonnikov V A and Ural'tseva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Moscow, Nauka publisher, 1968.

[12] Roos H G and Linb T. Sufficient conditions for uniform convergence on layer-adapted grids. *Computing*, 1999, **63**: 27–45.

[13] Stynes M and Roos H G. The mipoint upwind scheme. *Appl. Numer. Math.*, 1997, **23**: 361–374.

ANALYSIS OF A FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR A PARABOLIC CONVECTION-DIFFUSION PROBLEM WITH TWO SMALL PARAMETERS

CEN Zhongdi

(*Institute of Mathematics, Zhejiang Wanli University, Ningbo* 315100)

Abstract In this paper a parabolic convection-diffusion problem with two small parameters is considered. By using the maximum principle with carefully chosen barrier functions, we obtain the estimates of bounds for the exact solution and its derivatives. A fully implicit upwind finite difference scheme on a Shishkin-type mesh is used to solve the problem numerically. It is shown that the scheme converge almost first-order uniformly with respect to two small parameters. Numerical results support the theoretical results.

Key words Singularly perturbed, convection-diffusion, finite difference, Shishkin mesh, uniform convergence.