系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(12) (2008, 12), 1545–1554

含随机效应 GCM 中回归参数阵两步估计的计算及其无偏性

罗幼喜 李翰芳 李子强
(湖北工业大学理学院， 武汉 430068)

摘要 首先给出了含随机效应增长曲线模型中回归参数阵两步估计的一个较为简单的计算方法；然后给出了回归参数阵的可估函数的两步估计具有无偏性的一个基本结论，并证明了两种常见两步估计均具有无偏性；最后给出了一个牙齿生长数据的实例模拟.

关键词 随机效应，回归参数阵，两步估计，无偏估计.

MR(2000) 主题分类号 62J10, 92B15

1 引 言

增长曲线模型 $Y_{p\times n}=X_{p\times q}\Theta_{q\times k}A_{k\times n}+E_{p\times n}$ (简称 GCM) 是 1938 年 Wishart 在研究不同组间动植物的生长情况时引入的， 1964 年 Pottoff and Ray[1] 对这种模型的背景作了详细研究. 由于研究的目的和样品取法不同，有时效应不能看成是固定的，而应该看成是随机的，即含随机效应的增长曲线模型，这种模型最近被予以广泛的关注，其定义为

$$y_i=X\beta_i+e_i,\quad \beta_i=\Theta a_i+\eta_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 y_i 为 $p\times 1$ 维观察向量，$X_{p\times q}$ 为已知设计矩阵，β_i 为随机系数向量，$e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $p\times 1$ 维误差向量且相互独立，其均值为 0, 协方差为 $R_{p\times p}\geq 0$, η_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $q\times 1$ 维随机效应向量且相互独立，均值为 0, 协方差阵为 $D_{q\times q}\geq 0$, 并且 e_i 与 η_i 也相互独立.

若记

$$Y_{p\times n}=(y_1,y_2\cdots y_n),\quad A_{k\times n}=(a_1,a_2\cdots,a_n),$$
$$\eta_{q\times n}=(\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n),\quad E_{p\times n}=(e_1,e_2\cdots,e_n),$$

则上述模型可写为

$$Y_{p\times n}=X_{p\times q}\Theta_{q\times k}A_{k\times n}+X_{p\times q}\eta_{q\times n}+E_{p\times n}.\tag{1.1}$$

更进一步我们还可以假定 η,E 均服从多元正态分布，即 $\eta\sim N_{q,n}(0,D,I_n)$, $E\sim N_{p,n}(0,R,I_n)$, 从而 $Y\sim N_{p,n}(X\Theta A,XDX'+R,I_n)$.

对于上述模型的研究主要集中在两个方面，一方面是有关随机效应的估计与检验问题，在正态条件假设下， Schott and Saw[2], Amemiya and Fuller[3], Anderson B M and Anderson T

收稿日期：2005-04-05, 收到修改稿日期：2008-07-17.

W & Olikin[4] 等人分别在不同条件下得到了 D 和 R 的 MLE 以及 D 的秩的似然比检验准则 (LRC)； Hironori Fujisawa[5] 则在正态假设下给出了该模型均值的广义线性假设的 LRC; 另外研究随机效应各种检验问题的还有 Anderson T W and Amemiya[6], Fujisawa[7], Kuriki[8], Yokoyama and Fujisawa[9] 等等. 另一方面是回归参数阵 Θ 的估计与检验问题, 虽然模型 (1.1) 可以看成是一般 GCM 的推广形式, 很多有关参数阵 Θ 的研究可以直接利用一般 GCM 研究方法得出, 但是由于模型 (1.1) 中协方差结构的特殊性, 对 Θ 的一些常见重要估计都产生了很大影响, 特别是使两步估计的计算和优良性变得更为复杂, 本文正是在这两方面作了一些有益的探讨.

2 两步估计的提出及其计算

定义 2.1[10] Θ 的线性函数 $K\Theta L(K,\ L$ 均为已知矩阵) 称为可估的, 当且仅当存在矩阵 D 和 F, 使得

$$E(DYF)=K\Theta L,\quad \forall\,\Theta\in P^{q\times k},$$

即存在 Y 的线性函数使得它是 $K\Theta L$ 的无偏估计.

引理 2.1[10] 在模型 (1.1) 中, 当 $\Sigma\triangleq XDX'+R>0$ 为任意已知正定阵时, 对任意可估函数 $K\Theta L$, 其 LSE 估计为 $K\Theta^{*}L$, 其中 $\Theta^{*}=(X'X)^{-}X'YA'(AA')^{-}$, 而其 BLUE 为 $K\Theta^{*}_{\Sigma}L$, 其中 Θ^{*}_{Σ} 为正则方程

$$(X'\Sigma^{-1}X)\Theta(AA')=X'\Sigma^{-1}YA' \tag{2.1}$$

的解.

可估函数 $K\Theta L$ 的 BLUE $K\Theta^{*}_{\Sigma}L$ 是 Σ 函数, 然而由于实际上 D, R 往往未知, 所以要求得该估计, 只能用它们的估计 $\widehat{D}$, $\widehat{R}$ 来代替, 即用 $\widehat{\Sigma}=X\widehat{D}X'+\widehat{R}$ 来代替 Σ 得到 $K\Theta L$ 的两步估计 $K\Theta^{*}_{\widehat{\Sigma}}L$. 从引理 2.1 知 Θ^{*}_{Σ} 是 (2.1) 的解, 所以要计算 Θ^{*}_{Σ} 就涉及到 Σ^{-1} 的计算, 这在实际问题中特别是对于模型 (1.1) 通常计算量是很大的, 下面我们用另外一种构造性的方法求此解.

在模型 (1.1) 中, 若视 η 为固定效应, 则 Θ,η 的 BLUE 是使函数

$$Q(\Theta,\eta)=\mathrm{tr}\,(Y-X\Theta A-X\eta)'R^{-1}(Y-X\Theta A-X\eta) \tag{2.2}$$

达到极小值的点, 即当且仅当是正则方程 (2.3) 的解.

$$\begin{cases}(X'R^{-1}X)\Theta(AA')+(X'R^{-1}X)\eta A'=X'R^{-1}YA',\\(X'R^{-1}X)\Theta A+(X'R^{-1}X)\eta=X'R^{-1}Y.\end{cases} \tag{2.3}$$

我们在 (2.3) 的第二个方程左边加上一项 $D^{-1}\eta$ 得

$$\begin{cases}(X'R^{-1}X)\Theta(AA')+(X'R^{-1}X)\eta A'=X'R^{-1}YA',\\(X'R^{-1}X)\Theta A+(X'R^{-1}X+D^{-1})\eta=X'R^{-1}Y,\end{cases} \tag{2.4}$$

从 (2.4) 的第二个方程有

$$\eta=[X'R^{-1}X+D^{-1}]^{-1}[X'R^{-1}Y-(X'R^{-1}X)\Theta A], \tag{2.5}$$

代入到第一个方程中得

$$
\begin{aligned}
&X'[R^{-1}-R^{-1}X(X'R^{-1}X+D^{-1})^{-1}X'R^{-1}]X\Theta(AA')\\
&=X'[R^{-1}-R^{-1}X(X'R^{-1}X+D^{-1})^{-1}X'R^{-1}]YA'.
\end{aligned}
$$

记 $W=R^{-1}-R^{-1}X(X'R^{-1}X+D^{-1})^{-1}X'R^{-1}$,

$$
(X'WX)\Theta(AA')=X'WYA'. \tag{2.6}
$$

下面我们证明 $\Sigma W=I$.

$$
\begin{aligned}
\Sigma W&=(XDX'+R)[R^{-1}-R^{-1}X(X'R^{-1}X+D^{-1})^{-1}X'R^{-1}]\\
&=I+X[D-DX'R^{-1}X(X'R^{-1}X+D^{-1})^{-1}-(X'R^{-1}X+D^{-1})^{-1}]X'R^{-1}\\
&=I+XD[I-I]X'R^{-1}\\
&=I.
\end{aligned}
$$

从而 $W=\Sigma^{-1}$, 所以 (2.6) 为

$$
(X'\Sigma^{-1}X)\Theta(AA')=X'\Sigma^{-1}YA',
$$

即对于 Θ 而言，(2.1) 和 (2.6) 所得到的解是相同的. 这样我们利用 (2.6) 计算 Θ^*_Σ, 用 D^{-1},R^{-1} 的计算代替了 Σ^{-1} 的计算. 当 D,R 为对角阵时， Σ 不必为对角阵，此时用 (2.6) 有相当的好处.

3　两步估计的无偏性

定义 3.1 设 W 为一空间，若对于任一 $Y\in W$, 统计量 $S(Y)$ 满足 $S(-Y)=S(Y)$, 则称 $S(Y)$ 对 $Y\in W$ 是偶函数；对于任一 $Y\in W$, 统计量 $S(Y)$ 满足 $S(-Y)=-S(Y)$, 则称 $S(Y)$ 对 $Y\in W$ 是奇函数；对于模型 (1.1), 若对一切 Y 和 $B\in P^{q\times k}$, 统计量 $S(Y)$ 满足 $S(Y-XBA)=S(Y)$, 则称 $S(Y)$ 是变换不变的.

引理 3.1 设 u 为一随机矩阵，其分布关于原点是对称的，即 $u\overset{d}{=}-u$, 若 $g(u)$ 是 u 的奇函数，则 $g(u)$ 的分布关于原点也是对称的.

证　因为 $u\overset{d}{=}-u$, 于是 $g(u)\overset{d}{=}g(-u)$, 但是 $g(u)$ 为奇函数，故 $g(-u)=-g(u)$, 这样就有

$$
g(u)\overset{d}{=}g(-u)=-g(u).
$$

这就证明了 $g(u)$ 的分布是关于原点对称的.

定理 3.1 对于模型 (1.1) , 假设 E 的分布关于原点对称，设 $\widehat{\theta}=\widehat{\theta}(Y)$ 是 θ 的一个估计，它是 Y 的偶函数且具有变换不变性，设 $K\Theta L$ 为一可估函数，若 $E(K\Theta^*(\widehat{\theta})L)$ 存在，则两步估计 $K\Theta^*(\widehat{\theta})L$ 是 $K\Theta L$ 的无偏估计.

证　因为 $K\Theta L$ 可估，故存在 T_1,T_2 使得 $K'=X'T_1,\ L=AT_2$, 所以

$$
\begin{aligned}
&K\Theta^*(\widehat{\theta})L-K\Theta L\\
&=T_1'X(X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta})X)^-X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta})YA'(AA')^-AT_2-T_1'X\Theta AT_2\\
&=T_1'X(X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta})X)^-X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta})[Y-X\Theta A]A'(AA')^-AT_2\\
&=K(X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta})X)^-X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta})EA'(AA')^-L.
\end{aligned}
$$

从 $\widehat{\theta}$ 的不变性可得

$$\widehat{\theta}=\widehat{\theta}(Y)=\widehat{\theta}(Y-X\Theta,A)=\widehat{\theta}(E),$$

因而

$$K\Theta^*(\widehat{\theta})L-K\Theta L=K(X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta}(E))X)^-X'\Sigma^{-1}(\widehat{\theta}(E))EA'(AA')^-L.$$

记 $u(E)=K\Theta^*(\widehat{\theta})L-K\Theta L$, 因为 $\widehat{\theta}=\widehat{\theta}(Y)=\widehat{\theta}(E)$ 是 E 的偶函数，从上式容易推出 $u(-E)=-u(E)$ 为 E 的奇函数，利用引理 3.1 便知 $u(E)$ 的分布关于原点是对称的，故有

$$E(u(E))=E(K\Theta^*(\widehat{\theta})L-K\Theta L)=0.$$

下面我们利用上述结论讨论两种常见情况下 Θ 的两步估计具有无偏性.

3.1 D 和 R 的极大似然估计

在模型 (1.1) 中记 $\Omega=\{(D,R):D>0,R>0\}$, 于是其似然函数为

$$L(D,R,Y)=(2\pi)^{-\frac{pn}{2}}\mid\Sigma(D,R)\mid^{-\frac{n}{2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Sigma^{-1}(Y-X\Theta_\Sigma^*A)(Y-X\Theta_\Sigma^*A)']\Big\}.$$

两边取对数并略去常数项得对数似然函数

$$\ln L(D,R,Y)=-\frac{n}{2}\ln\mid\Sigma(D,R)\mid-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Sigma^{-1}(Y-X\Theta_\Sigma^*A)(Y-X\Theta_\Sigma^*A)'],$$

则 D,R 的极大似然估计 $\widehat{D},\widehat{R}$ 就是使上述对数函数达到极大值的点，其中

$$\Theta_\Sigma^*=(X'\Sigma^{-1}X)^-X'\Sigma^{-1}YA'(AA')^-$$

是关于 $\Sigma=XDX'+R$ 的函数.

下面我们来证明 D, R 的 MLE $\widehat{D},\widehat{R}$ 是变换不变的. 对任一 $B\in P^{q\times k}$ 有

$$\begin{aligned}&\ln L(D,R,Y-XBA)\\&=-\frac{n}{2}\ln\mid\Sigma(D,R)\mid-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Sigma^{-1}(Y-XBA-X\Theta_\Sigma^{*\prime}A)(Y-XBA-X\Theta_\Sigma^{*\prime}A)']\\&=-\frac{n}{2}\ln\mid\Sigma(D,R)\mid-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Sigma^{-1}(Y-X\Theta_\Sigma^*A)(Y-X\Theta_\Sigma^*A)']\\&=\ln L(D,R,Y).\end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}&Y-XBA-X\Theta_\Sigma^{*\prime}A\\&=Y-XBA-X(X'\Sigma^{-1}X)^-X'\Sigma^{-1}(Y-XBA)A'(AA')^-A\\&=Y-XBA-X\Theta_\Sigma^*A+XBA\\&=Y-X\Theta_\Sigma^*A.\end{aligned}$$

又我们不难证明

$$\ln L(D,R,-Y)=\ln L(D,R,Y),$$

所以 $(\widehat{D},\widehat{R})$ 是关于 Y 的偶函数，于是由定理 3.1 立即可得

定理 3.2 在模型 (1.1) 中， $K\Theta L$ 的两步估计

$$K\Theta_{\widehat{\Sigma}}^*L=K[(X'\widehat{\Sigma}^{-1}X)^-X'\widehat{\Sigma}^{-1}YA'(AA')^-]L,$$

其中 $\widehat{\Sigma}=X\widehat{D}X'+\widehat{R}$ 为似然方程的解，若 $E\big(K\Theta^*_{\widehat{\Sigma}}L\big)$ 存在，则其两步估计 $K\Theta^*_{\widehat{\Sigma}}L$ 是 $K\Theta L$ 的无偏估计.

在实际问题中，一般先将 $\Theta^*_{\Sigma}=(X'\Sigma^{-1}X)^{-}X'\Sigma^{-1}YA'(AA')^{-}$ 代入对数似然方程中，然后利用迭代的方法求出 Σ 的极大似然估计值，从而得到 $K\Theta L$ 的两步估计.

3.2　D 和 R 的最小二乘估计

将模型 (1.1) 按列拉直

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\,(Y)&=\mathrm{vec}\,(X\Theta A)+\mathrm{vec}\,(X\eta)+\mathrm{vec}\,(E)\\&=(A'\otimes X)\mathrm{vec}\,(\Theta)+(I\otimes X)\mathrm{vec}\,(\eta)+\mathrm{vec}\,(E),\end{aligned}$$

记 $y=\mathrm{vec}(Y),\ \beta=\mathrm{vec}(\Theta),\ \xi=\mathrm{vec}(\eta)\ \ e=\mathrm{vec}(E)$, 又记

$$\begin{aligned}M_{pn\times pn}&=I-(A'\otimes X)(A'\otimes X)^{+}\\&=I-(A'A'^{+}\otimes XX^{+})\\&=I\otimes M_2+M_1\otimes(I-M_2),\end{aligned}$$

其中 $M_1=I-A'A'^{+},\ M_2=I-XX^{+}$. 易见

$$\begin{aligned}&E(My)=ME(y)=[I-(A'\otimes X)(A'\otimes X)^{+}](A'\otimes X)\beta=0,\\&E(Myy'M)=\mathrm{Cov}(My)=M\mathrm{Cov}(y)M'=M[I\otimes(XDX'+R)]M'.\end{aligned}$$

由此可以看出 $XDX'+R$ 与 $Myy'M$ 还是一个线性模型，称为模型 (1.1) 的导出线性模型，记为

$$(Myy'M,E(Myy'M),\mathrm{Cov}(Myy'M))\,.\tag{3.1}$$

定义 3.2[11]　在模型 (1.1) 的导出模型 (3.1) 中，若存在 D^*,R^* 使得

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[Myy'M-M(I\otimes(XD^*X'+R^*))M]^2\\=&\min_{D=D',R=R'}\mathrm{tr}\,[Myy'M-M(I\otimes(XDX'+R))M]^2,\end{aligned}\tag{3.2}$$

则称 D^*,R^* 为 D,R 在矩阵的迹意义下的最小二乘估计.

在内积空间 $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\begin{cases}\mathcal{H}=\{MAM:A\ \text{是}\ np\ \text{阶对称阵}\}\\ \langle H_1,H_2\rangle=\mathrm{tr}\,(H_1H_2),\quad\forall H_1,H_2\in\mathcal{H}\end{cases}$$

中看，$M(I\otimes(XD^*X'+R^*))M$ 就是 $Myy'M$ 在 $\mathcal{H}$ 的子空间

$$\{M(I\otimes(XDX'+R))M:D=D',R=R'\}$$

上的正投影 [11], 所以 (3.2) 等价于

$$\mathrm{tr}\{[Myy'M-M(I\otimes(XD^*X'+R^*))M][M(I\otimes(XDX'+R))M]\}=0,\tag{3.3}$$

$\forall D>0,\ R>0,\ D=D',\ R=R'$ 成立.

由 $I=\sum\limits_{i=1}^{n}e_ie_i'$ 有

$$I\otimes XDX'=\left(\sum_{i=1}^{n}e_ie_i'\right)\otimes(XDX')=\sum_{i=1}^{n}(e_i\otimes I)(1\otimes XDX')(e_i'\otimes I),$$

从而 (3.3) 式可以化为

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\left\{\sum_{i=1}^{n}(e_i'\otimes I)[Myy'M-M(I\otimes(XD^*X'+I\otimes R^*))M](e_i\otimes I)(XDX')\right\}\\&+\operatorname{tr}\left\{\sum_{i=1}^{n}(e_i'\otimes I)[Myy'M-M(I\otimes(XD^*X'+I\otimes R^*))M](e_i\otimes I)R\right\}=0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

$\forall D>0,\ R>0$ 成立，从而 (3.4) 等价于

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i'\otimes I)[Myy'M-M(I\otimes(XD^*X'+I\otimes R^*))M](e_i\otimes I)=0,\tag{3.5}$$

即

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(e_i'\otimes I)Myy'M(e_i\otimes I)\\&=\sum_{i=1}^{n}(e_i'\otimes I)M(I\otimes(XD^*X'+R^*))M(e_i\otimes I).\end{aligned}\tag{3.6}$$

由 $M=I\otimes M_2+M_1\otimes(I-M_2)$ 可得

$$(e_i'\otimes I)My=[M_2Y+(I-M_2)YM_1]e_i,$$

代入 (3.6) 式可得

$$\begin{aligned}\text{左边}&=[M_2Y+(I-M_2YM_1)]\sum_{i=1}^{n}e_ie_i'[Y'M_2+M_1Y'(I-M_2)]\\&=[M_2Y+(I-M_2YM_1)][Y'M_2+M_1Y'(I-M_2)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\sum_{i=1}^{n}[e_i'\otimes M_2+e_i'M_1\otimes(I-M_2)](I\otimes(XD^*X'+R^*))\\&\quad\cdot[e_i\otimes M_2+M_1e_i\otimes(I-M_2)]\\&=nM_2(XD^*X'+R^*)M_2+\operatorname{tr}(M_1)[M_2(XD^*X'+R^*)(I-M_2)\\&\quad+(I-M_2)(XD^*X'+R^*)M_2+(I-M_2)(XD^*X'+R^*)(I-M_2)]\\&=r(XD^*X'+R^*)+(n-r)M_2(XD^*X'+R^*)M_2,\end{aligned}$$

记 $\operatorname{tr}(M_1)=r$, 所以 (3.6) 可以化为

$$\begin{aligned}&r(XD^*X'+R^*)+(n-r)M_2(XD^*X'+R^*)M_2\\&=[M_2Y+(I-M_2)YM_1][Y'M_2+M_1Y'(I-M_2)].\end{aligned}\tag{3.7}$$

当 $r=0$ 也即 $\mathrm{tr}(M_1)=0$ 时，由 M_1 为对称幂等阵立即可知 $M_1=0$, 代入 (3.7) 式可得

$$nM_2(XD^*X'+R^*)M_2=M_2YY'M_2,$$

于是可得 $XD^*X'+R^*$ 的一特解

$$\widehat{\Sigma}=XD^*X'+R^*=\frac{1}{n}M_2YY'M_2. \tag{3.8}$$

当 $r\neq 0$ 时，在 (3.7) 两边同时左乘右乘 $I-M_2$ 得

$$r(I-M_2)(XD^*X'+R^*)(I-M_2)=(I-M_2)YM_1Y'(I-M_2),$$

于是可得 $XD^*X'+R^*$ 的一特解

$$\widehat{\Sigma}=XD^*X'+R^*=\frac{1}{r}(I-M_2)YM_1Y'(I-M_2). \tag{3.9}$$

我们将上述得到的 $\widehat{\Sigma}$ 代替 Σ 得到 $K\Theta L$ 的两步估计. 下面我们将证明 $\widehat{\Sigma}(Y)$ 是 Y 的偶函数且具有变换不变性.

当 $r=0$ 时

$$\begin{aligned}&\widehat{\Sigma}(Y-XBA)\\=&\frac{1}{n}M_2(Y-XBA)(Y-XBA)'M_2\\=&\frac{1}{n}[M_2Y+(I-XX^+)XBA][M_2Y+(I-XX^+)XBA]'\\=&\frac{1}{n}M_2YY'M_2=\widehat{\Sigma}(Y),\end{aligned}$$

且显然 $\widehat{\Sigma}(-Y)=\widehat{\Sigma}(Y)$.

当 $r\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}&\widehat{\Sigma}(Y-XBA)\\=&\frac{1}{r}(I-M_2)(Y-XBA)M_1M_1(Y-XBA)'(I-M_2)\\=&\frac{1}{r}(I-M_2)YM_1Y'(I-M_2)=\widehat{\Sigma}(Y),\end{aligned}$$

且显然

$$\widehat{\Sigma}(-Y)=\widehat{\Sigma}(Y).$$

从而无论在哪种情况下 $\widehat{\Sigma}(-Y)$ 都是 Y 的偶函数且具有变换不变性. 所以由定理 3.1 立即可得

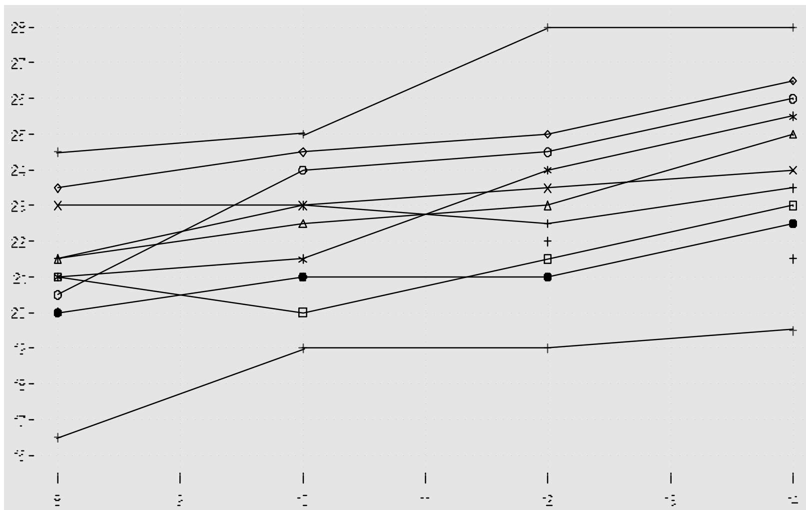
定理 3.3　在模型 (1.1) 中， $K\Theta L$ 的两步估计

$$K\Theta^*_{\widehat{\Sigma}}L=K[(X'\widehat{\Sigma}^{-1}X)^-X'\widehat{\Sigma}^{-1}YA'(AA')^-]L,$$

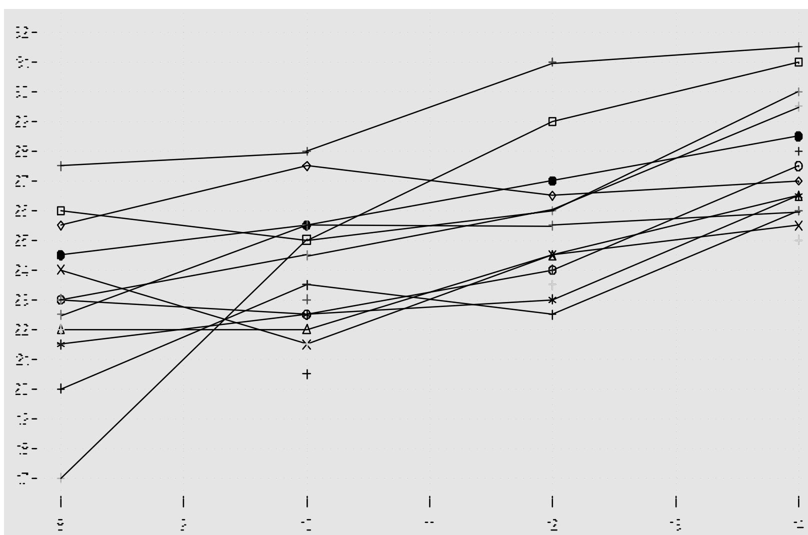
其中 $\widehat{\Sigma}$ 为 (3.8) 或 (3.9), 若 $E(K\Theta^*_{\widehat{\Sigma}}L)$ 存在，则其两步估计 $K\Theta^*_{\widehat{\Sigma}}L$ 是 $K\Theta L$ 的无偏估计.

4 实例模拟

模拟采用文 [1] 中的数据. 该数据是分别测量了 11 个女孩和 16 个男孩在 8 、10 、12 、14 岁时牙齿的生长情况而得到的，其研究的目的是为了从这些数据中寻找男孩和女孩各自的牙齿发育生长模式，以及比较他们之间有无显著差异，测量是在相同的时间段进行的，并且观测值是分男女两组得到的，现将其散点图分别绘制如下，



女孩散点图



男孩散点图

从散点图来看我们可以采用时间的一次多项式 b_0+b_1t 去模拟，从而设计阵分别为

$$X=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\8&10&12&14\end{pmatrix}' \quad 和 \quad A=\begin{pmatrix}1'_{11}&0\\0&1'_{16}\end{pmatrix},$$

其中 $1'_n = (1, 1, \cdots, 1)$, 即元素全部是 1 的 n 维行向量．下面我们将分别采用 Σ 的极大似然估计和最小二乘估计来得到 Θ 的两步估计．首先由似然函数可以计算出 Σ 的极大似然估计

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 5.1129 & 2.4409 & 3.6105 & 2.5222 \\ 2.4409 & 3.9279 & 2.7175 & 3.0623 \\ 3.6105 & 2.7175 & 5.9798 & 3.8235 \\ 2.5222 & 3.0623 & 3.8235 & 4.6180 \end{pmatrix},$$

代入 (2.1) 式可以得到 Θ 的两步估计为

$$\widehat{\Theta} = \begin{pmatrix} 17.4252 & 15.7914 \\ 0.4763 & 0.8309 \end{pmatrix},$$

即女孩的生长曲线为 $y = 17.4252 + 0.4763t$, 男孩的生长曲线为 $y = 15.7914 + 0.8309t$

经计算 $\mathrm{tr}\,(M_1) = 25 \neq 0$, 故由 (3.9) 式可得 Σ 的最小二乘估计为

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4.3099 & 3.7638 & 3.2177 & 2.6716 \\ 3.7638 & 3.6891 & 3.6144 & 3.5397 \\ 3.2177 & 3.6144 & 4.0111 & 4.4078 \\ 2.6716 & 3.5397 & 4.4078 & 5.2759 \end{pmatrix},$$

代入 (2.1) 式可以得到 Θ 的两步估计为

$$\widehat{\Theta} = \begin{pmatrix} 17.3727 & 16.2725 \\ 0.4795 & 0.7899 \end{pmatrix},$$

即女孩的生长曲线为 $y = 17.3727 + 0.4795t$, 男孩的生长曲线为 $y = 16.2725 + 0.7899t$.

从计算的结果来看，两种情况下得到的两步估计相差不大，而且和散点图拟合得比较好，模拟效果不错．从男孩和女孩各自的模拟曲线来看，虽然他们的生长起点即直线的截距项相差不大，但男孩的平均生长速度显然远远快于女孩的，他们之间是有显著差别的．

参 考 文 献

[1] Pottoff and Ray. A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems. *Biometrika*, 1964, **51**: 313–326.

[2] Schott and Saw. A multivariate one-way classification model with random effects. *J. Multivariate Anal.*, 1984, **15**: 1–12.

[3] Amemiya and Fuller. Estimation for the multivariate errors-in-variables model with estimated error covariance matrix. *Ann. Statist.*, 1984, **12**: 497–509.

[4] Anderson B M, Anderson T W and Olkin. Maximum likelihood estimators and likelihood ratio criteria in multivariate components of variance. *Ann. Statist.*, 1986, **14**: 405–417.

[5] Hironori Fujisawa. Likelihood ratio criterion for mean structure in the growth curve model with random effects. *J. Multivariate Anal.*, 1997, **60**: 91–97.

[6] Anderson T W and Amemiya. Testing dimensionality in the multivariate analysis of variance. *Statist. Probab. Lett.*, 1991, **12**: 445–463.

[7] Fujisawa. Likelihood Ratio Test for Necessity of Random Coefficient Model. Statistical research group, Hiroshima, Hiroshima University, 1995, 95–23.

[8] Kuriki. Likelihood ratio test for covariance structure in random effects model. *J. Multivariate Anal.*, 1993, **46**: 175–197.

[9] Yokoyama and Fujikoshi. Test for random-effects covariance structures in the growth curve model covariates. *Hiroshima Math. J.*, 1992, **22**: 195–202.

[10] Pan Jianxin and Fang Kaitai. Growth Curve Model and Statistical Diagnostics. New York: Springer-Verlag, 2002.

[11] 徐承彝，杨文礼，蒋文江．增长曲线模型中的参数估计．北京：北京师范大学出版社， 1996.

[12] 陈希孺，王松桂．线性模型中的最小二乘法．上海：上海科学技术出版社， 2003.

[13] 王松桂．线性模型的理论及其应用．合肥：安徽教育出版社， 1987.

THE COMPUTING METHOD AND UNBIASED PROPERTY OF TWO-STAGE ESTIMATE IN THE GROWTH CURVE MODEL WITH RANDOM EFFECTS

LUO Youxi LI Hanfang LI Ziqiang

(*School of Science, Hubei University of Technology, Wuhan* 430068)

Abstract Firstly, a simple computing method is given for the two-stage estimate of regression coefficient matrix in the Growth Curve Model with Random Effects. Then the unbiased property of the two-stage estimate was become an unbiased estimate is proved. Finally, an example of dental growth data is given.

Key words Random effects, regression coefficient, two-stage estimate, unbiased estimate.